14. Vorlesung, 06.06.2013

2.7.11. **Satz.** *$\mathcal{M}(D)$ ist ein Ring bezüglich Addition und Multiplikation der Funktionen. Ist D ein Gebiet, so ist $\mathcal{M}(D)$ ein Körper.*

Beachte: Ist D kein Gebiet, so ist

$$f : D \to \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \begin{cases} 1 & , \quad z \in D_1 \\ 0 & , \quad z \in D \setminus D_1 \end{cases}$$

(wobei D_1 eine Komponente von D ist) holomorph, aber $P\left(\frac{1}{f}\right) = D \setminus D_1$ ist offen, also nicht diskret, und $\frac{1}{f}$ definiert keine meromorphe Funktion.
Wir wollen nun holomorphe und meromorphe Funktionen in $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ betrachten.

2.7.12. **Definition.** Sei $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen mit $\infty \in D$ und $r > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subset D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph* in D, falls:

(i) f ist stetig in D.
(ii) f ist holomorph in $D \setminus \{\infty\}$.

Eine Funktion $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt *meromorph* in D, falls:

(i) f ist stetig in D.
(ii) $P(f) := f^{-1}(\infty)$ ist abgeschlossen und diskret.
(iii) $f \in \mathcal{O}(D \setminus P(f))$.

2.7.13. **Beispiel.**
(1)

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \quad , \quad f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z^m} & , \quad z \neq \infty \quad (m \in \mathbb{N}) \\ 0 & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist holomorph.
(2)

$$P : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}, \ P(z) = \begin{cases} z^m & , \quad z \neq \infty \quad (m \in \mathbb{N}) \\ \infty & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist meromorph mit einem Pol in ∞.
(3) Seien $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ mit P, Q teilerfremd. Die rationale Funktion $R : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$

$$R(z) = \begin{cases} \frac{P(z)}{Q(z)} & , \quad z \in \mathbb{C}, \ Q(z) \neq 0 \\ \infty & , \quad z \in \mathbb{C}, \ Q(z) = 0 \\ \lim\limits_{z \to \infty} \frac{P(z)}{Q(z)} & , \quad z = \infty \end{cases}$$

ist meromorph in $\widehat{\mathbb{C}}$.

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, so dass $D \cup \{\infty\}$ eine Umgebung von ∞ ist und sei $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$. Wir nehmen an, dass es ein $r > 0$ existiert mit f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$. Betrachte die holomorphe Funktion $g : B_{1/r}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. Dann gilt:
$f : D \to \mathbb{C}$ holomorph $\iff$ $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{\infty\})$ und g hat eine hebbare Singularität

in 0 mit $g(0) = f(\infty)$.
$f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph $\iff$ $f \in \mathcal{M}(D \setminus \{\infty\})$ und g hat einen Pol in 0.

2.7.14. **Definition.** Wir sagen, dass $f \in \mathcal{M}(D)$ eine ***Nullstelle (Pol) von Ordung p in ∞*** hat, wenn dies für g in 0 der Fall ist. Wir sagen, dass f ***in ∞ eine wesentliche Singularität*** hat, wenn dies für g in 0 der Fall ist.

Beispiele.
(1) Ein Polynom vom Grad $m \geqslant 1$, $P : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ hat einen Pol der Ordnung m in ∞.
(2) $\mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ hat eine wesentliche Singularität in ∞.
(3) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $z \mapsto z^p e^{\frac{1}{z}}$ hat in 0 eine wesentliche Singularität und in ∞ einen Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$.
Kurz gefasst: Definitionsgemäß hat $f(z)$ das gleiche Verhalten in ∞ wie $f\left(\frac{1}{z}\right)$ in 0.

2.8. Laurentreihen und Laurententwicklungen.

Eine holomorphe Funktion $f : B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit isolierter Singularität lässt sich im Allgemeinen nicht in eine Taylorreihe entwickeln, aber in eine sogenannte Laurentreihe.

Beispiele.
(1) Hat f eine hebbare Singularität in z_0, so gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ in } B_r(z_0) \quad \text{(das ist wohl eine Taylorreihe).}$$

(2) Hat f einen Pol, so gilt $f = \dfrac{h}{(z - z_0)^p}$ mit $h(z_0) \neq 0$, also

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^p} \\ &= \frac{a_0}{(z - z_0)^p} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{a_{p-1}}{(z - z_0)} + a_p + a_{p+1}(z - z_0) + \ldots\ , \end{aligned}$$

mit $a_0 \neq 0$.
(3)

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ .$$

2.8.1. **Definition.** Eine ***Laurentreihe*** ist ein Paar von Reihen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right),$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Wir schreiben dafür $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ heißt ***Hauptteil***, die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ***Nebenteil*** der Laurentreihe. Diese heißt *konvergent in* $z \in \mathbb{C}$ (*bzw. absolut konvergent, gleichmäßig oder normal konvergent in einer Menge*), wenn dies für den Hauptteil und Nebenteil der Fall ist. Der Grenzwert ist die Summe der entsprechenden Grenzwerte:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=-1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \ .$$

2.8.2. **Satz.** *Ist die Potenzreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ *auf* $B_{1/r}(0)$ *und die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ *auf* $B_R(0)$ *konvergent, dann konvergiert die Laurentreihe* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *absolut auf dem Ringgebiet* $K_{r,R}(z_0) = \{z : r < |z-z_0| < R\}$ *und normal (also gleichmäßig) auf jedem Ringgebiet* $\overline{K}_{\varrho,\sigma} = \{z : \varrho \leqslant |z-z_0| \leqslant \sigma\}$, *wobei* $r < \varrho < \sigma < R$.
Die Summe der Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^n$ *ist holomorph in* $K_{r,R}(z_0)$.