

12. VORLESUNG, 28.05.2013

Äquivalente Fassung des Offenheitssatzes:

2.6.7. Satz (Satz von der Gebietstreue). *Sei D ein Gebiet, $f \in \mathcal{O}(D)$ nicht konstant. Dann ist $f(D)$ wieder ein Gebiet.*

Beweis: f nicht konstant $\Rightarrow f$ nirgends lokal konstant (nach Identitätssatz).

Offenheitssatz $\Rightarrow f(D)$ offen. f stetig $\Rightarrow f(D)$ zusammenhängend. \square

2.6.8. Satz (Schwarzsches Lemma). *Sei $\mathbb{D} = B_1(0)$. Für jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ gilt*

$$(2.13) \quad |f(z)| \leq |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{D} \text{ und } |f'(0)| \leq 1.$$

Gibt es $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $|f(w)| = |w|$ oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung um 0, d.h. es gibt $\zeta \in S^1$ mit $f(z) = \zeta \cdot z$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Beweis: (Carathéodory)

Sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ($a_0 = f(0) = 0$) die Taylorentwicklung von f für $z \in \mathbb{D}$. Die Potenzreihe $\sum_{n \geq 1} a_n z^{n-1}$ hat denselben Konvergenzradius und definiert $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$,

$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$, $z \in \mathbb{D}$. Dann gilt $f(z) = z g(z)$ und $g(0) = a_1 = f'(0)$. Sei $w \in \mathbb{D}$ fest und

$$r \in [|w|, 1], \quad w \in \overline{B_r}(0) \quad \underset{\text{Maxprinzip}}{\Rightarrow} \quad |g(w)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}.$$

Für $r \rightarrow 1$ folgt $|g(w)| \leq 1$. Da w beliebig ist, folgt (2.13). Falls $|f(w)| = |w|$, $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ oder $|f'(0)| = 1$, so hat $|g|$ ein Maximum in \mathbb{D} . Maximumprinzip $\Rightarrow g$ ist eine Konstante vom Betrag 1, $g(z) = \zeta \in S^1$. \square

Eine biholomorphe Abbildung $f : D \rightarrow D$ einer offenen Menge auf sich selbst heißt **Automorphismus von D** . Die Menge $\text{Aut}(D)$ der Automorphismen ist bzgl. der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

2.6.9. Satz. *Jeder Automorphismus $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$ ist eine Drehung, d.h. $\exists \zeta = e^{i\varphi} \in S^1$, $f(z) = \zeta \cdot z$, $z \in \mathbb{D}$.*

Beweis: Nach dem Schwarzsches Lemma gilt

$$|f(z)| \leq |z|, \quad |f^{-1}(w)| \leq |w| \text{ für alle } z, w \in \mathbb{D}.$$

Für $w = f(z) \Rightarrow |z| = |f^{-1}f(z)| \leq |f(z)|$. Also $|f(z)| = |z|$, $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$, $z \neq 0 \Rightarrow \exists \zeta \in S^1$ mit $f(z) = \zeta \cdot z$ (Gleichheit im Schwarzsches Lemma). \square

Betrachte nun die spezielle Möbiustransformation

$$\varphi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad \varphi_a(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \quad (a \in \mathbb{D} \text{ fest}).$$

Dann gilt:

$$\varphi_a(0) = a, \quad \varphi_a(a) = 0, \quad \varphi_a^2 = \text{Id}_{\mathbb{D}}, \quad \text{d.h. } \varphi_a^{-1} = \varphi_a$$

φ_a ist eine holomorphe Involution, die 0 und a vertauscht.

2.6.10. **Satz.**

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \mathbb{D} \ni z \mapsto \zeta \frac{z-a}{\bar{a}z-1} \in \mathbb{D} : a \in \mathbb{D}, \zeta \in S^1 \right\}.$$

Beweis: Sei $a = f^{-1}(0)$. Dann ist

$$f \circ \varphi_a \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \text{ und } f \circ \varphi_a(0) = f(a) = 0.$$

Satz 2.6.9 $\Rightarrow \exists \zeta \in S^1$ mit $f \circ \varphi_a(z) = \zeta \cdot z$, $f(z) = \zeta \varphi_a^{-1}(z) = \zeta \varphi_a(z) = \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$. \square

2.7. Isolierte Singularitäten.

2.7.1. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(D)$. Ein isolierter Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ (d.h. so dass $\exists r > 0 : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset D$) heißt **isolierte Singularität von f** .

Wir unterscheiden drei Arten von isolierten Singularitäten:

- (1) **hebbare Singularitäten:** $\exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$ mit $\tilde{f}|_D = f$.
- (2) **Pole:** nicht hebbar und $\exists g \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$, $p \in \mathbb{N}$ mit $f(z) = g(z)/(z - z_0)^p$ für $z \in D$.
- (3) **wesentliche Singularitäten:** weder hebbar, noch Pole.

Beispiele: Die Funktionen $f_1 : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_1(z) = \frac{z^2-1}{z-1}$, $f_2 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_2(z) = \frac{\sin z}{z}$, $f_3 : \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_3(z) = \frac{z}{e^z-1}$ haben hebbare Singularitäten in 1 bzw. in 0. Die Funktion $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ hat einen Pol in z_0 , die Funktion $e^{\frac{1}{z}}$ hat eine wesentliche Singularität in 0. Die Funktion $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ hat Pole in $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Der Punkt 0 ist keine isolierte Singularität, da $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0$.

2.7.2. **Satz (Riemannscher Hebbarkeitssatz).** *Eine isolierte Singularität z_0 einer Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ ist genau dann hebbar, wenn es eine Umgebung U von z_0 gibt, so dass f in $U \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.*

Beweis: Die Idee ist, die Funktion f mit $(z - z_0)^2$ zu multiplizieren; die so erhaltene Funktion h hat eine holomorphe Fortsetzung in z_0 , die in z_0 zusammen mit ihrer ersten Ableitung verschwindet. Man kann also ein Faktor $(z - z_0)^2$ von h abspalten und der andere Faktor ist die gesuchte holomorphe Fortsetzung!

Nun ausführlich: Betrachte $g, h : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & , \quad z \neq z_0 \\ 0 & , \quad z = z_0 \end{cases},$$

$$h(z) = (z - z_0)g(z).$$

g ist nach Annahme stetig in z_0 . Daher gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$$

und h ist \mathbb{C} -diffbar, also holomorph mit $h(z_0) = h'(z_0) = 0$.

Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz $\exists r > 0 : \forall z \in B_r(z_0)$

$$h(z) = (z - z_0)^2 \underbrace{(a_2 + a_3(z - z_0) + \dots)}_{=: \tilde{f}(z)} = (z - z_0)^2 \tilde{f}(z)$$

mit $\tilde{f} \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$. Für $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt $h(z) = (z - z_0)g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$, also $\tilde{f}(z) = f(z)$. Setze

$$\tilde{f} : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in D \\ \tilde{f}(z) & , \quad z \in B_r(z_0) . \end{cases}$$

\tilde{f} ist wohldefiniert und \mathbb{C} -diffbar in $D \cup \{z_0\}$ mit $\tilde{f}|_D = f$. □

2.7.3. Definition. Sei $f \in \mathcal{O}(D)$, $z_0 \in D$. Die **Ordnung von f in z_0** ist

$$\text{ord}_{z_0}(f) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z_0) \neq 0\}, & f \not\equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } z_0, \\ \infty, & f \equiv 0 \text{ in einer Umgebung von } z_0. \end{cases}$$

(Nach dem Identitätssatz gibt es $n \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ falls $f \not\equiv 0$ in einer Umgebung von z_0 .)

Beispiele: $f(z) \neq 0 \iff \text{ord}_z(f) = 0$; $\text{ord}_{z_0}(z - z_0)^n = n$;
 $\text{ord}_w(z - z_0)^n = 0$, $w \neq z_0$.

2.7.4. Satz. Sei $f \in \mathcal{O}(D)$, $z_0 \in D$, $m = \text{ord}_{z_0}(f)$. Dann gibt es $g \in \mathcal{O}(D)$, so dass $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $z \in D$ und $g(z_0) \neq 0$.

Beweis: Die Taylorentwicklung von f um z_0 lautet

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots = (z - z_0)^m(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots),$$

wobei $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$. Daher ist

$$g : D \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} & , \quad z \neq z_0 \\ a_m & , \quad z = z_0 \end{cases}$$

holomorph in D : g ist komplex diffbar in z_0 , da $g(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots$ eine konvergente Potenzreihe in einer Umgebung von z_0 ist. □

Sei nun $f \in \mathcal{O}(D)$, z_0 ein Pol von f , d.h. z_0 ist nicht hebbar und

$$f = g/(z - z_0)^p \quad , \quad g \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\}) \quad , \quad p \in \mathbb{N}.$$

Sei $q = \text{ord}_{z_0}(g)$ und $g(z) = h(z)(z - z_0)^q$, $h \in \mathcal{O}(D \cup \{z_0\})$, $h(z_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{h(z)(z - z_0)^q}{(z - z_0)^p} = \frac{h(z)}{(z - z_0)^{p-q}}, \quad z \in D.$$

Es ist $p > q$, ansonsten wäre z_0 hebbar; f hat also die Darstellung

$$(2.14) \quad f = \frac{h}{(z - z_0)^r}, \quad h(z_0) \neq 0,$$

wobei $r = p - q > 0$.

2.7.5. Definition. Sei $f \in \mathcal{O}(D)$, z_0 ein Pol von f . Die Zahl $r > 0$ aus der Darstellung (2.14) heißt die **Ordnung des Pols z_0 von f** . Die Zahl $\text{ord}_{z_0} f = -r$ heißt die **Ordnung der Funktion f in z_0** .