10. Vorlesung, 14.05.2013

2.3.8. **Satz** (Morera). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset D$ gelte*

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0 \qquad \textit{(Morera–Bedingung).}$$

Dann ist f holomorph.

Beweis: Sei $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset D$. $B_r(z_0)$ ist ein Sterngebiet und der Hauptsatz über Kurvenintegrale für Sterngebiete behauptet, dass f eine Stammfunktion $F : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ besitzt. F ist holomorph, also ist nach 2.3.6 auch $F' = f$ holomorph. □

2.3.9. **Satz** (Zusammenfassung zum Holomorphiebegriff). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist auf D holomorph, d.h. in jedem Punkt $z \in D$ komplex–differenzierbar.*

(ii) *f ist in jedem Punkt $z \in D$ reell–differenzierbar und erfüllt die Cauchy–Riemannschen Gleichungen $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.*

(iii) *f ist stetig und für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset D$ gilt die Morera–Bedingung $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$.*

(iv) *f ist stetig und besitzt lokal eine Stammfunktion, d.h. zu jedem $z \in D$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset D$, so dass $f|_U$ eine Stammfunktion hat.*

(v) *f ist stetig und für jede Kreisscheibe $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ gilt*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \textit{für } z \in B_r(z_0)\ .$$

(vi) *f ist analytisch in D.*

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{(ii)} \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{Satz 2.1.2}"] & \\
 & & \text{(i)} \arrow[dl, Rightarrow, bend left, "\text{Morera}"] & \\
\text{(iv)} \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{2.1.12}"] & \text{(iii)} \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\text{Goursat}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{Cauchyformel}"'] & & \text{(vi)} \arrow[ul, Rightarrow, "\text{Bsp. 2.1.6 (iv)}"'] \\
 & & \text{(v)} \arrow[ur, Rightarrow, "\text{Potenzreihenentwickungssatz}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Bemerkung. (i) Die Aussage "f holomorph $\Rightarrow$ f analytisch" zeigt deutlich, wie stark sich reelle und komplexe Differenzierbarkeit unterscheiden: Im Reellen ist die Ableitung einer differenzierbaren Funktion i.A. nicht einmal stetig, z.B. für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, ist f' in $x = 0$ unstetig. Auch wenn $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$,

muss f nicht analytisch sein, z.B. für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-1/x^2}$, $x\neq 0$, $f(0)=0$, gilt $f^{(n)}(0)=0$ für alle n und die Taylorreihe stimmt nicht mit f überein.
(ii) Für den Aufbau der Funktionentheorie haben wir nur die Existenz der Ableitung und nicht deren Stetigkeit benötigt. Wenn man in der Definition der Holomorphie die Stetigkeit der Ableitung voraussetzt, kann man den Cauchyschen Integralsatz leicht mit Hilfe des Satzes von Gauß–Green (oder Stokes) herleiten: Ist $\gamma=\partial\Omega$ der positiv orientierte Rand eines stückweise glatt berandeten Gebiets Ω und f holomorph in einer Umgebung von Ω, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz \overset{\text{Stokes}}{=} \int_\Omega \underbrace{d(f(z)\,dz)}_{=0,\ \text{da } f \text{ holomorph}} = 0\ .$$

2.4. **Identitätssatz, Nullstellen und holomorphe Fortsetzung.**

Bezeichnung: Für $D\subset\mathbb{C}$ offen setzen wir

$$\mathscr{O}(D):=\big\{\, f:D\to\mathbb{C}\ :\ f \text{ holomorph}\,\big\}\ .$$

2.4.1. **Satz** (Identitätssatz)**.** *Sei D Gebiet, $f\in\mathscr{O}(D)$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$f\equiv 0$ auf D.*
(ii) *Es gibt eine offene Teilmenge $U\subset D$, so dass $f|_U\equiv 0$.*
(iii) *Die Menge $\{z\in D: f(z)=0\}$ hat einen Häufungspunkt in D.*
(iv) *$\exists\, z_0\in D$ mit $f^{(n)}(z_0)=0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$.*

Beweis: (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) klar. Zu (iii)$\Rightarrow$(iv):
Sei $z_0\in D$ ein Häufungspunkt. Dann gilt $f(z)=\sum a_n(z-z_0)^n$, $z\in B_\rho(z_0)$, mit $\rho=d(z_0,\partial D)$ und $\exists\, z_k\neq z_0$, $z_k\to z_0$ mit $f(z_k)=0$. Übungsblatt 4, Aufgabe 1(b) $\Rightarrow$ $a_n=0$, $n\in\mathbb{N}_0$. Aber $a_n=f^{(n)}(z_0)/n!$.
(iv)$\Rightarrow$(i): Betrachte

$$Z=\{z\in D: f^{(n)}(z)=0 \text{ für alle } n\in\mathbb{N}_0\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0}\{z\in D: f^{(n)}(z)=0\}\ .$$

$f^{(n)}$ stetig $\Rightarrow$ $\{z\in D: f^{(n)}(z)=0\}$ abgeschlossen $\Rightarrow$ Z abgeschlossen (Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen).
Sei $w\in Z$. Dann folgt $f(z)=\sum\frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z-w)^n=0$ auf $B_\rho(w)$ mit $\rho=d(w,\partial D)$ $\Rightarrow$ $B_\rho(w)\subset Z$ $\Rightarrow$ Z offen. Zudem $z_0\in Z\neq\emptyset$, also $D=Z$, da D zusammenhängend ist. $\square$

Häufig benutzt man den Satz für $h-g$ anstelle f, wobei $h,g\in\mathscr{O}(D)$.

2.4.2. **Folgerung** (Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung)**.** *Sei D ein Gebiet, $A\subset D$ eine beliebige Teilmenge, $A\neq\emptyset$, mit mindestens einem Häufungspunkt in D. Sei $f:A\to\mathbb{C}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es höchstens eine holomorphe Fortsetzung $F:D\to\mathbb{C}$ von f, d.h. $F\in\mathscr{O}(D)$ mit $F|_A=f$.*

Beweis: Angenommen es gibt $F_1,F_2\in\mathscr{O}(D)$, $F_1|_A=F_2|_A$. Mit 2.4.1(iii) für F_1-F_2 folgt $F_1\equiv F_2$ in D. $\square$

2.4.3. **Satz.** *Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Dann gilt: $f : I \to \mathbb{R}$ ist analytisch $\iff$ f besitzt eine holomorphe Fortsetzung auf ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$.*

Beweis: "$\Rightarrow$":
f reell–analytisch : $\iff$ $\forall\, x \in I \;\; \exists\, \varepsilon(x) > 0$, so dass $\big(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)\big) \subset I$ und $f(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x)(y-x)^n$ für alle $y \in \big(x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)\big)$, wobei $c_n(x) = f^{(n)}(x)/n!$.
Die Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = 1/\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|c_n(x)|}$. Daher hat die komplexe Potenzreihe $\sum\limits_{n\geq 0} c_n(x)(z-x)^n$ Konvergenzradius $R \geq \varepsilon(x)$. Definiere

$$F_x : B_{\varepsilon(x)}(x) \to \mathbb{C} \quad , \quad F_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)(z-x)^n \ .$$

Setze $D := \bigcup\limits_{x \in I} B_{\varepsilon(x)}(x)$; D ist ein Gebiet. (Beweis?)
Auf dem Durchschnitt zweier Kreisscheiben $B_{\varepsilon(x_1)}(x_1)$ und $B_{\varepsilon(x_2)}(x_2)$ stimmen F_{x_1}, F_{x_2} überein, da sie auf $B_{\varepsilon(x_1)}(x_1) \cap B_{\varepsilon(x_2)}(x_2) \cap I$ mit f übereinstimmen. Damit ist $F : D \to \mathbb{C}$, $F(z) = F_x(z)$ für $z \in B_{\varepsilon(x)}(x)$, eine holomorphe Fortsetzung von f. $\square$

Die holomorphe Fortsetzung definieren wir durch Einsetzen der komplexen Variable z in der Potenzreihendarstellung von f. Z.B. ist die holomorphe Fortsetzung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x^2)^{-1}$, die Funktion $F : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$, $F(z) = (1+z^2)^{-1}$. Die Existenz der imaginären Nullstellen von $z^2 + 1 = 0$ erklärt auch, wieso die Entwicklung $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ um 0 nur für $|x| < 1$, jedoch nicht für $|x| \geq 1$ gültig ist: Auf dem Konvergenzkreis $|z| = 1$ von $\sum_{n\geq 0}(-z^2)^n$ liegen die singulären Punkte von $(1+z^2)^{-1}$.

2.4.4. **Definition.** Ist $A \subset \mathbb{C}$ (oder $A \subset X$, wobei X ein topologischer Raum ist), so heißt ein Punkt $p \in A$ *isolierter Punkt*, wenn es eine Umgebung U von p gibt mit $U \cap A = \{p\}$. Die Menge A heißt *diskret*, wenn alle Punkte von A isolierte Punkte von A sind.
Es gilt: $\quad A$ diskret $\iff$ A enthält keinen Häufungspunkt von A.

2.4.5. **Satz** (Isoliertheit der Nullstellen)**.** *Sei D ein Gebiet, $f \in \mathscr{O}(D)$, $f \not\equiv 0$. Dann ist die Menge der Nullstellen $N_f = \{z \in D : f(z) = 0\}$ diskret.*

Beweis von 2.4.5: Wäre N_f nicht diskret, so hätte N_f einen Häufungspunkt in D. Nach dem Identitätssatz (2.4.1(iii)) wäre $f \equiv 0$ $\lightning$. $\square$

2.5. **Cauchysche Abschätzungen, Satz von Liouville, Fundamentalsatz der Algebra.**

2.5.1. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$, $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ und $M = \sup\limits_{\partial B_r(z_0)} |f|$.*

Sei $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f um z_0. Dann gilt:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Der Potenzreihenentwicklungssatz 2.3.5 impliziert:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta$$

Mit der Standardabschätzung (2.2.7 (v)) folgt

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \frac{|f(\zeta)|}{\underbrace{|(\zeta - z_0)^{n+1}|}_{=r^{n+1}}} \underbrace{\ell(\partial B_r(z_0))}_{=2\pi r} = \frac{M}{r^n}.$$

□

2.5.2. **Definition** (Weierstrass)**.** Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ heißt *ganze* Funktion. Eine ganze Funktion, die kein Polynom ist, heißt *transzendent*.

Beispiele: Polynome, exp, sin, cos.

2.5.3. **Satz** (Satz von Liouville)**.** *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Beweis: Die Taylorentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von f um 0 konvergiert *überall* in $\mathbb{C}$ (Satz 2.3.5). Da f beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$, so dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus 2.5.1 folgt $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ für alle $r > 0$. Da r beliebig groß werden kann, folgt $a_n = 0$ für alle $n \geq 1$, d.h. $f(z) = a_0$. □

2.5.4. **Satz** (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Ein nicht konstantes Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis: Ein Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$ ist nicht konstant genau dann, wenn $\operatorname{grad} P \geqslant 1$, d h. genau dann, wenn $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ mit $n \geqslant 1$ und $a_n \neq 0$. (In der Tat, P ist konstant, genau dann, wenn $P' \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$; andererseits ist die n-te Ableitung von $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$, $P^{(n)}(z) = n! a_n$.)

Angenommen $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ holomorph und es gilt

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^n| \cdot \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + a_n \right|} \to 0 \cdot \frac{1}{a_n} = 0 \,. \quad |z| \to \infty$$

f ist also beschränkt und konstant nach 2.5.3; folglich ist P konstant $\lightning$. □

Ein Körper K heißt ***algebraisch abgeschlossen*** wenn jedes Polynom $f \in K[x]$ mit Koeffizienten in K und mit $\operatorname{grad} f \geqslant 1$ besitzt eine Nullstelle in K. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass der Körper $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Die Körper $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht algebraisch abgeschlossen, da z. B. $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ keine Nustelle in $\mathbb{Q}$ hat, und $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat.