2. Vorlesung, 11.04.2013

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn X die *Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft* hat, d.h. wenn aus jeder offenen Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von X endlich viele $i_1,\dots,i_k$ ausgewählt werden können so, dass schon $X=\bigcup_{r=1}^k V_{i_r}$. Die Familie $(V_{i_1},\dots,V_{i_k})$ heißt Teilüberdeckung, und die Heine-Borel-Überdeckungseigenschaft kann auch so formuliert werden: Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung[1].

In $\mathbb{C}$ gelten die Sätze von Bolzano-Weierstrass und Heine-Borel.

1.1.9. **Satz** (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$)**.** *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt einen Häufungswert.*

1.1.10. **Satz** (Heine-Borel)**.** *Sei $K\subset\mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(i) K ist kompakt, d.h. jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
(ii) K ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in K hat eine in K konvergente Teilfolge.
(iii) K ist abgeschlossen und beschränkt.

1.1.11. **Satz** (Satz vom Maximum und Minimum (Weierstrass))**.** *Sei $K\subset\mathbb{C}$ eine nichtleere kompakte Menge. Dann ist jede stetige Funktion $f:K\to\mathbb{C}$ beschränkt und ihr Absolutbetrag nimmt ihr Maximum und sein Minimum an, d. h. es gibt $\zeta_1,\zeta_2\in K$ mit $|f(\zeta_1)|\leqslant|f(z)|\leqslant|f(\zeta_1)|$ für alle $z\in K$.*

Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung von X in zwei nichtleere disjunkte offene Teilmengen U,V gibt.
Folgende Aussagen sind äquivalent:
(i) X ist zusammenhängend.
(ii) Ist $U\in X$ nichtleer, offen und abgeschlossen, so gilt $U=X$.
(iii) Jede lokal-konstante Funktion auf X ist konstant.
(iv) Jede stetige Funktion von X nach $\{0,1\}$ ist konstant.

Sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $\gamma:[a,b]\longrightarrow X$ heißt *Weg*. Der Punkt $\gamma(a)$ heißt *Anfagspunkt* und der Punkt $\gamma(b)$ heißt *Endpunkt* von γ. Wir sagen auch, dass γ *verbindet* $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$.

Ein topologischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte durch einen Weg verbunden werden können.

1.1.12. **Satz.** *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist zusammenhängend.*

Die Umkehrung ist falsch (siehe Übungsblätter).

[1] „Teil“ heißt nicht, dass nur ein Teil von X überdeckt wird, sondern dass man nur eine Teilmenge der Indizes benutzt.

Sei nun X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend), falls A versehen mit der Teilraumtopologie zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend) ist. Wir interessieren uns in der Funktionentheorie für Teilmengen von $\mathbb{C}$. Auf einer Teilmenge von $\mathbb{C}$ betrachte wir stets die Teilraumtopologie induziert durch die standard Topologie von $\mathbb{C}$. Somit können wir über zusammenhängende (bzw. wegzusammenhängende) Teilmengen von $\mathbb{C}$ reden. Eine offene und zusammenhängende Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ heißt ***Gebiet***.

Für $z, w \in \mathbb{C}$ heißt $[z, w] = \{(1-t)z+tw : t \in [0, 1]\}$ die *Strecke* von z nach w. Eine Menge $A \in \mathbb{C}$ heißt ***konvex***, falls für alle $z, w \in A$ gilt $[z, w] \in A$. Eine Menge $A \in \mathbb{C}$ heißt ***sternförmig***, falls es ein $z \in A$ gibt, so dass für alle $w \in A$ gilt $[z, w] \in A$. Jede konvexe Menge ist sternförmig, jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend (also zusammenhängend). Kreisscheiben und Halbebenen sind konvex (insbesondere die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$). Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, wobei $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, ist nicht konvex aber sternförmig.

1.1.13. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
(i) D ist zusammenhängend (d. h. D ist ein Gebiet).
(ii) D ist wegzusammenhängend.
(iii) Für jede $x, y \in D$ gibt es einen Streckenzug $[x_0, x_1]\cup[x_1, x_2]\cup\ldots\cup[x_{k-1}, x_k] \subset D$ wobei $x_0 = x$ und $x_k = y$.

1.1.14. **Definition** (Wegekomponente)**.** Sei X ein topologischer Raum. Zwei Punkten x, y heißen *wege-äquivalent*, falls sie durch einen Weg verbunden werden können. Dies ist eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen heißen ***Wegekomponenten*** von X. Der Raum X ist disjunkte Vereinigung seiner Wegekomponenten.

1.1.15. **Satz.**
(i) Die Wegekomponenten einer offenen Menge in $\mathbb{C}$ sind offen (also Gebiete).
(ii) Eine offene Menge in $\mathbb{C}$ hat höchstens abzählbar viele Wegekomponenten.

1.1.16. **Bemerkung.** Sei X ein topologischer Raum. Die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen A von X, die $x \in X$ enthalten, heißt ***Zusammenhangskomponente*** $X(x)$ von x. Die Wegekomponenten einer offenen Menge in $\mathbb{C}$ sind offen und stimmen mit den Zusammenhangskomponenten überein. Deshalb sprechen wir auch kurz einfach von ***Komponenten***.

1.2. **Riemannsche Sphäre.**

Wir ergänzen $\mathbb{C}$ durch ein (ideales) Element $\infty \notin \mathbb{C}$ und setzten $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\widehat{\mathbb{C}}$ heißt die ***erweiterte Zahlenebene***.

Wir führen eine Topologie auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ein: $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ heißt offen genau dann, wenn $U \cap \mathbb{C}$ offen ist und falls $\infty \in U$, gibt es $M > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \subset U$. Eine Menge

$U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \in U$ ist offen genau dann, wenn $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ kompakt in $\mathbb{C}$ ist. Für eine Folge (z_n) in $\widehat{\mathbb{C}}$ gilt $z_n \to \infty$, $n \to \infty$, genau dann, wenn $|z_n| \to \infty$, $n \to \infty$.

Setze $S^2 = \{(w,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3 : |w|^2 + t^2 = 1\}$. Mit Hilfe der stereographischen Projektion definiere

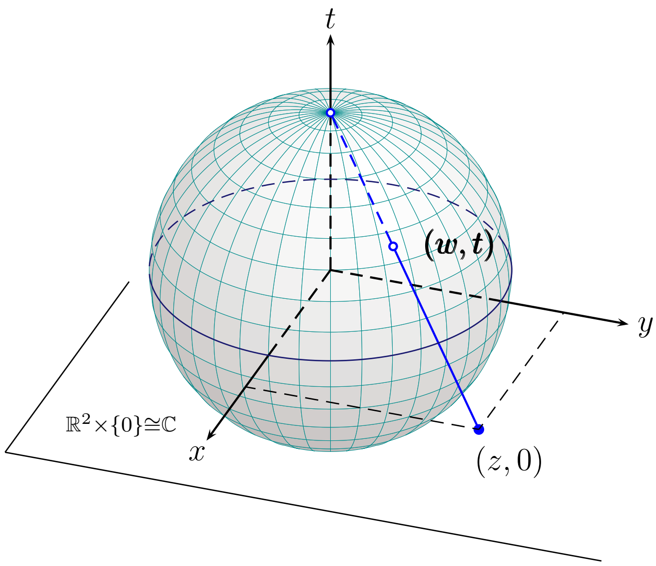
$$\sigma : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}\,, \quad \sigma(w,t) = \begin{cases} \dfrac{w}{1-t}\,, & (w,t) \neq (0,1) \\ \infty\,, & (w,t) = (0,1) =: N \end{cases}$$

(Man setzt die stereographische Projektion fort zu einer Bijektion von S^2 auf $\widehat{\mathbb{C}}$ durch $\sigma(N) = \infty$.) Die Umkehrung ist gegeben durch

$$\sigma^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \to S^2,, \quad \sigma^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{2z}{1+|z|^2}\,, \dfrac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right), & z \neq \infty \\ N\,, & z = \infty \end{cases}$$

1.2.1. **Satz.** *σ ist ein Homöomorphismus.*

Deshalb betrachten wir S^2 als ein Modell für $\widehat{\mathbb{C}}$ und nennen $\widehat{\mathbb{C}}$ auch ***Riemannsche Sphäre***.



Erweiterung der algebraischen Operationen:

$$\begin{aligned} & a \cdot \infty = \frac{a}{0} = \infty\,, \quad \text{für } a \neq 0 \\ & a \pm \infty = \infty\,, \quad \frac{a}{\infty} = 0\,, \quad \text{für } a \neq \infty \\ & \infty + \infty = \infty \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nicht definiert sind $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

1.3. **Potenzreihen, Exponentialfunktion, Logarithmus.**

1.3.1. **Definition.** Eine Funktionenreihe $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ heißt ***Potenzreihe*** mit Koeffizienten a_n und Entwicklungspunkt z_0. Der ***Konvergenzradius*** der Reihe ist

$$R := \sup\big\{t \in [0,\infty) : (|a_n|t^n) \text{ beschränkt}\big\} \in [0,\infty]\,.$$

Wir verabreden, dass $B_R(z_0) := \mathbb{C}$, falls $R = \infty$.

1.3.2. **Satz.**
(a) *Die Reihe ist in der Kreisscheibe $B_R(z_0)$ absolut konvergent.*
(b) *Die Reihe ist in jeder Kreisscheibe $B_\rho(z_0)$ mit $\rho < R$ normal (also auch gleichmäßig) konvergent.*
(c) *Die Reihe ist für $|z| > R$ divergent.*

$B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ heißt ***Konvergenzbereich*** der Potenzreihe. Die Potenzreihe definiert eine Funktion $P : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz in allen $B_\rho(z_0)$ mit $\rho < R$ ist P stetig.
Für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ wird die *Supremumsnorm* durch

$$\|f\|_D := \sup\big\{|f(z)| : z \in D\big\} \in [0,\infty]\,.$$

eingeführt. Eine Reihe $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ von Funktionen $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *normal konvergent*, falls $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_D$ konvergiert. Konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ normal, so konvergiert sie auch gleichmäßig. Konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ gleichmäßig und sind f_n stetig in D, so ist auc die Summe $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ der Reihe stetig in D,