13. Vorlesung, 04.06.2013

2.7.6. **Satz.** *Eine isolierte Singularität z_0 von $f \in \mathcal{O}(D)$ ist ein Pol genau dann, wenn* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Beweis:

$$(*) \qquad \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty :\Longleftrightarrow \forall M > 0 \; \exists r > 0 \; \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} : |f(z)| > M \,.$$

Sei $r > 0$, so dass $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset D$ und $|f(z)| > 1$, $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Betrachte

$$h : B_r(z_0) \to \mathbb{C} \quad , \quad h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)} & , \quad z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ 0 & , \quad z = z_0 \end{cases}$$

$(*) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{z \to z_0} h(z) = 0 = h(z_0)$, also ist h stetig und holomorph in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Nach dem Hebbarkeitssatz ist h holomorph in $B_r(z_0)$.
Sei $p = \operatorname{ord}_{z_0}(g)$. Es gilt $h(z) = (z - z_0)^p k(z)$ mit $k \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$, $k(z_0) \neq 0$. Für $z \neq z_0$ ist $k(z) = h(z)(z - z_0)^{-p} \neq 0$. Schließlich gilt $\frac{1}{f(z)} = h(z) = (z - z_0)^p k(z)$, $f(z) = \frac{1}{k(z)} \frac{1}{(z - z_0)^p}$, wobei $\frac{1}{k} \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$. □

2.7.7. **Satz** (Satz von Casorati-Weierstrass)**.** *Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ und z_0 eine isolierte Singularität von f. Äquivalent:*

(i) *z_0 ist eine wesentliche Singularität.*
(ii) *Für jede Umgebung U von z_0 mit $U \setminus \{z_0\} \subset D$ liegt $f(U \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$.*
(iii) *Es gibt eine Folge (z_n) in D mit $z_n \to z_0$, so dass $f(z_n)$ keinen Grenzwert in $\widehat{\mathbb{C}}$ hat.*

Beweis:
Angenommen, es gäbe U, so dass $f(U \setminus \{z_0\})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ liegt. Dann gibt es $B_r(a)$, $r > 0$, mit $f(U \setminus \{z_0\}) \cap B_r(a) = \emptyset$. Definiere

$$g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \quad , \quad g(z) = \frac{1}{f(z) - a} \,.$$

g ist holomorph und $|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - a|} < \frac{1}{r}$.
Hebbarkeitssatz $\Rightarrow$ g ist holomorph fortsetzbar nach U. Es ist $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$, also

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \begin{cases} a + \frac{1}{g(z_0)} & , \quad \text{falls } \; g(z_0) \neq 0 \\ \infty & , \quad \text{falls } \; g(z_0) = 0 \,. \end{cases}$$

f hat also entweder eine hebbare Singularität (wenn $g(z_0) \neq 0$) oder einen Pol (wenn $g(z_0) = 0$). Widerspruch. □

2.7.8. **Satz** (Großer Satz von Picard)**.** *Seien $f \in \mathcal{O}(D)$ und z_0 eine wesentliche isolierte Singularität von f. Dann sind für jede Umgebung U von z_0 nur zwei Fälle möglich:*

(i) $f(U \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C}$ *oder*
(ii) $f(U \setminus \{z_0\}) = \mathbb{C} \setminus \{\textit{Punkt}\}$.

2.7.9. **Definition.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Eine ***meromorphe Funktion*** auf D ist eine Funktion $f : D' \to \mathbb{C}$, so dass

(i) $D' \subset \mathbb{C}$ offen ist und $P(f) := D \setminus D'$ diskret ist,
(ii) $f \in \mathcal{O}(D')$ und f einen Pol in jedem Punkt von $P(f)$ hat.

Wenn $P(f)$ leer ist, so ist $f \in \mathcal{O}(D)$; jede holomorphe Funktion ist also meromorph. Die Menge der meromorphen Funktionen in D wird mit $\mathcal{M}(D)$ bezeichnet. Die ***Ordnung der meromorphen Funktion*** f in einem Punkt $z \in D'$ des Definitionsbereichs ist definiert wie in Definition 2.7.3 und in einem Pol $z \in P(f)$ wie in Definition 2.7.5.

Beachte: Eine meromorphe Funktion auf D ist keine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$! Für $z \in P(f)$ gilt $\lim\limits_{w \to z} f(w) = \infty$. Wir können deshalb die Funktion $\tilde{f} : D \to \widehat{\mathbb{C}}$,

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in D' \\ \infty & , \quad z \in P(f) \end{cases}$$

betrachten; $\widetilde{f} : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ ist die stetige Fortsetzung von $f : D' \to \mathbb{C}$ in $P(f)$. Wir identifizieren f mit $\tilde{f}$. Eine Umformulierung der Def. 2.7.9 ist also:

$$f \text{ meromorph auf } D \;:\Longleftrightarrow\; \begin{cases} f : D \to \widehat{\mathbb{C}} \ \text{ stetig} \\ P(f) := f^{-1}(\infty) \ \text{ abgeschlossen und diskret} \\ f \in \mathcal{O}(D \setminus P(f)) \end{cases}$$

Kurz gesagt: f heißt meromorph in D, wenn sie dort bis auf eine abgeschlossene diskrete Menge von Polen holomorph ist.

2.7.10. **Beispiel.**

(1) Rationale Funktionen $R = \frac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathbb{C}[z]$, sind meromorph in $\mathbb{C}$. Nach Kürzen der gemeinsamen Linearfaktoren von P und Q können wir annehmen, dass P, Q teilerfremd sind. Dann ist $R \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus N(Q))$ wobei $N(Q) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$ und R hat Pole in $N(Q)$.

(2) Sind $f, g \in \mathcal{O}(D)$, D Gebiet; $g \not\equiv 0$. Dann $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(D)$.
Beweis:
Sei $N(g) = \{z \in D : g(z) = 0\}$. Aus dem Identitätssatz folgt, dass $N(g)$ keinen Häufungspunkt in D hat, also $N(g)$ ist abgeschlossen und diskret. Sei

$$N = \{z \in N(g) : \operatorname{ord}_z(f) \geqslant \operatorname{ord}_z(g)\}\,.$$

Dann sind die Punkte in N hebbare Singularitäten von f/g und werden zum Definitionsbereich hinzugenommen. An den Punkten von $N(g) \setminus N =: P\big(f/g\big)$ hat f/g Pole. Da $P(f)$ als Teilmenge von $N(g)$ keine Häufungspunkte hat, ist $f \in \mathcal{M}(D)$.

$$\frac{f}{g} : D \to \widehat{\mathbb{C}} \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)} & , \quad \operatorname{ord}_z f = \operatorname{ord}_z g = k \\ 0 & , \quad \operatorname{ord}_z f > \operatorname{ord}_z g \\ \infty & , \quad \operatorname{ord}_z f < \operatorname{ord}_z g\ . \end{cases}$$

Die Funktion $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ist meromorph auf $\mathbb{C}$ (mit Polen in $\pi(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$) aber nicht rational.

(3) $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$ ist keine meromorphe Funktion, da $z = 0$ kein Pol ist.