4. Vorlesung, 18.04.2013

Sei $w \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung $z^n = w$ hat genau n Lösungen, genannt n-ten Wurzeln (oder Werte der n-ten Wurzel) aus w, nämlich

$$z_\nu = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\varphi + 2\pi\nu}{n}}, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n-1,$$

wobei $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$.

1.3.13. **Satz.** *Die Exponentialabbildung* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *ist eine surjektive und periodische Abbildung mit Periode* $2\pi i$. *Für* $z \in \mathbb{C}^*$ *gilt* $\exp^{-1}(z) = \log|z| + i \operatorname{Arg}(z) =: \operatorname{Log}(z)$. *Die Einschränkung* $\exp : \{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\} \to \mathbb{C}^*$ *ist stetig und bijektiv. Deren Umkehrung, gegeben durch*

$$\log : \mathbb{C}^* \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z \leqslant \pi\}, \quad z \mapsto \log|z| + i \arg z,$$

ist stetig auf $\mathbb{C}_-$ *und unstetig auf* $\mathbb{R}_-$. *Für alle reellen Zahlen* $a \in \mathbb{R}_-$ *gilt*

$$\lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z > 0}} \log(z) = \log(a) = \log|a| + i\pi, \quad \lim_{\substack{z \to a \\ \operatorname{Im} z < 0}} \log(z) = \log|a| - i\pi,$$

d.h. log *macht beim Überqueren der negativen reellen Achse einen „Sprung von* $2\pi i$*“.*

1.3.14. **Definition.**
(a) Sei $z \in \mathbb{C}^*$. Eine Zahl $w \in \exp^{-1}(z)$ (d.h. eine Zahl, die die Gleichung $e^w = z$ erfüllt) heißt ***ein Logarithmus*** (oder ***Wert des Logarithmus***) von z. Die Zahl $\log(w)$ ist ein Logarithmus von z und heißt ***Hauptwert des Logarithmus*** von z.
(b) Eine stetige Funktion $l : G \to \mathbb{C}$ in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^*$ heißt ***Logarithmusfunktion*** oder ***Zweig des Logarithmus*** in G, wenn gilt $e^{l(z)} = z$ für alle $z \in G$, d.h. wenn l eine stetige Umkehrung von exp ist. Die soeben eingeführte lokale Umkehrung

$$\log : \mathbb{C}_- \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

ist stetig und heißt ***Hauptzweig des Logarithmus***. Sie ist eine komplexe Fortsetzung des gewöhnlichen reellen (natürlichen) Logarithmus $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

1.3.15. **Bemerkung.** Aus Sicht der reellen Analysis ist die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ein lokaler $\mathscr{C}^\infty$ Diffeomeorphismus und sogar eine Überlagerung. Die Abbildung $\log : \mathbb{C}_- \to \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ist eine $\mathscr{C}^\infty$ lokale Umkehrung von exp.

2. Holomorphe Funktionen

2.1. Definition und erste Eigenschaften.

2.1.1. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***komplex differenzierbar*** in $z_0 \in D$, wenn

$$f'(z_0) := \frac{df}{dz}(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{in } \mathbb{C} \text{ existiert.} \tag{2.1}$$

Diese Zahl heißt dann die (komplexe) ***Ableitung*** von f in z_0. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt ***holomorph*** in D, falls f komplex differenzierbar in allen Punkten $z \in D$ ist; f heißt ***holomorph in*** $z_0 \in D$, wenn f holomorph in einer offenen Umgebung von z_0 ist.

Diese Definition erhalten wir durch Übertragung der Definition der Differenzierbarkeit in einer reellen Veränderlichen. Auf gleiche Weise wie in der reellen Analysis zeigt man:

2.1.2. **Lemma.** *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*
(i) f ist komplex differenzierbar in z_0
(ii) Es gibt $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\rho : D \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{z \to z_0} \frac{\rho(z)}{z-z_0} = 0$ und

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + \rho(z)$$

(iii) Es gibt $L \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ mit $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + o(|z - z_0|)$, $z \to z_0$.
In diesem Falle gilt $f'(z_0) = \lambda$ und $L(v) = f'(z_0) \cdot v$ für $v \in \mathbb{C}$.

Dabei bezeichnet $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ den Raum der $\mathbb{C}$–linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.

Sei nun $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, wobei $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$. Wir identifizieren f mit einer Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto ((x, y), v(x, y))$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \supset D \arrow[r, "z \longmapsto f(z)"] \arrow[d, "z \mapsto (x,y)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "z \mapsto (x,y)"] \\
\mathbb{R}^2 \supset D \arrow[r, "(x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Die Funktion f heißt reell-differenzierbar, wenn $L \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ existiert mit $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + o(|z - z_0|)$, $z \to z_0$. Die Abbildung L ist das Differential von f in z_0 und wird bezeichnet mit $L = df(z_0)$. Ist f reell-differenzierbar in z_0, so existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\,,$$

und

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,dy\,.$$

Dabei sind

$$dx\,, dy : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \qquad dx(z) = dx(x + iy) = x\,, \quad dy(z) = dy(x + iy) = y\,.$$

2.1.3. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) f ist komplex-differenzierbar in z_0,
(ii) f ist reell-differenzierbar in z_0 und $df(z_0)$ ist $\mathbb{C}$-linear,

*(iii) f ist reell-differenzierbar in z_0 und erfüllt zusätzlich die **Cauchy-Riemann-Gleichungen**:*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0} \tag{2.2}$$

d.h.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}} \tag{2.3}$$

In diesem Falle gilt

$$\boxed{df(z_0)(v) = f'(z_0)\cdot v\,, \quad \text{für } v \in \mathbb{C}.} \tag{2.4}$$

Beweis: (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) ist klar, da $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.
Zu (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii): $df(z_0) \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ mit $df(z_0)(z) = \lambda\cdot z \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$df(z_0)\cdot 1 = \lambda\,, \quad df(z_0)\cdot i = i\lambda\,.$$

d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "z\mapsto\lambda\cdot z"] \arrow[d, "z\mapsto(x,y)"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "z\mapsto(x,y)"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "df(z_0)"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Wir wissen aus Analysis II, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)\cdot e_1$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0)\cdot e_2$, wobei $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$. Durch den Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x+iy$ werden e_1 und e_2 auf 1 und i abgebildet. Es folgt

$$df(z_0)\cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,, \quad df(z_0)\cdot i = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,.$$

Also $df(z_0) \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \Longleftrightarrow$ (2.2). Wenn wir Realteil und Imaginärteil von (2.2) betrachten, erhalten wir (2.3). $\square$

Ist $f'(z_0) \neq 0$ so ist die lineare Abbildung $df(z_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine *Ähnlichkeitstransformation*: sie entspricht eine Streckung mit dem Faktor $|f'(z_0)|$ zusammengesetzt mit einer Rotation von Winkel $\arg f'(z_0)$.