9. Vorlesung, 07.05.2013

2.3.6. **Folgerung.** *Sei D offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

(i) *f ist beliebig oft komplex–differenzierbar, d.h. man kann induktiv definieren $f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, durch $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. Insbesondere sind alle Ableitungen $f^{(n)}$ holomorph.*

(ii) *Es gilt*
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$
für alle $r \in (0, d(z, \partial D))$. (Cauchy–Formel für Ableitungen)

(iii) *f ist um jedes $z_0 \in D$ in eine Taylorreihe entwickelbar:*
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in B_{d(z_0,\partial D)}(z_0)\ .$$

Beweis: Nach 2.3.5 gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, mit a_n aus (2.12). Aus Beispiel 2.1.7(iv) wissen wir, dass eine Potenzreihe gliedweise differenziert werden darf, also
$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$
für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Dasselbe Argument induktiv angewendet zeigt, dass f unendlich oft komplex–differenzierbar ist und
$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n}$$
für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Für $z = z_0$ folgt $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$, also $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. □

2.3.7. **Bemerkung.**

(i) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt um den Punkt $z_0 \in D$ in eine *Potenzreihe entwickelbar*, falls es $\rho > 0$ gibt und eine Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$, so dass $B_\rho(z_0) \subset D$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für alle $z \in B_\rho(z_0)$. Die Funktion f heißt *analytisch*, falls sie um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Wir haben eben gezeigt: f analytisch $\iff$ f holomorph.

(ii) Die Reihe in (i) ist durch f eindeutig bestimmt, da $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Ist f analytisch, so wird f durch seine Taylorreihe dargestellt.

(iii) Der Konvergenzradius der Taylorreihe von f kann echt grösser sein als der Abstand $d(z_0, \partial D)$ des Entwicklungspunktes zum Rand. Für den Hauptzweig $\log : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ hat die Taylorreihe in $z_0 \in \mathbb{C}_-$, $\operatorname{Re} z_0 < 0$, die Form
$$\log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n$$

mit Konvergenzradius $|z_0| > |\operatorname{Im} z_0| = d(z_0, \partial\mathbb{C}_-)$.

Rechnung mit Potenzreihen...