21. Vorlesung, 09.07.2009

4. Biholomorphe Abbildungen

§4.1. Konforme Abbildungen

Wir wollen nun die Holomorphiebedingung geometrisch interpretieren.

4.1.1 Def. (i) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Der nichtorientierte Winkel zwischen z, w ist $\measuredangle(z,w) := \arccos \frac{z \cdot w}{\|z\| \, \|w\|} \in [0, \pi]$ wobei $z \cdot w$ das reelle Skalarprod. von $z, w \in \mathbb{R}^2$ ist. Der orientierte Winkel zwischen z, w ist $\arg \frac{w}{z}$

(ii) Eine $\mathbb{R}$-lin. Abbildung $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt winkeltreu falls für alle $z, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\measuredangle(Tz, Tw) = \measuredangle(z, w)$

und <u>orientierungstreu</u>, falls T eine positiv-orientierte Basis in $\mathbb{R}^2$ in einer positiv-orientierte Basis überführt.

T ist <u>orientierungstreu</u> $\Leftrightarrow$ $\det T > 0$.

(iii) Seien γ_1, γ_2 zwei Kurven in $\mathbb{C}$, $z = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ ein Schnittpunkt. Die Kurven seien diffbar in t_1, t_2 und gelte $\gamma_1'(t_1) \neq 0$, $\gamma_2'(t_2) \neq 0$. Der <u>unorientierte</u> (bzw. <u>orientierte</u>) <u>Winkel</u> zwischen γ_1, γ_2 ist der unorientierte (bzw. orientierte) Winkel zwischen $\gamma_1'(t_1)$, $\gamma_2'(t_2)$.

(iv) Eine C^1-Abbildung $f: D \to D'$ ($D, D' \subset \mathbb{C}$ offen) heißt <u>lokal konform</u>, falls $df(z)$ winkeltreu und orientierungstreu ist für alle $z \in D$. Ist außerdem f bijektiv, so heißt f <u>konform</u>.

<u>4.1.2 Bemerkung</u> (1) Sei $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear. T ist winkeltreu und orientierungstreu $\Leftrightarrow$ die assoziierte Matrix von T hat die Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

$\Leftrightarrow$ T ist die Komposition einer Rotation und einer Streckung:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \sqrt{\det T} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ Der orientierte Winkel zwischen z, w ist gleich dem orientierten Winkel zwischen Tz, Tw

(2) $f: D \to D'$ ist lokal konform $\Leftrightarrow$ der orientierte Winkel zwischen zwei regulären Kurven in einem Schnittpunkt z ist gleich dem orientierten Winkel der Bildkurven im Schnittpunkt $f(z)$.

Beweis Wir zeigen:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist winkeltreu $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \; \forall v, w \in \mathbb{R}^2$

$$\langle Tv, Tw \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle$$

„$\Leftarrow$" $\cos \sphericalangle (v, w) = \dfrac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|} = \dfrac{Tv \cdot Tw}{\|Tv\| \cdot \|Tw\|} = \cos \sphericalangle (Tv, Tw)$

also $\sphericalangle (v, w) = \sphericalangle (Tv, Tw)$ da $\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$ injektiv ist

„$\Rightarrow$" Sei $\{e_1, e_2\}$ eine ONB von $\mathbb{R}^2$. Sei $\sigma_i = \|Te_i\|^2 > 0$

$e_1 \perp e_2 \Rightarrow Te_1 \perp Te_2$ d.h. $\langle Te_1, Te_2 \rangle = 0$ $(*)$

$e_1 + e_2 \perp e_1 - e_2 \Rightarrow T(e_1 + e_2) \perp T(e_1 - e_2) \Rightarrow$

$0 = \langle Te_1 + Te_2, Te_1 - Te_2 \rangle \underset{(*)}{=} \sigma_1 - \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$

Setze $\lambda := \sqrt{\sigma_1} = \sqrt{\sigma_2}$. Dann gilt für $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $w = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$:

$\langle Tv, Tw \rangle = \alpha_1 \beta_1 \|Te_1\|^2 + \alpha_2 \beta_2 \|Te_2\|^2 = \lambda^2 \langle v, w \rangle$. ▨

Es gilt also: T winkeltreu $\Leftrightarrow \exists \lambda > 0: \frac{1}{\lambda} T$ orthogonal

T winkeltreu und orientierungserhaltend $\Leftrightarrow$

$\exists \lambda > 0: \frac{1}{\lambda} T$ orthogonal und $\det\left(\frac{1}{\lambda} T\right) > 0 \Leftrightarrow$

$\exists \lambda > 0: \frac{1}{\lambda} T \in SO(2) \Leftrightarrow$

$\exists \lambda > 0 \; \exists \varphi \in \mathbb{R}: M_B^B(T) = \lambda \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

(wobei $M_B^B(T)$ die darstellende Matrix von T bzgl. der Standardbasis ist)

$\Leftrightarrow$ T $\mathbb{C}$-linear (und $T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = \lambda e^{i\varphi} \cdot z$)

4.1.3 Satz Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.
Eine Fkt $f : D \to \mathbb{C}$ ist lokal-konform $\iff f \in \mathcal{O}(D)$ und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.
$f : D \to \mathbb{C}$ konform $\iff f$ ist biholomorph

Beweis

f lokal-konform $:\iff \forall z \in D$ $df(z)$ winkeltreu und orientierungserhaltend

$\overset{4.1.2}{\iff} \forall z \in D$ $df(z)$ $\mathbb{C}$-linear und bijektiv

$\iff f$ holomorph in D und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.

Die zweite Behauptung folgt aus dem Biholomorphiesatz 2.1.12.

4.1.4 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph
Ist f injektiv, so ist $f(D)$ offen und $f : D \to f(D)$ biholomorph.

Beweis O.B.d.A. D ist ein Gebiet.
f injektiv $\Rightarrow f$ nicht-konstant $\Rightarrow f(D)$ offen
Wegen 2.1.12 es reicht zu zeigen, dass $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.
Angenommen, es gibt $a \in D$ mit $f'(a) = 0$. Dann hat die Fkt $g : D \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(z) - f(a)$ eine Nullstelle von Ordnung $p \geq 2$ in a. Argumentprinzip 3.2.5: $p = N_g(0) = n(\gamma, 0)$ wobei $\gamma(t) = g(a + re^{it})$, $r > 0$ genügend klein, fest.
Aber für $|w|$ genügend klein, gilt dann $p = n(\gamma, 0) = n(\gamma, w) = N_g(w)$. Wir wählen r, so dass $g'(z) \neq 0$ für $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$. Dann hat w zwei verschiedene Urbilder in D, Wiederspruch zur Injektivität von f. $\blacksquare$

§4.2. Die Sätze von Arzela-Ascoli und Stieltjes-Vitali

Ziel: Charakterisierung der Kompaktheit in der Raum $\mathcal{C}(X)$ der stetigen Fkt auf einem kompakten metrischen Raum.

Ist V ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum und $K \subset V$ so sind die folgenden Aussagen äquivalent

(i) K kompakt (K hat die Heine-Borel Überdeckungseigenschaft)

(ii) K folgenkompakt (K hat die Bolzano-Weierstrass Eigenschaft d.h. jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge)

(iii) K ist beschränkt und abgeschlossen.

Für unendlich-dim Vektorräume gilt diese Charakterisierung nicht mehr:

<u>Satz von Riesz</u> Die Einheitskugel $\overline{B_1(0)} = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ eines Banachraums V ist kompakt genau dann, wenn $\dim V < \infty$.

Sei nun (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Betrachte $\mathcal{C}(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ stetig}\}$ mit der sup-Norm $\|f\| = \sup_X |f|$.
Dann ist $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $\dim \mathcal{C}(X) = \infty$ i.A.

<u>4.2.1 Satz (Arzela-Ascoli)</u> Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{C}(X)$ mit der folgenden Eigenschaften:

(1) (f_n) ist beschränkt d.h. es gibt $C > 0$ mit $\|f_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(2) (f_n) ist gleichgradig stetig: für alle $x \in X$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ so dass für alle $x' \in B_\delta(x)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$.

Beweis 1. Schritt: Wenn (X,d) kompakt ist, so existiert $A \subset X$ höchstens abzählbar mit $\bar{A} = X$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $A_n = \{x_{n,1}, \dots, x_{n,k_n}\} \subset X$ so dass $X = \bigcup_{j=1}^{k_n} B_{1/n}(x_{n,j})$. Setze $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

A ist höchstens abzählbar und für alle $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ gibt es $a \in A$ mit $d(x,a) < 1/n$ d.h. A liegt dicht in X.

2. Schritt Es gibt eine Teilfolge (v_n) von (f_n), so dass $(v_n(a))$ konvergiert für alle $a \in A$.

Definiere $A_p = \{a_1, \dots, a_p\}$, $p \in \mathbb{N}$. Betrachte die Folge $(f_n(a_1))$. Sie ist beschränkt: $|f_n(a_1)| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Nach Bolzano-Weierstrass besitzt $(f_n(a_1))$ eine konv. Teilfolge $(f_n^{(1)}(a_1))$. Die Folge $(f_n^{(1)}(a_2))$ ist auch beschränkt, also besitzt eine konvergente Teilfolge $(f_n^{(2)}(a_2))$. Da $f_n^{(2)}$ Teilfolge von $f_n^{(1)}$, konvergiert auch $f_n^{(2)}(a_1)$, also $f_n^{(2)}$ konvergiert auf A_2.
Rekursiv konstruieren wir Folgen $(f_n^{(k)})_n$, so dass $(f_n^{(k)})$ eine Teilfolge von $(f_n^{(k-1)})$ ist und $f_n^{(k)}$ konvergiert auf A_k.
Wir benutzen nun das Cantorsche Diagonalverfahren:

$$
\begin{matrix}
f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & \dots & f_n^{(1)} & \dots \\
f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & \dots & f_n^{(2)} & \dots \\
\vdots & & & & \\
f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} & \dots \\
\vdots & \vdots & & \vdots &
\end{matrix}
$$

Wir betrachten die Diagonalfolge $v_n = (f_n^{(n)})$.
Da $(f_n^{(n)})_{n \geq k}$ Teilfolge von $(f_n^{(k)})$ ist, so konvergiert $(f_n^{(n)})$ auf A_k

also auf $A = \bigcup A_k$.