22. Vorlesung, 13.07.2009 (99)

3. Schritt Wir zeigen:

Konvergiert (v_n) auf die dichte Menge A, so konvergiert v_n punktweise auf X.

Sei nun $x \in X$ beliebig. Wähle $a \in A$ mit $d(x,a) < \delta(\varepsilon, x)$. Da $(f_n(a))$ konvergent ist wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass für $m,n \geq N$ gilt $|f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f_m(x)| \leq 3\varepsilon$$

Daraus folgt, dass $(f_n(x))$ konvergent ist.

4. Schritt: Ist X kompakt und (v_n) gleichgradig stetig und punktweise konvergent, so ist (v_n) gleichmäßig konvergent.

Sei $\varepsilon > 0$. Da X kompakt ist, existieren $x_1, \dots, x_N \in X$ mit $X = \bigcup_{i=1}^{N} B_{\delta(\varepsilon, x_i)}(x_i)$, mit $\delta(\varepsilon, x)$ wie in (2).

Für ein $x \in X$ und $k \in \{1, \dots, N\}$ mit $x \in B_{\delta(\varepsilon, x_k)}(x_k)$

$$|v_n(x) - v_m(x)| \leq \underbrace{|v_n(x) - v_n(x_k)|}_{<\varepsilon} + |v_n(x_k) - v_m(x_k)| + \underbrace{|v_m(x_k) - v_m(x)|}_{<\varepsilon}$$

Es folgt

$$\|v_n - v_m\|_X \leq 2\varepsilon + \underbrace{\max_{1 \leq k \leq N} |f_n(x_k) - f_m(x_k)|}_{\leq \varepsilon \text{ für } m,n \text{ groß genug}} \leq 3\varepsilon$$

Es folgt, dass (v_n) eine Cauchy-Folge ist in der Banachraum $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|)$ also konvergent.

$\blacksquare$

4.2.2. Satz (Stieltjes-Vitali)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, (f_n) eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge in $\mathcal{O}(D)$, d.h. für jedes $K \subset D$ kompakt gilt $\sup_n \|f_n\|_K < \infty$. Dann (f_n) besitzt ein lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

<u>Beweis</u> Sei $z \in D$, $\overline{B_r(z)} \subset D$. Nach Annahme existiert $C > 0$ mit $\|f_n\|_{\overline{B_r(z)}} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Cauchy-Abschätzungen (2.5.5) liefern

$$\|f_n'\|_{\overline{B_{r/2}(z)}} \leq \frac{1}{(r/2)} \|f_n\|_K \leq \frac{2C}{r}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Für $w \in B_{r/2}(z)$ gilt dann (Schrankensatz)

$$|f_n(w) - f_n(z)| \leq \frac{2C}{r} |w - z|$$

Dies zeigt, dass die Folge (f_n) gleichgradig stetig ist. Wir wenden nun der Satz von Arzela-Ascoli. Sei (K_p) eine Ausschöpfung von D mit kompakte Teilmenge: $K_p \subset \mathring{K}_{p+1}$ und $D = \bigcup_{p \geq 1} K_p$.

Wähle eine Teilfolge $(f_n^{(1)})$ gleichmäßig konv auf K_1. Aus $(f_n^{(1)})$ wähle eine Teilfolge $(f_n^{(2)})$ glm. konv auf K_2 usw. Die Diagonalfolge $(f_n^{(n)})$ konvergiert dann auf jedes K_p, $p \in \mathbb{N}$, also auf jedes kompakt $K \subset D$. ∎

§ 4.3 Riemannscher Abbildungssatz

4.3.1 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene, einfach zshg Teilmenge; $D \neq \mathbb{C}$. Dann D ist biholomorph zu $\mathbb{D}$

Beweis Sei $a \in D$. Betrachte die Familie

$$\mathcal{K} = \{f \in \mathcal{O}(D) : \ f(D) \subset \mathbb{D},\ f \text{ injektiv},\ f(a) = 0\}$$

Wir zeigen, dass

(1) $\mathcal{K} \neq \emptyset$ (2) $\exists f \in \mathcal{K}$ mit $|f'(a)|$ maximal

(3) $f \in \mathcal{K}$ mit $|f'(a)|$ maximal $\Rightarrow f(D) = \mathbb{D}$ und f ist biholomorph

(1) $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Ist $\overline{D} \neq \mathbb{C}$, wähle $B_\varepsilon(b) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Dann ist die Fkt. $D \ni z \to \frac{z-a}{z-b}$ holomorph und beschränkt auf D. Für $R > 0$ genügend groß ist $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z-a}{R(z-b)}$ ein Element in $\mathcal{K}$.

I.A. sei $b \in D$. Die holomorphe Fkt $z \to z-b$ verschwindet nicht auf D und D ist einfach zshg; es gibt $g \in \mathcal{O}(D)$, $g(z)^2 = z - b$ für $z \in D$.

g ist nicht konstant, also offen. Außerdem gilt $g(z) = \pm g(z') \Rightarrow g(z)^2 = g(z')^2 \Rightarrow z - b = z' - b \Rightarrow z = z'$.

Insbesondere g injektiv und für alle $y \in \mathbb{C}$ gilt $\{y, -y\} \not\subset g(D)$.

Sei $c \in g(D)$ (also $c \neq 0$) und $B_r(c) \subset g(D)$

Dann ist $B_r(-c) \not\subset g(D) \Rightarrow g(D)$ nicht dicht in $\mathbb{C}$. Es gibt dann $h : g(D) \to \mathbb{D}$ holom, injektiv mit $h(a-b) = 0$. Dann gilt $h \circ g \in \mathcal{K}$.

(2) Wir zeigen, dass es $f \in \mathcal{K}$ gibt mit $|f'(a)| = \sup\{|g'(a)| : g \in \mathcal{K}\}$

Da $\mathcal{K} \neq \emptyset$ gilt $M := \sup\{|g'(a)| : g \in \mathcal{K}\} \in [0, \infty]$.

Sei $g \in \mathcal{K}$; g ist injektiv also $g'(a) \neq 0$ und $M \geq |g'(a)| > 0$.
Außerdem $\|g\|_D < 1$ und für $r > 0$ mit $\overline{B_r(a)} \subset D$ gilt
$|g'(a)| \leq \frac{1}{r} \|g\|_{\overline{B_r(a)}} < \frac{1}{r} < \frac{1}{d(a, \partial D)}$ also $M \leq \frac{1}{d(a, \partial D)}$.
Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{K}$ mit $|f_n'(a)| \to M$, $n \to \infty$
Es gilt $\|f_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Stieltjes-Vitali gibt es eine konv. Teilfolge (v_n) mit $v_n \to f$ lokal gleichmäßig für $n \to \infty$. Satz von Weierstrass: $f \in \mathcal{O}(D)$ und $f_n' \to f'$ also $f(a) = 0$, $|f'(a)| = M$.

Wir zeigen, dass $f \in \mathcal{K}$. Es ist klar, dass $f(D) \subset \overline{\mathbb{D}}$
f ist aber nicht konstant ($|f'(a)| = M > 0$) also $f(D)$ ist offen und folglich $f(D) \subset \mathbb{D}$. Nach dem Satz von Hurwitz II (3.2.9) ist f injektiv.

(3) Wir zeigen, dass $f(D) = \mathbb{D}$ und f biholomorph ist.
f injektiv $\Rightarrow$ $\Omega = f(D) \subset \mathbb{D}$ offen und $f: D \to \Omega$ biholomorph.
Insbesondere ist Ω einfach zshg.
Angenommen $\Omega \neq \mathbb{D}$. Wir benutzen dann das folgende

<u>Lemma</u> Sei $\Omega \subset \mathbb{D}$ einfach zshg und $0 \in \Omega$, $\Omega \neq \mathbb{D}$.
Dann gibt es $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ injektiv mit $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$, $g(0) = 0$, $|g'(0)| > 1$.

Betrachte dann $g \circ f \in \mathcal{K}$; es ist $|(g \circ f)'(a)| = |g'(0)| \cdot |f'(a)| > |f'(a)|$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von f.

<u>Beweis des Lemmas</u> Sei $b \in \mathbb{D} \setminus \Omega$. Betrachte die Möbiustransformation $\varphi_b: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\varphi_b(z) = \frac{z-b}{\bar{b}z - 1}$.
$\varphi_b(z) \neq 0$ für $z \in \Omega$. Sei $h: \Omega \to \mathbb{C}$, $h^2(z) = \varphi_b(z)$, $z \in \Omega$.

Es ist klar, dass $h(\Omega) \subset \mathbb{D}$ und man zeigt wie im (1), dass h injektiv ist. Setze

$$c = h(0)\ , \quad g = \varphi_c \circ h \in \mathcal{O}(\Omega)$$

g ist injektiv und $g(0) = \varphi_c(h(0)) = \varphi_c(c) = 0$.

Wegen $h^2 = \varphi_b \Rightarrow 2h(0)h'(0) = \varphi_b'(0)\ ,\ c^2 = h(0)^2 = \varphi_b(0) = -b$.

Also
$$g'(0) = \varphi_c'(c)\cdot h'(0) = \varphi_c'(c)\cdot \frac{\varphi_b'(0)}{2c} = \frac{(1-|c|^2)^{-1}(1-|b|^2)}{2c}$$
$$= \frac{(1-|c|^2)^{-1}(1-|c|^2)(1+|c|^2)}{2c} = \frac{1+|c|^2}{2c}$$

und $|g'(0)| > 1$, wegen $|c| \neq 1$. ▨

<u>4.3.2 Folgerung</u> Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist homöomorph mit der Einheitskreisscheibe.

<u>Beweis</u> Ist $D = \mathbb{C}$, so ist $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, $\varphi(z) = \frac{z}{1+|z|}$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{D}$.

Ist $D \neq \mathbb{C}$ so gibt es sogar eine biholomorphe Abbildung $f : D \to \mathbb{D}$ (nach 4.3.1). ▨