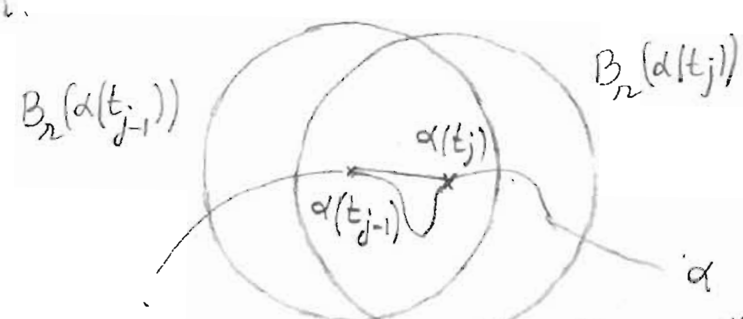
18. Vorlesung, 29. 06. 2009

Da wir nun mit beliebige (d.h. stetige) Kurven arbeiten, definieren wir das Integral längs diesen Kurven.

<u>3.2.3 Lemma</u> Sei $\alpha : [a,b] \to D$ eine Kurve. Dann existieren eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ von $[a,b]$ und ein $r > 0$, so dass $\alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset B_r(\alpha(t_{j-1})) \cap B_r(\alpha(t_j)) \subset D$ für $j = 1, \dots, n$.

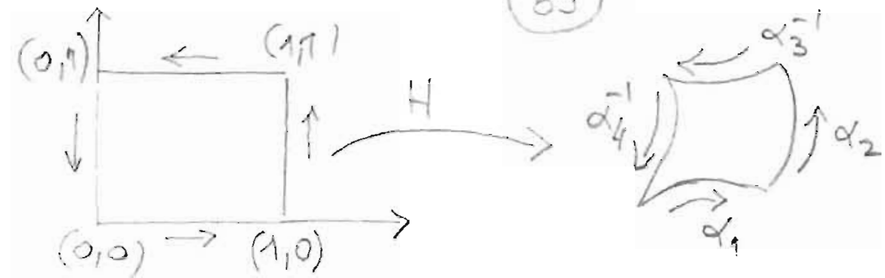


Ist $f \in \mathcal{O}(D)$ so ist die Zahl $\sum_{j=1}^{n} \int_{\alpha(t_{j-1})}^{\alpha(t_j)} f(z)\,dz$

unabhängig von der Wahl der Unterteilung ab. Ist α stückweise $\mathcal{C}^1$ so stimmt diese Summe mit $\int_\alpha f(z)\,dz$ überein. ($\varepsilon := d(|\alpha|, \partial D) > 0$; α glm. stetig $\rightsquigarrow \exists \delta > 0$ usw)

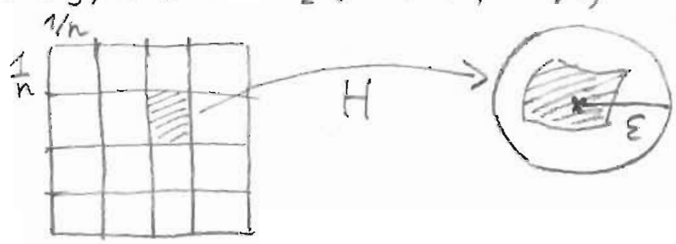
<u>3.2.4 Def.</u> Ist α stetig und $f \in \mathcal{O}(D)$ so <u>definieren</u> wir $\int_\alpha f(z)\,dz$ durch die obige Summe.

Sei nun $Q = [0,1] \times [0,1]$ und $H : Q \to D$ stetig. Betrachte die Kurven $\alpha_1 = H|_{[0,1]\times\{0\}}$, $\alpha_2 = H|_{\{1\}\times[0,1]}$, $\alpha_3 = H|_{[0,1]\times\{1\}}$, $\alpha_4 = H|_{\{0\}\times[0,1]}$ und setze $H|_{\partial Q} := \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3^{-1} * \alpha_4^{-1}$



3.2.5 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $H: Q \to D$ stetig, $f \in \mathcal{O}(D)$.
Dann gilt $\displaystyle\int_{H|_{\partial Q}} f(z)\,dz = 0.$

Beweis Da $H(Q)$ kompakt ist, gilt $r = d(H(Q), \partial D) > 0$.
Sei $0 < \varepsilon < r$. H ist stetig und Q kompakt $\Rightarrow$
H ist gleichmäßig stetig auf Q $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$
$\forall x, y \in Q$ $d_\infty(x,y) < \delta$: $d_2(H(x), H(y)) < \varepsilon$.



Sei nun $1/n < \delta/2$ und zerlege Q in ein Netz von n^2 Quadrate Q_{jk} $(1 \leq j,k \leq n)$. Für alle (j,k) gilt also $H(Q_{jk}) \subset B_\varepsilon(w)$ für ein $w \in H(Q)$. $B_\varepsilon(w)$ ist Sterngebiet, also nach dem Cauchyschen Integralsatz für Sterngebiete gilt

$$\int_{H|_{\partial Q_{jk}}} f(z)\,dz = 0$$

Außerdem gilt $\displaystyle\int_{H|_{\partial Q}} f(z)\,dz = \sum_{j,k=1}^{n} \int_{H|_{\partial Q_{jk}}} f(z)\,dz = 0$

Die Integrale auf der inneren Kurven heben sich weg. ∎

3.2.6 Cauchyscher Integralsatz für homotope Kurven

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$ und α, β homotope Kurven. Dann gilt $\int_\alpha f(z)dz = \int_\beta f(z)dz$. Ist α nullhomotop, so $\int_\alpha f(z)dz = 0$.

Beweis Sei $H: Q \to D$ eine Homotopie zwischen α, β. Dann gilt nach 2.3.5

$$0 = \int_{H|\partial Q} f(z)dz = \int_\alpha f(z)dz + \underbrace{\int_{C_{\alpha(1)}} f(z)dz}_{=0} + \int_{\beta^{-1}} f(z)dz + \underbrace{\int_{C_{\alpha(0)}} f(z)dz}_{=0}$$

$$= \int_\alpha f(z)dz - \int_\beta f(z)dz. \quad ▨$$

3.2.7 Cauchyscher Integralsatz für einfach zsh Gebiete

Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ und α eine geschlossene Kurve. Dann gilt

$$\int_\alpha f(z)dz = 0$$

Beweis α ist homotop zu einer konstaten Kurve c_{z_0} und

$$\int_{c_{z_0}} f(z)dz = 0. \quad ▨$$

3.2.8 Folgerung

Ist α nullhomotop in D, so ist α nullhomolog in D.

Beweis Ist $z \notin D$, so ist $D \ni \zeta \to \frac{1}{\zeta - z}$ holomorph in D, also $n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$, da $\alpha \sim 0$. ▨

Die Umkehrung ist falsch. Die folgende Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ $a \neq b$ ist nicht nullhomotop, sie ist aber nullhomolog da $n(\gamma, a) = n(\gamma, b) = 0$.