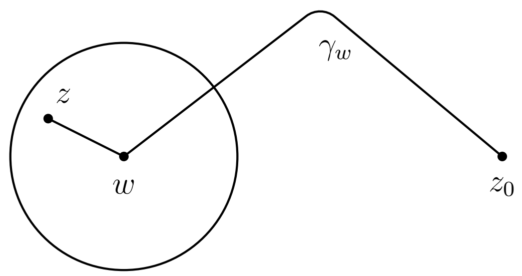
(iii)⇒(i) Sei $w \in D$ beliebig, fest. D offen $\Rightarrow \exists\ \rho > 0 : B_\rho(w) \subset D$.
Sei γ_w ein Streckenzug von z_0 nach w in D. Dann ist $\gamma_w * [w, z]$ ein Streckenzug von z_0 nach z in D für alle $z \in B_\rho(w)$.



Es folgt

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_w * [w,z]} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= \int_{\gamma_w} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta \\ &= F(w) + f(w)(z-w) + \int_{[w,z]} (f(\zeta) - f(w))\, d\zeta\,, \text{ da } \int_{[w,z]} d\zeta = z - w\,. \end{aligned}$$

f stetig in $w \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta \in (0, \varrho)\ \forall z \in B_\delta(w) : |f(z) - f(w)| < \varepsilon$.
Wegen der Standardabschätung 2.2.7(v) gilt:

$$\Big| \int_{[w,z]} (f(\zeta) - f(w))\, d\zeta \Big| \le \varepsilon \int_{[w,z]} |d\zeta| = \varepsilon |z - w|$$

und daher

$$\lim_{z \to \infty} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = f(w)$$

also ist F komplex-differenzierbar in w und $F'(w) = f(w)$. □

2.2.9. **Beispiel.** Die Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z}$ hat keine Stammfuntkion, da

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i\,. \tag{2.9}$$

Hätte f eine Stammfunktion, so wäre das Integral Null. ↯
Die Formel (2.9) folgt aus der Definition des Integrals:

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = 2\pi i\,.$$

Die Funktion f hat aber eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\zeta} : r \ge 0\}$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}$, nämlich Zweige des Logarithmus. Das Integral (2.9) hängt eng mit der Unstetigkeit des Logarithmus zusammen. Wir können nämlich mit Hilfe der Stammfunktion log rechnen

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{e^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{e^{i(\pi-\varepsilon)}} \frac{dz}{z} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \big(\log e^{i(\pi-\varepsilon)} - \log e^{i(-\pi+\varepsilon)} \big) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \big(i(\pi-\varepsilon) - i(-\pi+\varepsilon) \big) \\ &= 2\pi i\,.\end{aligned}$$

Das Integral ist also genau der Sprung des Logarithmus beim Überqueren des negativen reellen Achse.

2.2.10. **Definition.** Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt ***Sterngebiet***, wenn es $z_0 \in D$ gibt, so dass für alle $z \in D$ gilt $[z_0, z] \subset D$.
Wir sagen, dass D Sterngebiet bzgl. z_0 ist oder z_0 ein Zentrum von D ist.

(i) Jede komplexe offene Menge ist Sterngebiet. Dabei ist jeder Punkt der Menge ein Zentrum.
(ii) $\mathbb{C}_-$ ist Sterngebiet (aber nicht konvex). Die Zentren von $\mathbb{C}_-$ sind alle $z \in \mathbb{R}_+$.
(iii) $\mathbb{C}^*$ oder ein Kreisring sind nicht Sterngebiete.

2.2.11. **Satz** (Hauptsatz über Kurvenintegrale in Sterngebieten)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet bzgl. $z_0 \in D, f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Äquivalent:*

(i) *f besitzt eine Stammfunktion,*
(ii) *$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für den Rand $\partial\Delta$ jedes Dreiecks $\Delta \subset D$ mit z_0 als Ecke.*
(iii) *Das Kurvenintegral von $f dz$ ist wegunabhängig. Ist das der Fall, so ist eine Stammfunktion durch*

$$F : D \to \mathbb{C}\,, \qquad F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$$

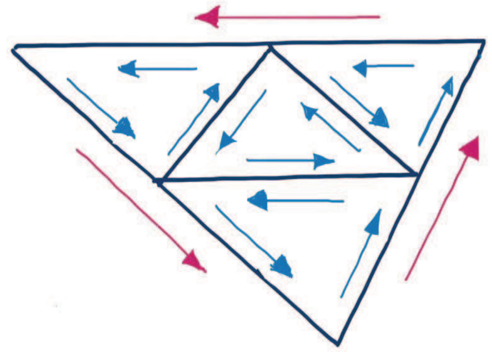
gegeben.

Beweis: Analog zu 2.2.8. In (iii)$\Rightarrow$(ii) setze $\gamma = [z_0, z]$. □

2.3. **Der Cauchysche Integralsatz.** Unser Ziel ist zu zeigen, dass eine holomorphe Funktion f in einem Sterngebiet die Beziehung $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ erfüllt, für alle geschlossenen stückweisen $\mathscr{C}^1$–Kurven. Insbesondere besitzt f Stammfunktionen.

2.3.1. **Lemma** (von Goursat)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in D. Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ für den Rand $\partial\Delta$ jedes abgeschlossenen Dreiecks $\Delta \subset D$.*

Beweis: Hier betrachten wir auf dem Rand eines Dreiecks stets die Orientierung gegen den Uhrzeigersinn. Sei $\Delta \subset D$ ein Dreieck. Setze $\alpha := |\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz|$. Seien $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$ die vier Teildreiecke die aus Δ durch Seitenhalbierung hervorgehen.



Dann ist

$$\int_{\partial\Delta} f\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta^{(j)}} f\,dz\,.$$

(Die Integrale über gemeinsame Seiten heben sich wegen der umgekehrten Orientierung auf.) Sei Δ_1 dasjenige der Dreiecke $\Delta^{(j)}$, für das der Betrag des Integrals maximal wird. Daraus folgt

$$\alpha \leqslant 4 \cdot \Big| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz \Big|\,.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Teilungsprozesses erhalten wir Dreiecke

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \qquad \text{mit} \qquad \Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \qquad (*)$$

und $\alpha \leqslant 4^n |\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz|$, $\ell(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\,\ell(\partial\Delta)$, $\operatorname{diam}\Delta_n = 2^{-n}\operatorname{diam}\Delta, n \in \mathbb{N}$. Die Mengen Δ_n sind kompakt. Aus $(*) \Rightarrow \exists\, z_0 \in D$ mit $z_0 \in \bigcap_{n\geq 1} \Delta_n$. f ist in z_0 komplex-differenzierbar, daher gibt es $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$ und

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varphi(z)(z - z_0)\,.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $|\varphi(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$. Da $\partial\Delta_n$ geschlossen sind, gilt:

$$\int_{\partial\Delta_n} dz = 0 \quad , \quad \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)\,dz = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz &= f(z_0)\int_{\partial\Delta_n} dz + f'(z_0)\int_{\partial\Delta_n}(z - z_0)\,dz + \int_{\partial\Delta_n}\varphi(z)(z - z_0)\,dz \\ &= \int_{\partial\Delta_n}\varphi(z)(z - z_0)\,dz\end{aligned}$$

Wegen $z_0 \in \Delta_n, \operatorname{diam} \Delta_n \to 0$ gilt $\Delta_n \subset B_\delta(z_0)$ für großes $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\alpha &\leqslant 4^n \cdot \Big| \int_{\partial \Delta_n} \varphi(z)(z - z_0)\, dz \Big| \leqslant 4^n \cdot \varepsilon \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |z - z_0| \cdot \ell(\partial \Delta_n) \\ &= 4^n \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{diam} \Delta_n \, \ell(\partial \Delta_n) = 4^n \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{diam} \Delta \frac{1}{2^n} \cdot \ell(\partial \Delta_n) \\ &= \varepsilon \cdot \operatorname{diam} \Delta \cdot \ell(\partial \Delta)\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\alpha = 0$. □

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Der Diameter einer Teilmenge $A \subset X$ ist definiert durch $\operatorname{diam} A := \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}$. Für ein Dreieck in der Ebene ist der Diameter gleich die Länge der längsten Seite.

Satz. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und K_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge nichtleerer kompakter Mengen, so dass $K_{n+1} \subset K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.*

Zum Beweis: Sei $z_n \in K_n$ beliebig gewählt. Die Folge $(z_n)_{n \geqslant 1}$ gehört zur kompakten Menge K_1. Wegen Folgenkompaktheit von K_1, hat $(z_n)_{n \geqslant 1}$ einen Häufungspunkt $z_0 \in K_1$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist dann z_0 einen Häufungspunkt der Folge $(z_n)_{n \geqslant m}$ in K_m. Da K_m abgeschlossen ist, so gilt $z_0 \in K_m$, also $z_0 \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m$.