

6. VORLESUNG, 25.04.2013

Kurven sind Abbildungen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, der Träger $|\gamma|$ ist eine Teilmenge von \mathbb{C} . Man muss zwischen Kurve und Träger unterscheiden. Zum Beispiel haben $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = z_0 + re^{it}$, $\gamma_2(t) = z_0 + re^{ikt}$ denselben Träger (der Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$) aber $\gamma_1 \neq \gamma_2$ falls $k \neq 1$. Bei γ_1 wird der Kreis einmal durchgelaufen, bei γ_2 wird der Kreis k -mal durchgelaufen.

2.2.3. **Definition.** Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $f = u + iv$, setze

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b f dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

2.2.4. **Lemma.** Für $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig gilt:

(i)

$$\int_a^b (f + g) dt := \int_a^b f dt + \int_a^b g dt, \quad \int_a^b (\lambda f) dt = \lambda \int_a^b f dt, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

(ii)

$$\left| \int_a^b f dt \right| \leq \int_a^b |f| dt \leq \sup_{[a,b]} |f| \cdot (b - a)$$

(iii) Sei $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(t) = \frac{dF}{dt}(t) = f(t)$ für alle $t \in [a, b]$.

Dann gilt

$$\int_a^b f dt = F(b) - F(a).$$

(iv) $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig in $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f_n dt \rightarrow \int_a^b f dt$ ($n \rightarrow \infty$).

Beweis:

Zu (ii): Sei $z := \int_a^b f dt$. Ist $z = 0$, so ist (ii) klar. Falls $z \neq 0$, schreibe $z = |z|e^{i\varphi}$, also

$$|z| = ze^{-i\varphi} = \int_a^b fe^{-i\varphi} dt = \operatorname{Re} \int_a^b fe^{-i\varphi} dt = \int_a^b \underbrace{\operatorname{Re}(fe^{-i\varphi})}_{\leq |fe^{-i\varphi}| = |f|} dt \leq \int_a^b |f| dt$$

Zu (iii): Hauptsatz für Real- und Imaginärteil. □

2.2.5. **Definition.** Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein \mathcal{C}^1 -Kurve, $f : |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Das **Kurvenintegral** von f längs γ ist

$$(2.7) \quad \int_{\gamma} f(z) dz := \int_{\gamma} f dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Dabei ist die Ableitung von $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ definiert durch $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Das **Integral nach Bogenlänge** von f ist definiert durch

$$\int_{\gamma} f |dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)| dt.$$

Die **Länge der Kurve** γ ist

$$\ell(\gamma) := \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Ist γ eine stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve, $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_m$ eine Zerlegung in \mathcal{C}^1 -Kurven, $f : |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, setze

$$(2.8) \quad \int_{\gamma} f dz := \int_{\gamma_1} f dz + \dots + \int_{\gamma_m} f dz .$$

Dieser Wert ist von der Zerlegung unabhängig.

Zusammenhang mit reellen Kurvenintegralen: die Formel (2.7) ist eigentlich das Kurvenintegral der 1-Form $f(z) dz = (u+iv)(dx+idy) = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$ wie sie in Analysis III eingeführt wurde. Dort ist das Kurvenintegral einer 1-Form $\omega = p dx + q dy$ längs $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ definiert durch $\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \gamma^*(\omega)$, wobei $\gamma^*(\omega) := p(\gamma(t))x'(t) dt + q(\gamma(t))y'(t) dt$ der Pullback von ω durch γ ist. Es gilt also $\gamma^*(f dz) = f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$ und (2.7) lautet $\int_{\gamma} f dz := \int_a^b \gamma^*(f dz)$.

2.2.6. Definition. Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f , falls F holomorph ist und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.

2.2.7. Lemma.

(i) Beide Typen von Integralen sind linear, z.B.

$$\int_{\gamma} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dz = \lambda_1 \int_{\gamma} f_1 dz + \lambda_2 \int_{\gamma} f_2 dz.$$

(ii) Formel (2.8) gilt auch, wenn $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ nur stückweise \mathcal{C}^1 sind.

(iii) **Invarianz gegenüber Parametertransformationen:** Sei $\tau : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ bijektiv und stetig differenzierbar, so dass $\tau'(s) \neq 0$ für alle $s \in [\alpha, \beta]$ (Parametertransformation) und sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathcal{C}^1 -Kurve. Dann gilt:

$$\int_{\gamma \circ \tau} f dz = \int_{\gamma} \operatorname{sgn}(\tau') f dz .$$

Insbesondere

$$\int_{\gamma^{-1}} f dz = - \int_{\gamma} f dz .$$

(iv) **Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Kurvenintegral:**

Ist f stetig in D , $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ Stammfunktion von f , so gilt

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}$$

Insbesondere gilt für jede geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve:

$$\boxed{\int_{\gamma} f(z) dz = 0 .}$$

Hat eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion, so hängt das Kurvenintegral von $f(z) dz$ nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve und nicht vom Verlauf der Kurve ab, d.h. sind $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow D$ stückweise \mathcal{C}^1 -Kurven mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, so gilt

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

Diese Eigenschaft heißt **Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals von $f dz$** .

(v) Sei f stetig auf dem Träger der stückweisen \mathcal{C}^1 -Kurve γ .

Dann gilt die **Standardabschätzung für Integrale**:

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \leq \sup_{|\gamma|} |f| \cdot \ell(\gamma).$$

Beweis:

Zu (iii):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \tau} f dz &= \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \gamma \circ \tau)(s) \cdot (\gamma \circ \tau)'(s) ds \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \gamma) \underbrace{(\tau(s))}_t \underbrace{\gamma'(\tau(s))}_t \underbrace{\tau'(s) ds}_{dt} \Big|_{\tau(s)=t} = \int_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} (f \circ \gamma)(t) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \operatorname{sgn}(\tau') \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt = \operatorname{sgn}(\tau') \int_{\gamma} f dz \\ \text{weil } \int_{\tau(\alpha)}^{\tau(\beta)} &= \begin{cases} \int_a^b & \text{falls } \tau \text{ wachsend d.h. } \tau' > 0 \\ \int_b^a = -\int_a^b & \text{falls } \tau \text{ fallend d.h. } \tau' < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zu (iv):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{dF}{dz}(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

nach 2.2.4

Zu (v):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \underbrace{\int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt}_{=:\int_{\gamma} |f| |dz|} \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f \circ \gamma(t)| \int_a^b |\gamma'(t)| dt \\ &= \sup_{z \in |\gamma|} |f(z)| \ell(\gamma) \end{aligned}$$

□

2.2.8. **Satz** (Hauptsatz über Kurvenintegrale). Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:

- (i) f besitzt eine Stammfunktion,
- (ii) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jede geschlossene stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve,
- (iii) das Kurvenintegral von $f dz$ ist wegunabhängig.

Zusatz. Ist das der Fall, so ist eine Stammfunktion durch

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta =: \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

gegeben, wobei z_0 beliebig und fest ist und γ_z eine beliebige stückweise \mathcal{C}^1 -Kurve von z_0 nach z in D ist. (z.B. ein Streckenzug; existiert stets, da D Gebiet).

Beweis: (i) \Rightarrow (ii) folgt aus Lemma 2.2.7(iv).

(ii) \Rightarrow (iii) Seien γ, δ Kurven mit demselben Anfangs- und Endpunkt. Dann ist $\gamma * \delta^{-1}$ geschlossen und

$$0 = \int_{\gamma * \delta^{-1}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\delta^{-1}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\delta} f(z) dz .$$