8. Vorlesung, 02.05.2013

2.3.2. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle geschlossenen stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurven in D. Insbesondere besitzt f eine Stammfunktion in D.*

Beweis: Folgt aus 2.3.1 und 2.2.9. $\square$

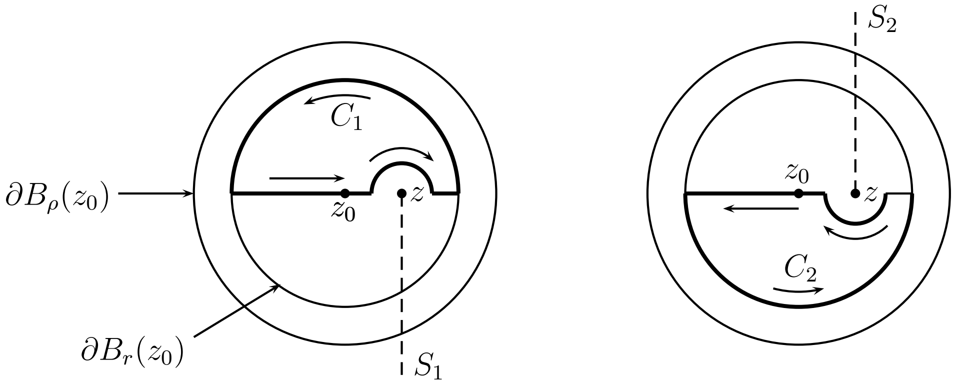
2.3.3. **Satz** (Cauchysche Integralformel). *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in der offenen Menge D. Wenn*

$$\overline{B_r(z_0)} \subset D \tag{2.10}$$

ist, so gilt :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\,, \quad \textit{für } z \in B_r(z_0)} \tag{2.11}$$

Beweis: Sei $z \in B_r(z_0)$ gegeben. Wegen (2.10) gibt es $\rho > r$ mit $B_\rho(z_0) \subset D$. Sei C_1 die durch Pfeile



angeordnete Kurve, wo der kleine Halbkreis um z den genügend kleinen Radius $\delta > 0$ hat. Entsprechend ist C_2 konstruiert durch Spiegelung um $\overline{z_0 z}$.
Sind S_1, S_2 senkrechte Halbgeraden zu $\overline{z_0 z}$ durch z, so sind $H_j = B_\rho(z_0)\setminus S_j$ Sterngebiete ($j = 1, 2$). Die Funktionen $H_j \ni \zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ sind holomorph und $\int_{C_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0$, $j = 1, 2$, nach 2.3.2 Wir addieren beide Integrale und dabei zerlegen wir sie in Strecken- und Halbkreisintegrale. Die Anteile über die Strecken heben sich wegen der verschiedenen Orientierungen auf:

$$0 = \int\limits_{C_1} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{C_2} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\,,$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} &= \int\limits_{\partial B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} := \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z + \delta e^{it})}{\delta e^{it}} i\delta e^{it} dt = i\int_0^{2\pi} f(z + \delta e^{it})dt \\ &= \underbrace{i\int\limits_0^{2\pi} [f(z + \delta e^{it}) - f(z)]\,dt}_{\to 0\ (\delta \to 0)} + \underbrace{i\int\limits_0^{2\pi} f(z)dt}_{= 2\pi i f(z)}\,,\end{aligned}$$

weil

$$\Big|\int_0^{2\pi}[f(z+\delta e^{it})-f(z)]dt\Big| \leq \max_{t\in[0,2\pi]}|f(z+\delta e^{it})-f(z)|\cdot 2\pi \longrightarrow 0\ , \quad \delta\to 0\ .$$

□

Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ und $z\in\mathbb{C}\setminus|\gamma|$. Die *Windungszahl (Umlaufzahl)* ist

$$n(\gamma,z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

und gibt an, wie oft die Kurve γ den Punkt z im positiven Sinn umläuft. Z.B.

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}\,,\ \gamma(t)=e^{ikt}\,,\ k\in\mathbb{Z} \quad \rightsquigarrow \quad n(\gamma,0)=k\ .$$

Es gilt $n(\gamma,z)\in\mathbb{Z}$. Beweis: Zerlege $a=c_0<c_1<\ldots<c_m=b$, so dass $\gamma_k := \gamma|_{[c_{k-1},c_k]}:[c_{k-1},c_k]\to U_k$, wobei ein Zweig des Logarithmus $\ell_k: U_k\to\mathbb{C}$ auf U_k existiert. Dann gilt $\gamma=\gamma_1*\ldots*\gamma_m$ und

$$\begin{aligned}2\pi i\cdot n(\gamma,z) &= \sum_{k=1}^m\int_{\gamma_k}\frac{d\zeta}{\zeta-z} = \sum_{k=1}^m[\ell_k(\gamma(c_k))-\ell_k(\gamma(c_{k-1}))]\\ &= \underbrace{\ell_m(\gamma(c_m))-\ell_1(\gamma(c_0))}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{m-1}\underbrace{[\ell_k(\gamma(c_k))-\ell_{k+1}(\gamma(c_k))]}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}}\ ,\end{aligned}$$

da für zwei Zweige ℓ_1,ℓ_2 des Logarithmus gilt $\ell_1(z),\ell_2(z)\in\log|z|+i\arg z+2\pi i\mathbb{Z}$.

2.3.4. **Satz** (allgemeine Cauchy-Formel)**.** *Sei D ein Sterngebiet, $f:D\to\mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine geschlossene stückweise $\mathscr{C}^1$–Kurve und $z\in D\setminus|\gamma|$. Dann gilt:*

$$n(\gamma,z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta$$

Beweis: Schreibe

$$(*) \qquad \int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z} = \int_\gamma\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}+\int_\gamma\frac{f(z)}{\zeta-z}\ .$$

Nach Definition ist $\int_\gamma\frac{f(z)}{\zeta-z}=2\pi i\cdot n(\gamma,z)$. Definiere

$$g_z: D\to\mathbb{C},\quad g_z(\zeta)=\begin{cases}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & ,\quad \zeta\neq z\\ f'(z) & ,\quad \zeta=z\ .\end{cases}$$

g_z ist holomorph in $D\backslash\{z\}$ und stetig in D. Das Lemma von Goursat und der Cauchysche Integralsatz sind noch gültig (siehe Übungsblatt 4, 1a). Also $\int_\gamma g_z(\zeta)d\zeta=0$ und das erste Integral in $(*)$ verschwindet. □

Für $\gamma=\partial B_r(z_0)$ gilt

$$n(\gamma,z)=\begin{cases}1 & ,\quad z\in B_r(z_0)\\ 0 & ,\quad z\notin\overline{B_r(z_0)}\ ,\end{cases}$$

also

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_r(a)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\begin{cases}f(z) & ,\quad z\in B_r(z_0)\\ 0 & ,\quad z\notin\overline{B_r(z_0)}\ .\end{cases}$$

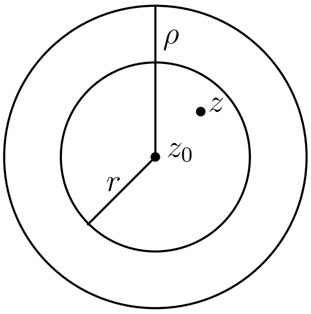
2.3.5. **Satz** (Potenzreihenentwicklungssatz)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in D$ und $\rho = d(z_0, \partial D) := \inf_{z \in \partial D} |z - z_0| > 0$. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{für alle } z \in B_\rho(z_0) \ ,$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \quad \textit{für alle } r \in (0, \rho) \ . \tag{2.12}$$

Beweis: Sei $z \in B_\rho(z_0)$. Wähle $r \in (|z - z_0|, \rho)$.



Dann ist $\overline{B_r(z_0)} \subset B_\rho(z_0)$ und die Cauchysche Integralformel impliziert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \ .$$

Nun ist

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}$$

und $|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|$, also $\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0} < 1$. Somit gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \ .$$

Diese Funktionenreihe konvergiert normal und daher gleichmäßig für $\zeta \in \partial B_r(z_0)$, da

$$\sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n < \infty \ .$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \cdot (z - z_0)^n \ . \end{aligned}$$

(Wir können Integral und Summe vertauschen wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe.) $\square$