23. Vorlesung, 16.07.2009

# 5. Harmonische Funktionen

## § 5.1. Harmonische Funktionen

5.1.1. Def. Eine harmonische Fkt auf einen offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Fkt $f \in \mathcal{C}^2(D)$ die die DGl erfüllt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) = 0 \quad , \qquad x \in D.$$

Der Operator $\Delta : \mathcal{C}^2(D) \to \mathcal{C}^0(D)$, $\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ heißt Laplace-Operator.

Wenn $n=2$ es gibt eine einfache Beziehung zwischen holomorphe und harmonische Funktionen.
Eine harmonische Fkt in $D \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ erfüllt die DGl

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Sei $\mathcal{H}(D)$ der Raum der harmonischen Fkt in $D$ und $\mathcal{H}(D,\mathbb{R})$ der Raum der reell-wertigen harmonischen Fkt.

5.1.2 Satz Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist $\mathcal{H}(D)$ ein $\mathbb{C}$-VR.
$f \in \mathcal{H}(D) \Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{H}(D,\mathbb{R})$

Beweis $\Delta$ ist ein linearer Operator, d.h. $\Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta f + \beta \Delta g$. Außerdem $\Delta$ ist ein reeller Operator, d.h. $\Delta u$ ist reell, wenn $u$ reell ist. Also
$\operatorname{Re}(\Delta f) = \Delta(\operatorname{Re} f)$, $\operatorname{Im}(\Delta f) = \Delta(\operatorname{Im} f)$. ∎

Sei $f \in \mathcal{C}^2(D)$. Dann gilt

$$4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f$$

wegen $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ (Schwarz-Lemma)

**5.1.3 Satz** Sei $D\subset\mathbb{C}$ offen, $f\in\mathcal{O}(D)$. Dann sind $f$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ harmonisch. Ist $D$ einfach zusammenhängend so ist jede reelle harmonische Fkt $u\in\mathcal{H}(D,\mathbb{R})$ der Realteil einer holomorphen Fkt $f\in\mathcal{O}(D)$.

Beweis $f\in\mathcal{O}(D)\Rightarrow f\in\mathcal{C}^\infty(D)$ und $\frac{\partial f}{\partial\bar z}=0$ also
$\Delta f=4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial\bar z}\right)=0$, $\Delta(\operatorname{Re}f)=\operatorname{Re}(\Delta f)=0$, $\Delta(\operatorname{Im}f)=0$.

Vorbemerkung: ist $u\in\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ so gilt $\frac{\partial u}{\partial\bar z}=\overline{\frac{\partial u}{\partial z}}$

Ist $f=u+iv\in\mathcal{O}(D)$, wobei $u=\operatorname{Re}f$, $v=\operatorname{Im}f$ so gilt

$$0=\frac{\partial f}{\partial\bar z}=\frac{\partial u}{\partial\bar z}+i\frac{\partial v}{\partial\bar z},\quad f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}+i\frac{\partial v}{\partial z}$$

Konjugieren wir die erste Gl. folgt $\frac{\partial u}{\partial z}-i\frac{\partial v}{\partial z}=0$ also
$f'(z)=2\frac{\partial u}{\partial z}$

Betrachte nun $u\in\mathcal{H}(D,\mathbb{R})$, also $0=\Delta u=4\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$
d.h. $\frac{\partial u}{\partial z}\in\mathcal{O}(D)$. Weil $D$ einfach zusammenhängend ist, besitzt $2\frac{\partial u}{\partial z}$ eine Stammfkt $f\in\mathcal{O}(D)$. Sei $f=u_1+iv_1$
Dann gilt $2\frac{\partial u_1}{\partial z}=f'=2\frac{\partial u}{\partial z}$ also $\frac{\partial(u-u_1)}{\partial z}=0$
$u-u_1$ reell $\Rightarrow\frac{\partial(u-u_1)}{\partial x}=\frac{\partial(u-u_1)}{\partial y}=0$ also $d(u-u_1)=0$
Weil $D$ ein Gebiet ist, gibt es $C\in\mathbb{R}$ mit $u=u_1+C$
Also ist $u=\operatorname{Re}(f+C)$, wobei $f+C\in\mathcal{O}(D)$. ∎

Ist $u\in\mathcal{H}(D,\mathbb{R})$ und $f\in\mathcal{O}(D)$ mit $u=\operatorname{Re}f$, so heißt $v=\operatorname{Im}f$ die harmonisch Konjugierte von $u$.
$f$ und $v$ sind bis auf einer additiven Konstante eindeutig bestimmt.

5.1.4 Bsp Die Fkt $\mathbb{C}^* \ni z \to \log|z|$ ist harmonisch auf $\mathbb{C}^*$ es gibt aber keine holomorphe Fkt $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$ mit $\operatorname{Re} f = \log|z|$. Eine solche Fkt wäre auf $\mathbb{C}_-$ gleich $\log z + C$, sie könnte also nicht stetig in $\mathbb{C}^*$ sein.
Man kann zeigen, dass $u \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$, $\exists c \in \mathbb{R}$ mit $u(z) = \operatorname{Re} f(z) + c \log|z|$.

5.1.5 Folgerung Sei $u \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$. Dann gilt: $u \in \mathcal{H}(D, \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow \forall B_r(z) \subset D \; \exists f \in \mathcal{O}(B_r(z)) \; \operatorname{Re} f = u|_{B_r(z)}$.

5.1.6 Satz Ist $u \in \mathcal{H}(D)$ so ist $u$ $\mathbb{R}$-analytisch: für alle $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ gibt es eine Umgebung $U \subset D$ von $z_0$, so dass

$$f(x+iy) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} (x-x_0)^j (y-y_0)^k \;, x+iy \in U.$$

5.1.7 Satz (Mittelwerteigenschaft)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{H}(D)$. Ist $\overline{B_r(z_0)} \subset D$, so gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(a)} f(x+iy)\, dx\, dy$$

Beweis O.B.d.A $f$ reell (wegen Linearität).
Sei $s > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset B_s(z_0) \subset D$. Es gibt $F \in \mathcal{O}(B_s(z_0))$ mit $\operatorname{Re} F = f$. Weil $F$ die Mittelwerteigenschaft hat (2.6.1) hat auch $f$ diese Eigenschaft. ▨

5.1.8 Satz (Maximumprinzip für harmonische Fkt.)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Hat $f \in \mathcal{H}(D, \mathbb{R})$ ein lokales Extremum in $z_0 \in D$, so ist $f$ konstant.
Beweis Ist $f \in \mathcal{H}(D, \mathbb{R})$, so ist $-f \in \mathcal{H}(D, \mathbb{R})$. Es reicht also die Maximum-Eigenschaft zu untersuchen.
Weil $f$ die Mittelwerteigenschaft hat, folgt die Aussage aus dem Satz 2.6.2. ▨