

5. VORLESUNG, 23.04.2013

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ reell-diffbar in $z_0 \in D$. Das Differential von f in z_0 ist

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

wobei $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ der \mathbb{C} -Vektorraum der \mathbb{R} -linearen Abbildungen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} ist. $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ist 2-dimensional mit Basis $\{dx, dy\}$.

Betrachte die folgenden Unterräume:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) := \{\ell : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \ell \text{ } \mathbb{C}\text{-linear}\}$$

$$\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) := \{\ell : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \ell \text{ } \mathbb{C}\text{-antilinear}\}$$

(ℓ \mathbb{C} -antilinear $:\iff \ell$ \mathbb{R} -linear und $\ell(\lambda z) = \bar{\lambda}\ell(z)$ für $\lambda, z \in \mathbb{C}$)

Eine Basis in $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ist $\{dz\}$, $dz = dx + idy$, und eine Basis in $\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ist $\{d\bar{z}\}$, $d\bar{z} = dx - idy$. Es gilt

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \oplus \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) .$$

Zu $\ell \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $\ell = a dx + b dy$, gibt es eine eindeutig bestimmte Zerlegung $\ell = \ell_1 + \ell_2$ mit $\ell_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $\ell_2 \in \mathcal{L}_{\overline{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$:

Wegen

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dz + d\bar{z}}{2} \quad , \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ \ell &= a dx + b dy = a \frac{dz + d\bar{z}}{2} + b \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(a - ib)dz}_{=: \ell_1} + \underbrace{\frac{1}{2}(a + ib)d\bar{z}}_{=: \ell_2} . \end{aligned}$$

Für $\ell = df(z_0)$, $a = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ folgt die Zerlegung in \mathbb{C} -lineare und $\overline{\mathbb{C}}$ -antilineare Komponenten von $df(z_0)$:

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)d\bar{z} .$$

wobei

$$(2.5) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) , \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) .$$

Wir erhalten erneut:

f ist \mathbb{C} -differenzierbar in $z_0 \iff f$ ist \mathbb{R} -differenzierbar in z_0 & $df(z_0)$ ist \mathbb{C} -linear
 $\iff f$ ist \mathbb{R} -differenzierbar in z_0 & die \mathbb{C} -antilineare Komponente von $df(z_0)$ verschwindet

$$\iff f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-differenzierbar in } z_0 \text{ und } \boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0}$$

(Cauchy-Riemannsche-Gleichungen)

Ist f komplex-differenzierbar, so gilt nach (2.2), (2.5)

$$(2.6) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = df(z_0) \cdot 1 = f'(z_0).$$

Wenn wir z und \bar{z} als Variablen betrachten und eine Funktion

$$f(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$$

nach z und \bar{z} mittels Kettenregel ableiten, erhalten wir die Formel (2.5). Dies bedeutet, dass wir $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ durch formelles Differenzieren nach den Variablen z und \bar{z} erhalten.

Dies erleichtert viele Rechnungen. Z.B.

$$\frac{\partial}{\partial z} z^n = n z^{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^n = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} |z|^2 = \frac{\partial}{\partial z} (z\bar{z}) = \bar{z}.$$

Die Variablen z und \bar{z} sind sicherlich abhängig voneinander, aber beim Differenzieren nach den konjugiert komplexen Variablen z und \bar{z} darf man so tun, als ob z und \bar{z} unabhängige Variable seien. Die Cauchy-Riemannsche-Gleichungen kann man so deuten: Holomorphe Funktionen sind unabhängig von \bar{z} und hängen nur von z ab.

Einige leichte Folgerungen aus Def. 2.1.1:

2.1.4. **Folgerung.** *Ist f komplex-differenzierbar in z_0 , so ist f stetig in z_0 .*

2.1.5. **Folgerung.** *Ist D ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = 0$, für alle $z \in D$, so ist f konstant.*

Beweis: f holomorph $\Rightarrow f$ reell-differenzierbar und $df(z) = f'(z)dz = 0$, für alle $z \in D$. Nach dem Konstanzkriterium (Skript 9.4.2; Königsberger 2, Kap. 2, §2.2.) ist f konstant. \square

Zusatz. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

- (i) f lokal-konstant (d.h. konstant in jeder Zusammenhangskomponente),
- (ii) f holomorph und $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$.

Auf völlig gleiche Weise wie im Reellen beweist man den folgenden Satz.

2.1.6. **Satz** (Rechenregeln für die Ableitung). *Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$. Dann sind $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{C}$), fg und falls $f'(z_0) \neq 0$ auch $1/f$ in z_0 komplex-differenzierbar und es gilt:*

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0) \quad , \quad (\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f^2(z_0)}$$

2.1.7. Beispiel.

(i) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist holomorph, $(z^n)' = nz^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Polynome $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, sind holomorph, und $P'(z) = na_n z^{n-1} + \dots + a_1$, $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Eine rationale Funktion ist definiert als Quotient zweier Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, $Q \neq 0$: $R : \mathbb{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, R ist holomorph auf seinen Definitionsbereich.

(iv) Sei $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

Sei $P : B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Dann ist P holomorph und es gilt

$$P'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad \text{d.h.}$$

eine Potenzreihe darf im Konvergenzbereich gliedweise differenziert werden.

Beweis: Sei $z_0 \in B_R(0)$. Wähle $\rho < R$ mit $z_0 \in B_\rho(0)$. Wir stellen fest:

- Die Funktionenreihe $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ konvergiert in $B_\rho(0)$.
- Die Reihe der Differentiale

$$\sum_{n \geq 0} d(a_n z^n) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} dz = \left(\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1} \right) dz$$

konvergiert gleichmäßig in $B_\rho(0)$, da $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ Konvergenzradius R hat.

Daraus folgt, dass P reell-differenzierbar in $B_\rho(0)$ ist, also auch in z_0 und

$$dP(z_0) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right) dz.$$

$dP(z_0)$ ist deshalb \mathbb{C} -linear, P ist komplex-differenzierbar und $P'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$. □

(v) Nach (iv) sind $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)$$

$$\cos'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z)$$

und analog

$$\sin'(z) = \cos(z)$$

2.1.8. **Satz** (Kettenregel). Seien $D, G \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f : D \rightarrow G$ komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$, g komplex-differenzierbar in $z_0 \in D$, g komplex-differenzierbar in $w_0 = f(z_0) \in G$. Dann ist $g \circ f$ komplex-differenzierbar in z_0 und gilt

$$\boxed{(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)} .$$

Inbesondere ist $g \circ f$ holomorph, wenn f und g holomorph sind.

Beweis: $g \circ f$ ist reell-differenzierbar und $d(g \circ f)(z_0) = dg(w_0) \circ df(z_0)$ (Kettenregel für Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, siehe Skript 9.1.8 oder Königsberger 2, Kap. 2, §3.1).

Nun sind $dg(w_0)$ und $df(z_0)$ \mathbb{C} -linear, also auch $d(g \circ f)(z_0) \Rightarrow g \circ f$ komplex-differenzierbar. Außerdem ist $df(z_0)$ die Multiplikation mit $f'(z_0)$, $dg(w_0)$ die Multiplikation mit $g'(w_0)$, also $dg(w_0) \circ df(z_0)$ die Multiplikation mit $g'(w_0) \cdot f'(z_0)$, d.h. $d(g \circ f)(z_0) = dg(w_0) \circ df(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0) dz$. Aber $d(g \circ f)(z_0) = (g \circ f)'(z_0) dz$. Es folgt $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0)$. \square

2.1.9. **Satz.** Seien $D, G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow G$, so dass

- (i) f holomorph,
- (ii) f Homöomorphismus, und
- (iii) $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.

Dann ist auch f^{-1} holomorph und $\boxed{(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}}$ für alle $w \in G$.

Beweis: Sei $w \in G$ fest, $z_0 := f^{-1}(w_0)$. Sei (w_n) eine Folge in G , $w_n \rightarrow w_0$, $n \rightarrow \infty$ und $w_n \neq w_0$. Dann gilt $z_n := f^{-1}(w_n) \rightarrow f^{-1}(w_0) =: z_0$ und $z_n \neq z_0$. Deshalb

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n - z_0}{f(z_n) - f(z_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)} .$$

Die Folge (w_n) ist beliebig \Rightarrow Behauptung. \square

2.1.10. **Beispiel.** Sei $\ell : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion. Dann ist ℓ holomorph und es gilt

$$\ell'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in D .$$

2.1.11. **Definition.** Eine Abbildung $f : D \rightarrow \tilde{D}$ zwischen zwei offenen Mengen heißt **biholomorph**, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} holomorph sind. Zwei offene Teilmengen $D, \tilde{D} \subset \mathbb{C}$ heißen biholomorph, falls eine biholomorphe Abbildung $f : D \rightarrow \tilde{D}$ existiert.

2.2. Komplexe Kurvenintegrale.

2.2.1. **Definition.** Eine (parametrisierte) **Kurve** ist eine stetige Abbildung

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$; $\gamma(a), \gamma(b)$ heißen **Anfangspunkt** und **Endpunkt** von γ ,

$|\gamma| := \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ heißt **Träger** oder **Spur** von γ .

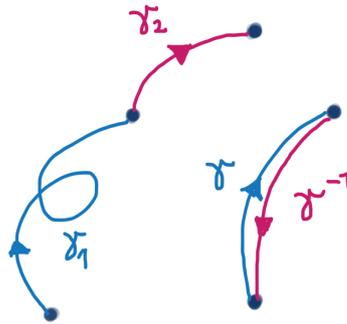
Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$ Kurven, so dass der Endpunkt von γ_1

der Anfangspunkt von γ_2 ist, $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Die **zusammengesetzte Kurve** ist $\gamma_1 * \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & , t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(a_2 - b_1 + t) & , t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

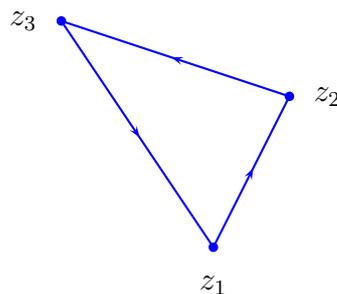
Eine Kurve heißt **stückweise \mathcal{C}^1** , wenn man sie in endlich viele \mathcal{C}^1 -Kurven zerlegen kann, d.h. wenn gilt $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_m$ und $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ sind \mathcal{C}^1 -Kurven.

Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve, so heißt $\gamma^{-1} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t)$ die **umorientierte Kurve**.



2.2.2. Beispiel. (i) Für $z, w \in \mathbb{C}$ sei $[z, w]$ die Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1 - t)z + tw$, d.h. die *Strecke* von z nach w . Es ist $[z, w]^{-1} = [w, z]$.

Für z_1, z_2, \dots, z_m bezeichnen wir mit $[z_1, z_2, \dots, z_m] = [z_1, z_2] * [z_2, z_3] * \dots * [z_{m-1}, z_m]$ den *Streckenweg* von z_1 nach z_m über z_2, \dots, z_{m-1} . Ein Streckenweg der Form $[z_1, z_2] * [z_2, z_3] * [z_3, z_1]$ heißt *Dreieckskurve*.



(ii) Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Dann definiert $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ einen positiv orientierten *Kreisbogen*. Wenn $b = a + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$ ist, so wird der Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ genau k -mal durchgelaufen.

Wir schreiben $\partial B_r(z_0)$ für den positiv orientierten Kreis $\gamma : [a, a + 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$.