20. Vorlesung, 06.07.2009

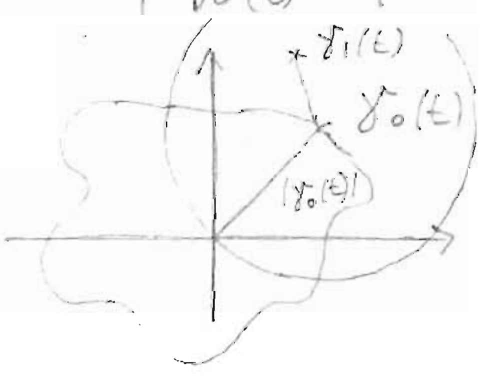
3.5.5 Satz (i) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und γ_0, γ_1 zwei geschlossene homotope Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Dann gilt $n(\gamma_0, z) = n(\gamma_1, z)$.

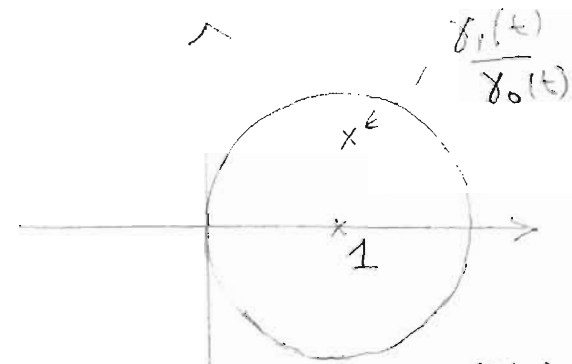
(ii) Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$. Die Fkt
$\mathbb{C} \setminus |\gamma| \ni z \to n(\gamma, z)$ ist konstant in jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$. Sie verschwindet auf die unbeschränkte Zusammenhangskpt.

Beweis (i) Es reicht zu zeigen, dass $n(\gamma_0, z) = n(\gamma_1, z)$ wenn $\|\gamma_0 - \gamma_1\|_{[0,1]}$ hinreichend klein ist. Dies ist Konsequenz des folgendes Lemma.

3.5.6 Lemma (Hund an der kurzen Leine)
Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ so dass $|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| \leq |\gamma_0(t)|$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt $n(\gamma_1, 0) = n(\gamma_0, 0)$.

Beweis Sei θ_0 ein stetiger Zweig des Arguments entlang γ_0. Sei $\arg : \mathbb{C}_- \to (-\pi, \pi)$ der Hauptzweig des Arguments.
Es gilt $\left|\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_0(t)} - 1\right| < 1$ für alle $t \in [0,1]$.





Es folgt $\gamma_1(t)/\gamma_0(t) \in \mathbb{C}_-$ und $\theta_1(t) = \theta_0(t) + \arg \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_0(t)}$
$\in \operatorname{Arg} \gamma_0(t) + \operatorname{Arg} \gamma_1(t) - \operatorname{Arg} \gamma_0(t) = \operatorname{Arg} \gamma(t_1)$.
θ_1 ist auch stetig also ein stetiger Zweig des Arguments entlang γ_1. Außerdem ist $\arg \frac{\gamma_1(1)}{\gamma_0(1)} = \arg \frac{\gamma_1(0)}{\gamma_0(0)}$
$\Rightarrow \theta_1(1) - \theta_0(1) = \theta_1(0) - \theta_0(0) \Rightarrow \theta_1(1) - \theta_1(0) = \theta_0(1) - \theta_0(0)$. ▨

(ii) Sei $z \notin |\gamma|$ und $|h| < d(z,|\gamma|)$. Dann $\gamma \sim \gamma - h$ in $\mathbb{C}\setminus\{z\}$

Für $|w - z| < d(z,|\gamma|)$ gilt

$$n(\gamma,w) = n(\gamma-(w-z), w-(w-z)) = n(\gamma-(w-z), z)$$
$$= n(\gamma,z).$$

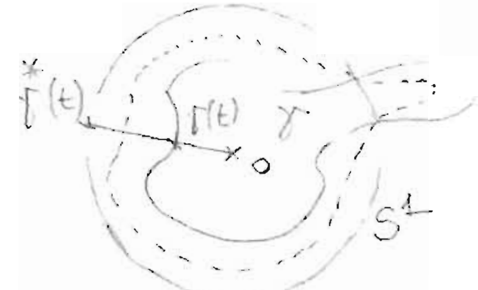
Die Fkt $z \to n(\gamma,z)$ ist also lokal konstant auf $\mathbb{C}\setminus|\gamma|$.

Sei $r>0$ mit $|\gamma| \subset \overline{B}_r(0)$. Dann gilt $\gamma \sim 0$ in $B_r(0)$ also in $\mathbb{C}\setminus\{z\}$ für $z \in \overline{B}_r(0)$ also nach (i) gilt $n(\gamma, z) = 0$ für alle $z \notin \overline{B}_r(0)$. ∎

<u>3.5.6 Satz</u> (i) Zwei geschlossene Kurven in $\mathbb{C}^*$ (bzw. S^1) sind homotop in $\mathbb{C}^*$ (bzw. S^1) genau dann, wenn die gleiche Windungszahl um 0 haben.

(ii) Jede geschlossene Kurve in $\mathbb{C}^*$ (bzw. S^1) ist homotop in $\mathbb{C}^*$ (bzw. S^1) zu einer Kurve $t \to e^{2\pi i n t}$, $n \in \mathbb{Z}$ wobei n die Windungszahl der Kurve um 0 ist.
D.h. $\pi_1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$.

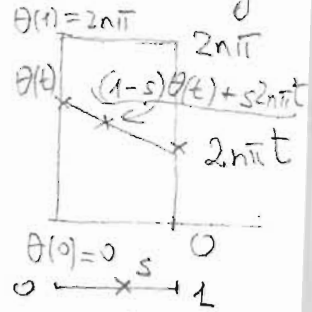
<u>Beweis</u> Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ geschlossen, $n = n(\gamma, 0)$.
Wir zeigen, dass $\gamma \sim c_n$ wobei $c_n(t) = e^{2\pi i n t}$, $t \in [0,1]$.
Sei $\gamma^* : [0,1] \to S^1$, $\gamma^*(t) = \gamma(t)/|\gamma(t)|$. Dann ist $\gamma^* \sim \gamma$ in $\mathbb{C}^*$ da $|(1-s)\gamma(t) + s\gamma^*(t)| = (1-s)|\gamma(t)| + s > 0$, wobei $H(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma^*(t)$ die (standard) Homotopie ist.



Es reicht also den Satz für S^1 zu beweisen.

Sei $\gamma : [0,1] \to S^1$ geschlossen. Die Homotopie $H(t,s) = e^{-ist_0}\gamma(t)$ ist eine Homotopie zwischen $e^{-it_0}\gamma$ und γ. Wähle t_0, so dass $\gamma(0) = e^{it_0}$ also $(e^{-it_0}\gamma)(0) = 1$. Wir können also annehmen, dass $\gamma(0) = 1$.

Sei $\vartheta : [0,1] \to \mathbb{R}$ ein stetiger Zweig des Arguments entlang γ, so dass $\vartheta(0) = 0$. Dann gilt $\vartheta(1) = 2n\pi$



Definiere $H(t,s) = \exp i\left[(1-s)\vartheta(t) + s\, 2n\pi t\right]$

H ist eine Homotopie zwischen γ und c_n:

$$H(t,0) = e^{i\vartheta(t)} = \gamma(t), \quad H(t,1) = e^{2\pi i n} = c_n(t)$$

$H(0,s) = 1 = H(1,s)$ für alle $s, t \in [0,1]$.

$\blacksquare$