1. Vorlesung, 09.04.2013

1. Komplexe Zahlen und Funktionen

1.1. Der Körper der komplexen Zahlen.

Die komplexe Ebene und die Riemannsche Zahlenkugel bilden den Grundbereich der Funktionentheorie; dort sind ihre Objekte, die analytischen Funktionen, definiert und dort haben sie ihre Werte.

Auf $\mathbb{R}^2$ führen wir eine Addition und Multiplikation wie folgt ein:

$$\begin{aligned}(x,y)+(u,v) &:= (x+u, y+v) \\ (x,y)\cdot(u,v) &:= (xu-yv, xv+yu)\,.\end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1.1. **Satz.** $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ *ist ein kommutativer Körper mit Nullelement* $(0,0)$ *und Einselement* $(1,0)$*. Dieser Körper heißt* ***Körper der komplexen Zahlen****, bezeichnet mit* $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2,+,\cdot)$.

Das Inverse von $z=(x,y)\neq 0$ ist

$$z^{-1} := \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big)$$

Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x)=(x,0)$ hat die Eigenschaften

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y) \quad , \quad \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y) \quad , \quad \varphi(1)=(1,0)\ ,$$

d.h. φ ist ein Körper-Homomorphismus.

Die komplexen Zahlen $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ bilden einen Körper mit der induzierten Addition und Multiplikation (1.1). Wir sagen, dass $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ ein *Unterkörper* von $\mathbb{C}$ ist. Der Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ ist bijektiv, d.h. ein Isomorphismus. Wir *identifizieren* deshalb $\mathbb{R}$ mit $\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$ und sagen, dass $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Wir schreiben für $(x,0)$ kurz x, also 0 für $(0,0)$, 1 für $(1,0)$, usw.

1.1.2. **Definition.** Die (nicht-reelle) Zahl $i=(0,1)$ heißt ***imaginäre Einheit*** . Es gilt

$$i^2=(0,1)(0,1)=(0^2-1^2, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1.$$

Für $z=(x,y)$ schreiben wir nun

$$z=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)\cdot(y,0)=x+iy.$$

Dann heißt x ***Realteil*** von z, und y heißt ***Imaginärteil*** von z, geschrieben $\operatorname{Re} z := x$, $\operatorname{Im} z := y$. Man beachte, dass der Imaginärteil y reell ist. Zahlen der Form iy mit $y\in\mathbb{R}$ heißen auch (rein) imaginär.

1.1.3. **Definition.** Die ***konjugierte Zahl*** zu $z=x+iy$ ist $\overline{z} := x-iy$.

1.1.4. **Satz** (Rechenregeln)**.** *Für alle* $z,w\in\mathbb{C}$ *gilt:*

(i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(ii) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.
(iii) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, $z = -\overline{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.
(iv) $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geqslant 0$ *für* $z = x + iy$.
(v) $\overline{\overline{z}} = z$.

1.1.5. **Definition.** Für $z \in \mathbb{C}$ heißt $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ der ***Betrag*** von z. Für $z \in \mathbb{R}$ ist $|z| = \sqrt{z^2}$ der übliche Betrag von reellen Zahlen.

1.1.6. **Satz** (Rechenregeln für den Betrag)**.** *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt:*

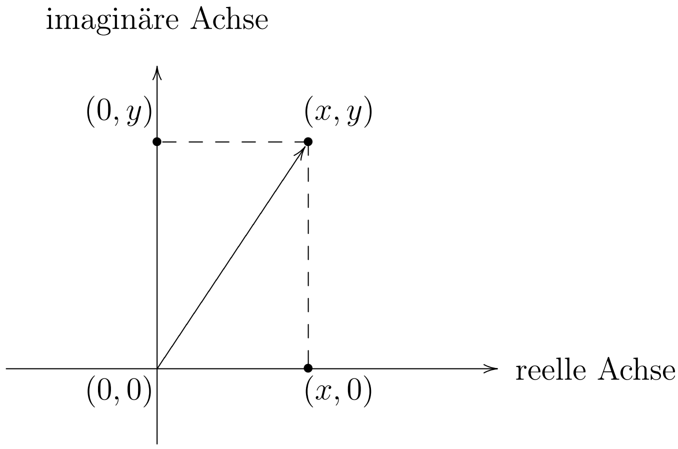
(i) $|z| \geqslant 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
(ii) *Ist* $z \neq 0$, *so gilt* $z^{-1} = \overline{z}/|z|^2$.
(iii) $|\overline{z}| = |z|$.
(iv) $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$.
(v) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
(vi) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (***Dreiecksungleichung***).
Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $z = 0$ (*bzw.* $w = 0$) *oder* $w/z \in \mathbb{R}_+$ (*bzw.* $z/w \in \mathbb{R}_+$).
(vii) $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|$ (***umgekehrte Dreiecksungleichung***).

Beweis: Zu (vi): Ist $z + w = 0$, so ist die Aussage klar, Ist $z + w \neq 0$ so gilt:

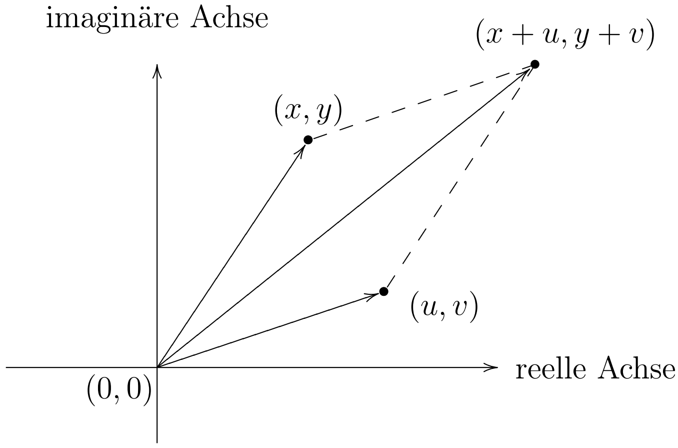
$$\frac{|z| + |w|}{|z + w|} = \left|\frac{z}{z+w}\right| + \left|\frac{w}{z+w}\right| \overset{(iv)}{\geqslant} \operatorname{Re}\frac{z}{z+w} + \operatorname{Re}\frac{w}{z+w} = \operatorname{Re}\frac{z+w}{z+w} = 1\,.$$

□

1.1.7. **Geometrische Deutung der komplexen Zahlen.** Wir veranschaulichen uns seit Gauß die komplexen Zahlen geometrisch als Punkte in einer Ebene mit rechtwinkligen Koordinaten, genannt ***Gaußsche Zahlenbene*** (oder als Vektoren mit Ursprung im Nullpunkt $(0, 0)$ und Endpunkt in (x, y)).



Die Addition komplexer Zahlen ist dann die übliche Vektoraddition nach der Parallelogrammregel.



$|z|$ ist der Euklidische Abstand des Punktes $z = (x, y)$ zum Ursprung.
$\overline{z}$ ist die Spiegelung des Punktes $z = (x, y)$ an der reellen Achse.

Die Ungleichung $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ ist genau die Dreiecksungleichung aus der Geometrie: Im Dreieck ist die Summe der Längen zweier Seiten stets mindestens so groß wie die Länge der dritten Seite.

1.1.8. **Topologie von $\mathbb{C}$.** Als bekannt vorausgesetzt werden die metrischen und topologischen Grundbegriffe (Metrik, Norm, Cauchy-Folge, offen, abgeschlossen, kompakt, zusammenhängend, Rand, innerer Punkt, Häufungspunkt usw.) sowie die Begriffe Grenzwert, Stetigkeit usw., die ausführlich in der Vorlesung Analysis I behandelt worden sind.

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein normierter Raum. Auf $\mathbb{C}$ betrachten wir stets die von der Norm $|\cdot|$ induzierte Topologie. Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichnen wir mit $B_r(a)$ die offene Kreisscheibe mit dem Radius r und dem Mittelpunkt a:

$$B_r(a) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a| < r \right\}.$$

Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt offen, falls zu jedem $z \in U$ ein $r > 0$ exitiert, so dass $B_r(a) \subset U$.

$(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein Banachraum, d.h. jede Cauchy-Folge bzgl. $|\cdot|$ konvergiert.