## 17. Vorlesung, 25.06.2009

Wir wenden nun die Methode der Residuen für Integrale der Form

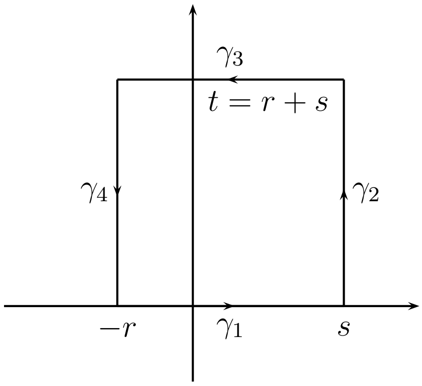
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}\,dx\,. \qquad (*)$$

an.

3.3.4. **Satz.**
*Sei* $F \subset \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ *eine endliche Menge. Sei* $f$ *holomorph in einer offenen Umgebung von* $\overline{\mathbb{H}} \setminus F$*, so dass* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$*. Dann existiert für alle* $\xi \in \mathbb{R}_+$ *das uneigentliche Integral* $(*)$ *und*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx = 2\pi i \sum_{w\in F} \operatorname{res}_w(f(z)e^{i\xi z}).$$

*Beweis*: Betrachte $r, s > 0$ und das Quadrat wie in der Skizze. Wir wählen $r, s$ genügend groß, so dass $F \subset Q$.




Es gilt:

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{w\in F} \operatorname{res}_w(f(z)e^{i\xi z}) &= \int_{\partial Q} f(z)e^{i\xi z}dz \\
&= \int_{-r}^{s} f(x)e^{i\xi z}dx + \int_{\gamma_2} f(z)e^{i\xi z}dz + \int_{\gamma_3} f(z)e^{i\xi z}dz + \int_{\gamma_4} f(z)e^{i\xi z}dz
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $\int\limits_{\gamma_i} f(z)e^{i\xi z}dz \to 0$, wenn $r, s \to \infty$ für $i = 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\gamma_2} f(z)e^{i\xi z}dz\Big| &= \Big|\int_0^t f(s+iu)e^{i\xi(s+iu)}du\Big| = \Big|\int_0^t f(s+iu)e^{i\xi s}e^{-\xi u}du\Big| \\
&\leqslant \|f(z)e^{i\xi s}\|_{|\gamma_2|}\int_0^t e^{-\xi u}du = \|f\|_{|\gamma_2|}\left(-\frac{1}{\xi}e^{-\xi u}\right)\Big|_0^t = \|f\|_{|\gamma_2|}\cdot\frac{1-e^{-t\xi}}{\xi} \\
&\leqslant \frac{1}{\xi}\|f\|_{|\gamma_2|} \to 0\,, \quad s \to \infty\,.
\end{aligned}$$

Analaog

$$\Big|\int\limits_{\gamma_4} f(z)e^{i\xi z}dz\Big| \le \frac{1}{\xi}\|f\|_{|\gamma_4|} \to 0\ , \quad r\to\infty$$

und

$$\Big|\int\limits_{\gamma_3} f(z)e^{i\xi z}dz\Big| \le \sup_{\operatorname{Im} z=t} |e^{i\xi z}f(z)|(r+s) = \underbrace{e^{-\xi t}\cdot t}_{\to 0}\underbrace{\sup_{\operatorname{Im} z=t}|f(z)|}_{\to 0} \to 0 \text{ für } t\to\infty\ .$$

□

3.3.5. **Folgerung.** *Sei* $R=\frac{P}{Q}$ *eine rationale Funktion ohne reelle Polstellen und* $\deg Q \ge \deg P + 1$. *Dann gilt*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\xi x}dx = 2\pi i\sum_{w\in\mathbb{H}}\operatorname{res}_w\left(R(z)e^{i\xi z}\right)$$

*für alle* $\xi\in\mathbb{R}_+$.

*Beweis* : In der Tat, $\lim\limits_{z\to\infty} R(z)=0$. □

*Beispiel.* Sei $\xi\in\mathbb{R}_+$, Dann gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}}{x-ib}\,dx = 2\pi i\operatorname{res}_{ib}\left(\frac{e^{i\xi x}}{z-ib}\right) = \begin{cases}2\pi i e^{-\xi b} & ,\ \operatorname{Re} b>0\\ 0 & ,\ \operatorname{Re} b<0\ .\end{cases}$$

Sei nun $b\in\mathbb{R}_+$. Dann gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\xi x}}{x\pm ib}\,dx = \begin{cases}2\pi i e^{-\xi b} & \text{für } -\\ 0 & \text{für } +\ .\end{cases}$$

Summe und Differenz dieser Identitäten ergibt:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{b\cos\xi x}{x^2+b^2}\,dx = \int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin\xi x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\xi b} \qquad \text{(Laplace-Identitäten)}\ .$$

Anwendung: berechnen wir $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (siehe Analysis-Skript, §6.6, Bsp. (7)). Es gilt:

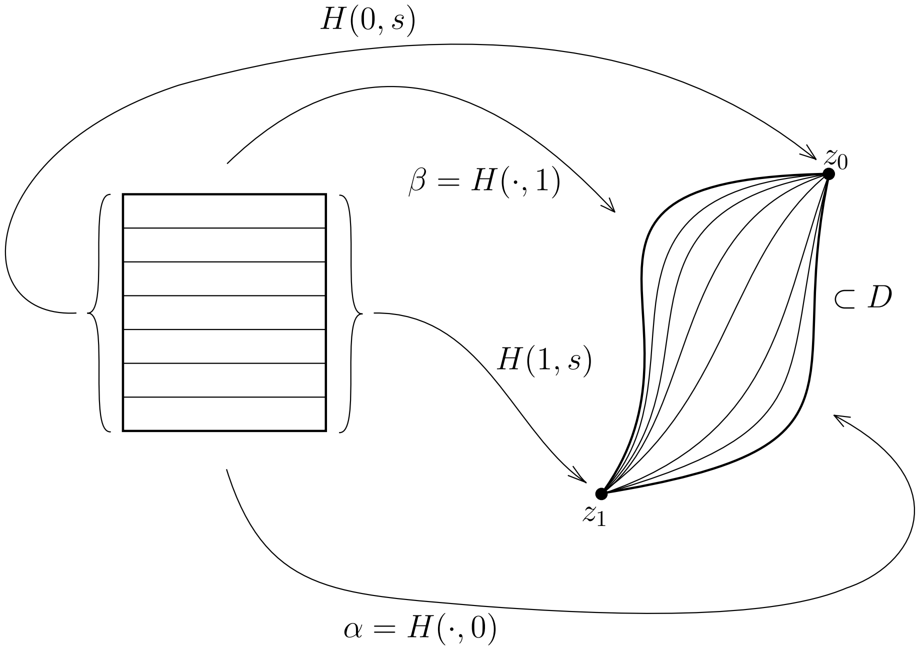
$$\int\limits_0^{R}\frac{x\sin x}{x^2+b^2}\,dx \to \int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+b^2}\,dx\ ,\ R\to\infty$$

ist gleichmäßig in $b>0$. Daraus folgt, dass $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ existiert und

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to 0}\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+b^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\ .$$

### 3.4. **Eine Homotopieversion der Cauchyschen Sätze.**

3.4.1. **Definition.** Zwei Kurven $\alpha, \beta : [0,1] \to D \subset \mathbb{C}$ heißen ***homotop*** in $D$ (bei festen Endpunkten) falls eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ - genannt ***Homotopie*** - existiert, so dass $\alpha(t) = H(t,0)$, $\beta(t) = H(t,1)$ für alle $t \in [0,1]$ und $\alpha(0) = H(0,s) = \beta(0)$, $\alpha(1) = H(1,s) = \beta(1)$ für alle $s \in [0,1]$. Bezeichnung: $\alpha \sim \beta \pmod D$. Eine geschlossene Kurve $\alpha : [0,1] \to D$, $\alpha(0) = \alpha(1) = z_0$ heißt ***nullhomotop***, falls $\alpha$ zur konstanten Kurve $\beta(t) \equiv z_0$ homotop ist. Bezeichnung: $\alpha \sim 0 \pmod D$. Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt ***einfach zusammenhängend***, falls jede geschlossene Kurve in $D$ nullhomotop in $D$ ist.



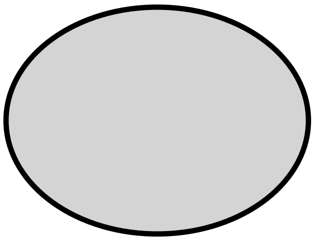

3.4.2. **Beispiel.**
**(1)** Ist $D \subset \mathbb{C}$ konvex und $\alpha, \beta$ haben die gleichen Anfangs- bzw. Endpunkte $\alpha(0) = \beta(0),\ \alpha(1) = \beta(1)$. Dann sind $\alpha \sim \beta$ und $H(t,s) = (1-s)\alpha(t) + s\beta(t)$.
**(2)** Die Homotopierelation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Sei

$$C(D, z_0) = \{\alpha : [0,1] \to D : \alpha(0) = \alpha(1) = z_0\}$$

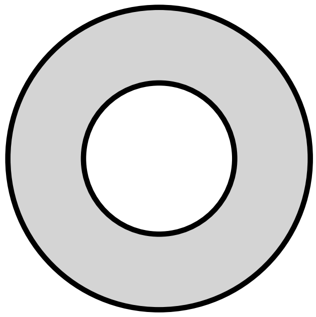
Die Menge $\pi_1(D; z_0) = C(D, z_0)/_\sim$ ist eine Gruppe bzgl. $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$ und heißt ***Fundamentalgruppe*** von $D$ bzgl. $z_0$. Das Einselement ist $e = c_{z_0}$, wobei $c_{z_0}(t) = z_0$ für alle $t \in [0,1]$. Ist $D$ wegzusammenhängend, so sind $\pi_1(D, z_0)$ und $\pi_1(D, z_1)$ isomorph für alle $z_0, z_1 \in D$: ist $\gamma : [0,1] \to D$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$, so ist $\pi_1(X, z_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, z_1)$, $[\alpha] \to [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$. In diesem Fall lassen wir $z_0$ in der Bezeichnung weg und schreiben $\pi_1(D)$. Für ein Gebiet $D$ gilt:

$$D \text{ ist einfach zusammenhängend} \iff \pi_1(D) = 1 = \{e\}.$$

**(3)** Konvexe Gebiete und Sterngebiete sind einfach zusammenhängend. Ein Ringgebiet $K_{r,R}(z_0)$ ist nicht einfach zusammenhängend.



einfach zusammenhängend



nicht einfach zusammenhängend