19. Vorlesung, 02.07.2009

3.2.9 Satz (Charakterisierung von einfach zhgen Gebiete)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Äquivalent:

(a) D ist einfach zusammenhängend

(b) $n(\gamma, z) = 0$ für alle geschlossenen Kurven in D, $z \notin D$.

(c) $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ ist zusammenhängend

(d) Für alle $f \in \mathcal{O}(D)$ und alle geschlosseren Kurven γ gilt $\int_\gamma f(z) dz = 0$

(e) Jede Fkt $f \in \mathcal{O}(D)$ besitzt eine Stammfkt

(f) Für jede $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, existiert $g \in \mathcal{O}(D)$ mit $f = \exp(g)$ d.h. $g = \log f$.

(g) Für jede $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $h \in \mathcal{O}(D)$ mit $h^n = f$ (d.h. h ist eine holomorphe n-te Wurzel von f auf D).

(h) D ist homöomorph zum Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$.

Beweis (a) $\Rightarrow$ (b) γ geschlossen $\overset{(a)}{\Longrightarrow}$ γ nullhomotop $\Rightarrow$
γ nullhomolog $\Rightarrow$ $\operatorname{Int}\gamma \subset D \Rightarrow \mathbb{C}\setminus D \subset \operatorname{Ext}\gamma$

(b) $\Rightarrow$ (c) Benutzt eine Form der Cauchy-Formel, siehe z.B. Remmert, Band II, S. 249.

(c) $\Rightarrow$ (d) Benutzt den Satz von Runge. Man zeigt, dass jede holomorphe Fkt in D kann durch eine Folge von Polynome lokal gleichmäßig in D approximieren.
Es ist dann $0 = \int_\gamma P_n(z)\,dz \longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz$, $n \to \infty$.

(d) $\Rightarrow$ (e) folgt aus der Hauptsatz über Kurvenintegrale 2.2.11

(e) $\Rightarrow$ (f) $f'/f \in \mathcal{O}(D) \Rightarrow \exists\, g \in \mathcal{O}(D)$ mit $g_1' = f'/f$ in D
Sei $h: D \to \mathbb{C}$, $h = \exp(g_1)$. Betrachte $f/h \in \mathcal{O}(D)$:

$$(f/h)' = \frac{f'h - fh'}{h^2} = \frac{f'h - fg_1'h}{h^2} = \frac{f'h - f\frac{f'}{f}\cdot h}{h^2} = 0$$

Es folgt, dass f/h konstant ist, also $f = c\exp(g) = \exp(g_1 + c_1)$
Man kann $g = g_1 + c_1$ setzen.

(f) $\Rightarrow$ (g) Setze $h = e^{\frac{1}{n}\log f}$.

(g) $\Rightarrow$ (h) Riemannscher Abbildungssatz

(h) $\Rightarrow$ (a) Wir beweisen: sind $G \xrightarrow{\Phi} G'$ homöomorph und G einfach zshg, so ist auch G' einfach zshg. In der Tat, sei $\gamma: [0,1] \to G'$ geschlossen. Dann ist $\Phi^{-1}\circ\gamma: [0,1] \to G$ geschlossen und es gibt $\underbrace{H: [0,1]^2 \to G}_{\text{eine Homotopie}}$ zwischen $\Phi^{-1}\circ\gamma$ und $(\Phi^{-1}\circ\gamma)(0)$

Dann ist $\Phi \circ H: [0,1] \to G'$ eine Homotopie zwischen γ und $\gamma(0)$.

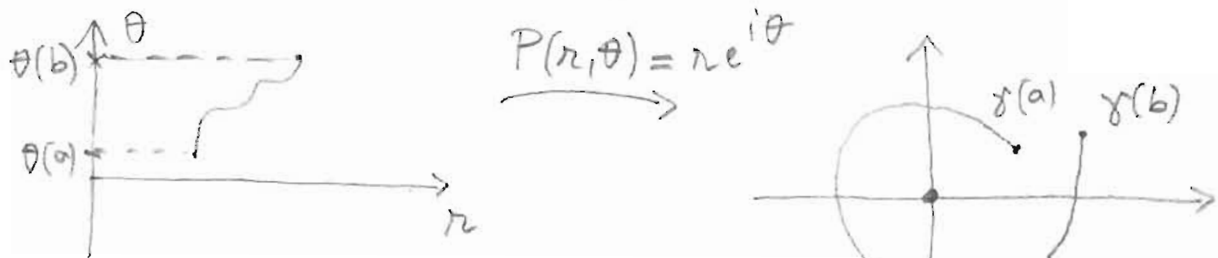
§ 3.5 Windungszahl für allgemeine Kurven

Für geschlossene stückweise C^1 Kurven haben wir definiert die Windungszahl

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Wir definieren nun $n(\gamma, z)$ für eine beliebige (stetige) Kurve. OBdA $z = 0$.

3.5.1 Def Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ eine Kurve. Ein stetiger Zweig des Arguments entlang γ ist eine stetige Abbildung $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass $\theta(t) \in \operatorname{Arg} \gamma(t)$ d.h. $\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta(t)}$ für alle $t \in [a,b]$.



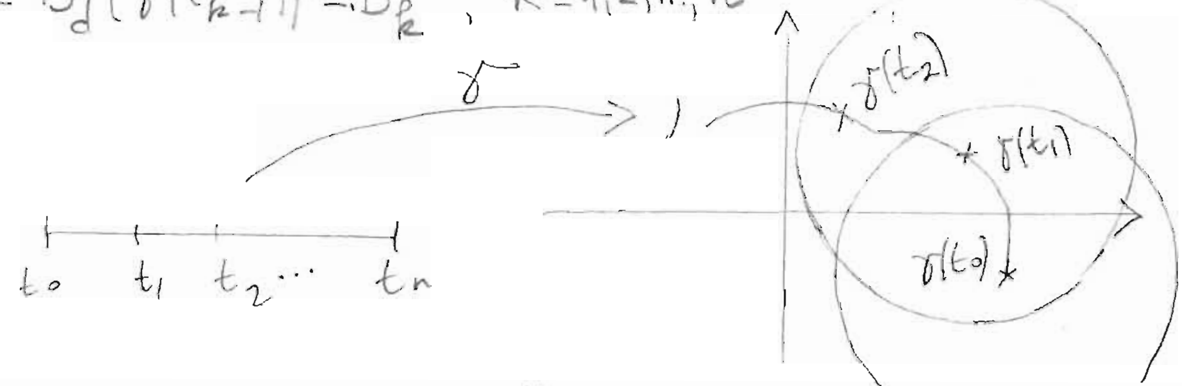
Für $\tilde{\gamma}(t) = (|\gamma(t)|, \theta(t))$ gilt $P(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$.

Bemerkung. In $\mathbb{C}^*$ gibt es keinen stetigen Zweig von arg aber $\theta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\theta(t) = t$ ist ein stetigen Zweig entlang des Kreises.

3.5.2 Satz Für jede Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ existiert ein stetiger Zweig des Argumentes. Er ist bis auf einer additiven Konstante eindeutig bestimmt.

Beweis Eindeutigkeit: Sind θ_1, θ_2 zwei solche Zweige dann ist $\theta_1(t), \theta_2(t) \in \operatorname{Arg} \gamma(t)$ also $\theta_1(t) - \theta_2(t) \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow$ $\theta_1 - \theta_2$ stetig mit Werte in $2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow \theta_1 - \theta_2$ konstant.

<u>Existenz</u>: Sei $d = \inf\{|\gamma(t)| : t \in [a,b]\} > 0$. Es gibt eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, so dass $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset B_d(\gamma(t_{k-1})) =: D_k$, $k = 1, 2, \dots, n$



Weil $D_k \subset \mathbb{C}^*$, gibt es einen stetigen Zweig $\Theta_{k-1} : D_k \to \mathbb{R}$ des Arguments. Setze $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $\theta(t) = \Theta_0(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Da $\Theta_2(t_1) = \Theta_1(t_1) + 2\pi n_1$ setze $\theta(t) = \Theta_2(t) - 2\pi n_1$ für $t \in [t_1, t_2]$. Dann ist θ auf $[t_0, t_2]$ stetig. Durch Rekursion definieren wir θ auf ganz $[a,b]$. ∎

<u>3.5.3 Satz</u> Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^*$ stückweise $\mathcal{C}^1$ und geschlossen und θ ein stetiger Zweig des Arguments auf γ so gilt

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta(b) - \theta(a)\right)$$

d.h. $n(\gamma, 0)$ ist die totale Variation des Arguments entlang γ.

<u>Beweis</u> Ist γ stückweise $\mathcal{C}^1$ so sind $r(t) = |\gamma(t)|$ und $\theta(t)$ auch so. Mit $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ folgt

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \left[\frac{r'(t)}{r(t)} + i\,\theta'(t)\right]dt = \frac{1}{2\pi i}\Big[\log r(t) + i\theta(t)\Big]_0^1$$ ∎

<u>3.5.4 Def.</u> Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z\}$ eine geschlossene Kurve. Die Windungszahl von γ um z ist

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\theta(b) - \theta(a)\right).$$