Funktionentheorie

Sommersemester 2013

George Marinescu

Einleitung

Die Funktionentheorie ist die Theorie der komplex-differenzierbaren Funktionen, die eine offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ abbilden. Wenngleich die Definition der Differenzierbarkeit für eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ wörtlich dieselbe wie für reelle Funktionen auf einem Intervall ist, gibt es dramatische Unterschiede in der Theorie solcher Funktionen. Zum Beispiel:

- Ist $f : U \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar, so ist f beliebig oft differenzierbar und *analytisch*, d.h. die Taylor-Reihe von f stellt f in einer Umgebung des Entwicklungspunktes dar.
- Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar und beschränkt, so ist f konstant (Satz von Liouville).
- Sind $f_n : U \to \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar und konvergiert (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen eine Funktion f, so ist f komplex-differenzierbar (Satz von Weierstrass).

Die Analoga dieser Aussagen sind im Reellen allesamt falsch!

Ziel der Vorlesung ist es, mit möglichst minimalem Begriffsaufwand rasch zu den zentralen Sätzen der Funktionentheorie vorzustoßen, z.B. Cauchyscher Integralsatz mit Folgerungen (wie etwa Potenzreihenentwicklungssatz), Abbildungseigenschaften analytischer Funktionen (wie z.B. Satz von der Gebietstreue), isolierte Singularitïäten, Residuensatz mit Anwendungen. Vorausgesetzt werden gute Kenntnisse der Anfängervorlesung.

Anwendungen der Funktionentheorie liegen in der Zahlentheorie (Primzahlsatz), den partiellen Differentialgleichungen (harmonische Funktionen, Laplace Operator), der algebraischen Topologie (Homotopie, Homologie), in der algebraischen und komplexen Geometrie (Riemannsche Flächen) sowie Physik (Quantenmechanik, String-Theorie), Strömungslehre, Elektrotechnik usw.

Danksagung

Mein Dank gilt Frau Eisele, die das Skipt getecht hat und Matjaz Erat, der Korrektur gelesen hat.