3. Vorlesung, 16.04.2013

1.3.3. **Satz.** *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$. Dann gilt:*

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,, \qquad \text{(Cauchy-Hadamard–Formel)} \tag{1.3}$$

und

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{1.4}$$

falls der Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert.

1.3.4. **Definition.** Die ***Exponentialreihe*** ist die Potenzreihe

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Der Konvergenzradius ist nach (1.4) $R=\infty$, da $a_n = 1/n!$ und $|a_n/a_{n+1}| = n+1$. Die Exponentialreihe definiert also eine Funktion

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\,, \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}\,, \tag{1.5}$$

genannt ***Exponentialfunktion***.

Es gilt

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \qquad \text{(Eulersche Zahl).}$$

Mit Hilfe des Satzes vom Cauchy-Produkt (Analysis I, 3.3.6) erhalten wir die ***Funktionalgleichung*** (***Additionstheorem***) ***der Exponentialfunktion***:

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)\,, \quad z,w\in\mathbb{C}\,.} \tag{1.6}$$

Es ist klar, dass $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, für $z\in\mathbb{C}$, $\exp(z)\in\mathbb{R}$ für $z\in\mathbb{R}$, $|\exp(z)| = 1$, für $z\in i\mathbb{R}$, $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$, für $z\in\mathbb{C}$. Wegen $\exp(0)=1$, folgt aus (1.6), dass

$$\exp(-z) = \exp(z)^{-1} = \frac{1}{\exp(z)}\,, \quad z\in\mathbb{C}\,. \tag{1.7}$$

Die Gleichung (1.6) besagt, dass $\exp : (\mathbb{C},+) \to (\mathbb{C}^*,\cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Aus (1.6), (1.7) ergibt sich leicht, dass $\exp(r) = e^r$ für alle $r\in\mathbb{Q}$. Die Exponentialfunktion stimmt für rationale Zahlen mit Potenzen von e überein. Dies motiviert die folgende Definition.

1.3.5. **Definition.** Für $z\in\mathbb{C}$ sind die komplexen Potenzen von e definiert als

$$\boxed{e^z := \exp(z)}\,.$$

Damit wird die Funktionalgleichung zur ***Potenzregel***:

$$e^{z+w} = e^z\, e^w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{1.8}$$

Wir verwenden beide Schreibweisen, e^z und $\exp(z)$.

Die trigonometrischen Funktionen wurden in der Vorlesung Analysis I ausführlich untersucht. Sie sind Abkömmlinge der Exponentialfunktion, die Mutter vieler interessanter Funktionen. Ihre Eigenschaften setzen wir als bekannt voraus.

1.3.6. **Definition** (Euler)**.** Sei $z \in \mathbb{C}$. Definiere

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})\,, \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\,,$$
$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})\,, \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})\,.$$

Es folgt (durch Einsetzen der Potenzreihen-Darstellung von e^{iz} und e^{-iz})

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, z^{2n+1} \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n}$$

Alle diese Reihen haben Konvergenzradius ∞, da die Exponentialreihe Konvergenzradius ∞ hat.
Die Definition impliziert sofort

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z\,.$$

Dies ist i.A. nicht die Zerlegung in Real- und Imaginärteil von e^{iz}. Wenn aber $\varphi \in \mathbb{R}$, so gilt $\cos\varphi, \sin\varphi \in \mathbb{R}$ und wir erhalten die ***Eulersche Formel***:

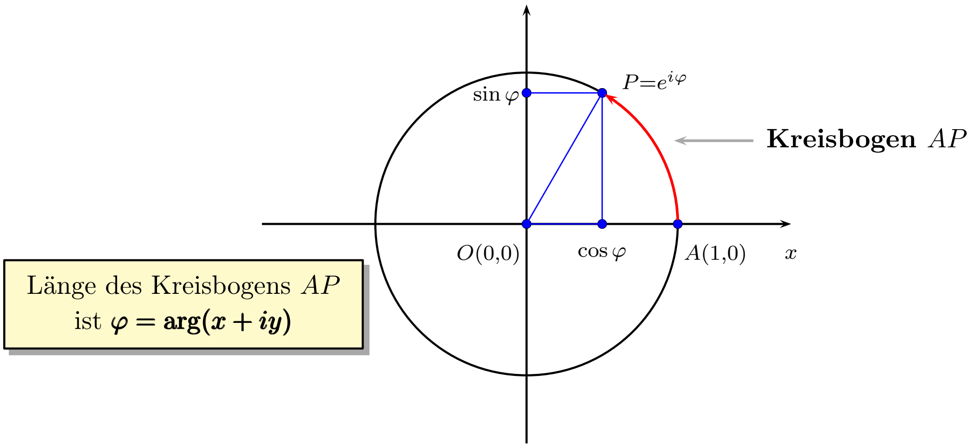
$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi\,, \qquad \text{wobei } \cos\varphi = \operatorname{Re} e^{i\varphi},\ \sin\varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}.} \tag{1.9}$$

Die Eulersche Formel ist eine der wichtigsten und schönsten der Mathematik. Sie scheint hier ein bisschen vom Himmel gefallen und ist eine leichte Folgerung der Definitionen. Um sie besser einzuschätzen, geben wir die geometrischen Definitionen von Sinus und Cosinus.

1.3.7. **Definition.** Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$. Definiere $(\cos_{geom}\varphi, \sin_{geom}\varphi)$ als die Koordinaten des Punktes P aus dem Einheitskreis, so dass die Bogenlänge des Kreisbogens AP (gemessen gegen den Uhrzeigersinn) gleich φ ist. Dann setze die Funktionen cos und sin auf $\mathbb{R}$ fort, als periodische Funktionen mit der Periode 2π.

Diese Definition entspricht auch der Definition von Cosinus und Sinus als Ankathete/Hypothenuse und Gegenkathete/Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck.

1.3.8. **Satz.** *Die Bogenlänge des Kreisbogens AP mit $P = e^{i\varphi}$ ist φ. Daher stimmen die geometrischen und analytischen (Eulerschen) Definitionen von* cos *und* sin *überein.*



Beweis: Im nächsten Satz sehen wir, dass der Kreisbogen AP durch $c : [0,\varphi] \to \mathbb{C}$, $c(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ parametrisiert werden kann. Dessen Bogenlänge ist

$$\int_0^{\varphi} |c'(t)|\, dt = \varphi\,.$$

da $c'(t) = ie^{it}$. $\square$

So betrachtet bildet die Eulersche Formel eine Brücke zwischen den beiden Definitionen. Sie zeigt zum Beispiel, dass die geometrisch definierten trigonometrischen Funktionen analytisch sind.

1.3.9. **Satz** (Parametrisierung der Kreislinie)**.**
(i) *Die Abbildung $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $p(\varphi) = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ist ein Gruppenmorphismus der additiven Gruppe $(\mathbb{R},+)$ auf die multiplikative Gruppe $(S^1,\,\cdot\,)$ mit dem Kern $2\pi\mathbb{Z}$. Es gilt $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2}$ genau dann, wenn $\varphi_1 - \varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$.*
(ii) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall der Länge 2π. Dann ist $p|_I : I \longrightarrow S^1$ bijektiv und stetig. Ist $a \in I$ ein Endpunkt von I, so ist die Umkehrung $(p|_I)^{-1}$ stetig auf $S^1 \setminus \{p(a)\}$ und unstetig in $p(a)$.*

Beweis: Die Abbildung p ist ein Gruppenhomomorphismus wegen (1.6). Es ist $\ker p = \{\varphi : \cos\varphi = 1, \sin\varphi = 0\} = 2\pi\mathbb{Z}$. Sei $(x,y) \in S^1$, d. h. $x^2 + y^2 = 1$. Wir suchen $\varphi \in \mathbb{R}$, mit $\cos\varphi = x$, $\sin\varphi = y$. Die Abbildung $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ ist bijektiv und $x \in [-1,1]$, setze also $\varphi = \arccos x \in [0,\pi]$. Für $\varphi \in [0,\pi]$ ist $\sin\varphi$ nicht-negativ, also $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{y^2} = |y|$. Ist $y \geqslant 0$ so passt also die Lösung $\varphi = \arccos x$. Ist $y < 0$, so erfüllt $\varphi = -\arccos x \in (-\pi, 0)$ beide Gleichungen. So haben wir gezeigt, dass $p|_{(-\pi,\pi]} : (-\pi,\pi] \to S^1$ (also auch p)

surjektiv ist mit der Inverse

$$(p|_{(-\pi,\pi]})^{-1}(x+iy) = \begin{cases} \arccos(x)\,,\ y \geqslant 0\,, \\ \\ -\arccos(x)\,,\ y < 0\,. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist stetig auf $S^1 \setminus \{-1\}$ und unstetig in -1. □

1.3.10. **Definition.**

(a) Die Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $p(\varphi) = e^{i\varphi}$ heißt die ***Standardparametrisierung des Einheitskreises*** S^1.

(b) Für $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißt $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\varphi} = z/|z|$ ein ***Argument*** oder ein ***Wert des Arguments*** von z. Setze

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,, \quad \operatorname{Arg}(z) := \big\{\varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} = z/|z|\big\}\,.$$

$\operatorname{Arg}(z)$ heißt die ***Menge der Argumente*** von z. Die einzige Zahl $\arg(z)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\operatorname{Arg}(z) \cap (-\pi,\pi] = \{\arg(z)\}$$

heißt ***das Argument*** oder ***Hauptwert des Arguments*** von z. Der Zahl $z = 0$ wird kein Argument zugeordnet.

(c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall der Länge 2π. Die Abbildung $\mathbb{C}^* \to I$, $z \mapsto (p|_I)^{-1}(z/|z|)$ heißt ein ***Zweig des Arguments***. Die Abbildung $\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow (-\pi,\pi]$, $z \mapsto \arg(z)$ heißt ***Hauptzweig des Arguments***.

Der Hauptzweig des Arguments ist so gewählt, dass $\operatorname{Im}\log(z) = \arg(z)$, wobei log der Hauptzweig des Logarithmus ist. Eine konkrete Formel für arg ist gegeben durch

$$\arg : \mathbb{C}^* \longrightarrow (-\pi,\pi]\,,\ \arg z = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right)\,,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\,, \\ \\ -\arccos\left(\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right)\,,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0\,, z \notin \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

Dabei ist $\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ die negative reelle Achse. Sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$ die entlang der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene. Dann ist arg stetig auf $\mathbb{C}_-$ und unstetig in allen Punkten von $\mathbb{R}_-$. Dort macht arg einen Sprung von 2π:

$$\lim_{\substack{z\to a \\ \operatorname{Im} z<0}} \arg(z) = \arg(a) = \pi\,, \quad \lim_{\substack{z\to a \\ \operatorname{Im} z<0}} \arg(z) = -\pi$$

1.3.11. **Satz.** *Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ hat die Form*

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \textit{mit } r = |z| \textit{ und } \varphi \in \operatorname{Arg}(z)\,. \tag{1.10}$$

$P : \mathbb{R}_+ \times (-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(r,\varphi) \mapsto re^{i\varphi}$ ist bijektiv und stetig. Die Umkehrabbildung $\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times (-\pi,\pi]$, $z \mapsto (|z|, \arg(z))$ ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ und unstetig in allen Punkten der negativen reellen Achse $\mathbb{R}_-$.

Die Form (1.10) heißt Polarkoordinatendarstellung von z und (r, φ) heißen die ***Polarkoordinaten*** von z. Die Abbildung P heißt ***Polarkoordinatenabbildung***.

Wir haben nun für $z \in \mathbb{C}^*$ zwei Koordinatensysteme: die kartesichen Koordinaten $(x, y) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ und die Polarkoordinaten $(r, \varphi) = (|z|, \arg(z))$. Für viele Probleme ist es vorteilhaft, die Polarkoordinaten zu benutzen.

Zum Beispiel ist die Multiplikation zweier in Polarkoordinaten $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |z|e^{i\psi}$ gegebener Zahlen besonders einfach: Es ist $zw = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}$. Die Multiplikationsregel für komplexe Zahlen lautet also: „Die Längen werden multipliziert, die Argumente werden addiert“. Daraus folgt die ***Moivresche Formel***:

$$\boxed{\big[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,.}$$

Eine komplexe Zahl z heißt n***-te Einheitswurzel*** ($n \in \mathbb{N}$), falls $z^n = 1$ gilt.

1.3.12. **Satz.** *Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln, nämlich*

$$\zeta_\nu = \cos\frac{2\pi\nu}{n} + i\sin\frac{2\pi\nu}{n}\,, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n-1$$

Sie liegen regelmäßig verteilt auf der Einheitskreislinie $|z| = 1$ im Winkelabstand $2\pi/n$.