11. Vorlesung, 16.05.2013

Äquivalent sind:

- K ist algebraisch abgeschlossen.
- Jedes $f \in K[x]$, $\operatorname{grad} f \geqslant 1$ zerfällt in Linearfaktoren: $f = c\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)$, $n = \operatorname{grad} f$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $c \neq 0$.

Sei K Körper, $f \in K[x]$, $\alpha \in K$ Nullstelle $\rightsquigarrow \exists\, q \in K[x]$ mit $f = (X-\alpha)q$ (denn $f = (X-\alpha)q + r$, $\operatorname{grad} r < 1$, also $r \in K$ und $0 = f(\alpha) = (\alpha-\alpha)q(\alpha) + r \rightsquigarrow r = 0$).

2.5.5. **Satz.** *Sei R ein Ring, seien $f, g \in R[x]$ mit $g = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, $a_d \in R^*$ (insbesondere* $\operatorname{grad} g = d$*). Dann $\exists! g, r \in R[x]$ mit $f = g\,q + r$,* $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g$.

$x - \alpha$ ist prim in $K[X] \rightsquigarrow k =$ Vielfachheit von $X - \alpha$ in der Primfaktorzerlegung von f; k heißt auch Vielfachheit der Nullstelle α von f. Ist $\operatorname{grad} f = n \rightsquigarrow f$ hat höchstens n Nullstellen (gezählt mit Vielfachheit).

2.5.6. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$, $K \subset D$ kompakt und* $0 < \varepsilon < d(K, \partial D)$. *Sei $K_\varepsilon = \{z \in D : d(z, K) \leq \varepsilon\}$. Dann gilt*

$$\|f^{(n)}\|_K \leq \frac{n!}{\varepsilon^n}\|f\|_{K_\varepsilon}.$$

Beweis: Für $z \in K$ gilt $\overline{B_\varepsilon(z)} \subset K_\varepsilon$, also

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{\varepsilon^n}\|f\|_{K_\varepsilon}.$$

□

2.6. Maximumprinzip, Offenheitssatz, Schwarzsches Lemma.

2.6.1. **Satz** (Mittelwertsatz für holomorphe Funktionen). *Ist f holomorph in einer Umgebung von $\overline{B_r(z_0)}$, so gilt*

$$f(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt}_{\textit{Mittelwert von } f \textit{ auf } |z-z_0|=r} \qquad (*)$$

nach der Cauchy–Formel.

Wir sagen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ die *Mittelwerteigenschaft* hat, wenn $(*)$ für jede $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ gilt.

2.6.2. **Satz** (Maximumprinzip). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Hat $|f|$ ein lokales Maximum in D, so ist f konstant.*

Beweis: Sei $z_0 \in D$ ein lokales Maximum, $\overline{B_R(z_0)} \subset D$ eine Umgebung von z_0 mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für $z \in \overline{B_R(z_0)}$.
Ist $f(z_0) = 0$, so ist $f|_{B_R(z_0)} \equiv 0$ und nach Identitätssatz $f \equiv 0$.
Ist $f(z_0) \neq 0$, so $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i\varphi}$, $(fe^{-i\varphi})(z_0) = |f(z_0)| > 0$.
Wir ersetzen f durch $fe^{-i\varphi}$ und dürfen annehmen, dass $f(z_0) > 0$. Es gilt also $f(z_0) \geq |f(z)|$ für alle $z \in B_R(z_0)$.
Betrachte nun die Funktion $g : B_R(z_0) \to \mathbb{R}$, $g(z) = \operatorname{Re}(f(z_0) - f(z))$.

- Wegen $\operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)| \leq f(z_0)$ gilt $g \geq 0$, $g(z_0) = 0$.
- Durch Zerlegung in Real- und Imginärteil von $(*)$ folgt, dass auch $\operatorname{Re} f$ die Mittelwerteigenschaft hat, also auch g.

Damit
$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it})\, dt \ .$$
Der Integrand ist stetig und $\geq 0 \Rightarrow g(z_0 + re^{it}) = 0$ für alle $t \in [0, 2\pi], 0 < r \leq R \Rightarrow$ $\operatorname{Re} f$ konstant in $B_R(z_0)$.
Aber $|f(z)| \leq f(z_0) = \operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)| \Rightarrow |f(z)| \equiv \operatorname{Re} f(z) \Rightarrow \operatorname{Im} f(z) = 0 \Rightarrow$ $f(z) = \operatorname{Re} f(z) = f(z_0)$ für $z \in B_R(z_0)$.
Identitätssatz $\Rightarrow f(z) = f(z_0)$ für $z \in D$. □

2.6.3. **Bemerkung.** Man kann auch die folgende Form des Maximumprinzips beweisen, die z. B. für harmonische Funktionen andwendbar ist. Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Hat $|f|$ ein lokales Maximum in D, so ist f konstant.

2.6.4. **Satz** (Maximumprinzip für beschränkte Gebiete)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ beschränkt, $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathscr{C}(\overline{D})$. Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf dem Rand an:*
$$|f(z)| \leq \|f\|_{\partial D} \text{ für alle } z \in D \ .$$

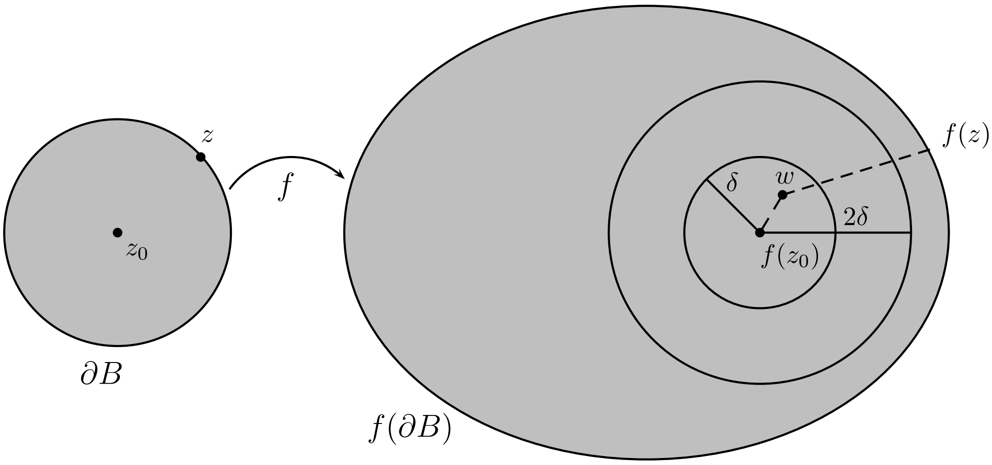
2.6.5. **Satz** (Minimumprinzip)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ und $z_0 \in D$, so dass $|f|$ ein lokales Minimum in z_0 hat.*
Dann gilt $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant in D.

Beweis: Ist $f(z_0) \neq 0$, so $f(z) \neq 0$, $z \in U(z_0)$ und $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}(U)$ und $\frac{1}{|f|}$ hat ein lokales Maximum in z_0; dann ist f konstant in U also in D nach Identitätssatz. □

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *offen*, wenn das Bild $f(U)$ jeder in X offenen Menge U offen in Y ist. Beachte: Im Gegensatz hierzu bedeutet Stetigkeit, dass jede in Y offene Menge V ein offenes Urbild $f^{-1}(V)$ hat. f stetig $\not\Rightarrow$ f offen, z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht offen.
Sei $f : X \to Y$ stetig, bijektiv. Dann gilt: f offen $\iff$ f homöomorph.
$P : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{C}^*$, $P(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ist stetig, bijektiv, aber nicht offen.

2.6.6. **Satz** (Offenheitssatz)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$ nirgends lokal konstant. Dann ist die Abbildung $F : D \to \mathbb{C}$ offen.*

Beweis: Sei $U \subset D$ offen und $z_0 \in U$. Z. z. $\exists\, \delta > 0 : B_\delta(f(z_0)) \subset f(U)$. f ist um z_0 nicht-konstant $\Rightarrow \exists\, B = B_r(z_0)$ mit $\overline{B} \subset D$ und $f(z_0) \notin f(\partial B)$ Sonst $\forall r > 0\ \exists z_r \in \partial B_r(z_0)$ mit $f(z_0) = f(z_r)$. Wähle $r = 1/n$, dann $z_{1/n} \to z_0$, $n \to \infty$ und $f(z_0) = f(z_{1/n})$. Nach Identitätssatz ist dann f konstant in der Zusammenhangskomponente von z_0. Widerspruch.
Sei
$$\delta = \frac{1}{2} \min_{z \in \partial B} |f(z) - f(z_0)| \ .$$



Wir zeigen, dass $B_\delta(f(z_0)) \subset f(B)$. Sei ω mit $|\omega - f(z_0)| < \delta$. Dann

$$2\delta \leq |f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - \omega| + |f(z_0) - \omega| < |f(z) - \omega| + \delta \;\Rightarrow\; |f(z) - \omega| > \delta$$

für alle $z \in \partial B$, also

$$\min_{z \in \partial B} |f(z) - \omega| > \delta > |f(z_0) - \omega| \; .$$

Dies bedeutet, dass die nicht konstante Funktion $\overline{B} \ni z \to |f(z) - \omega|$ ihr Minimum in B erreicht $\Rightarrow$ sie hat eine Nullstelle in B, d.h. $\exists \zeta \in B$ mit $f(\zeta) = \omega \Rightarrow B_\delta(f(z_0)) \subset f(B)$. $\square$