

## 15. VORLESUNG, 11.06.2013

2.8.3. **Satz** (Cauchyscher Integralsatz für Ringgebiete).

Sei  $g$  holomorph im Ringgebiet

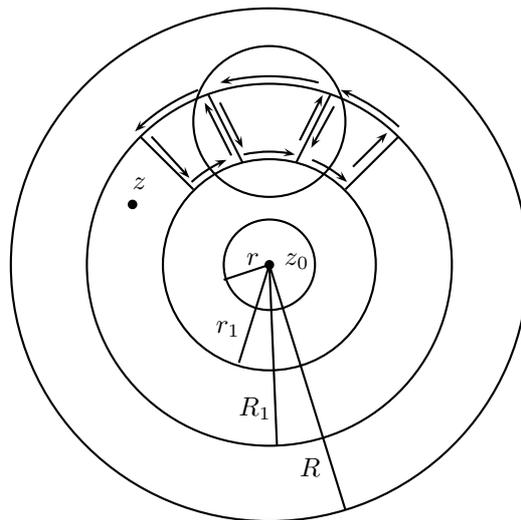
$$(2.15) \quad K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \quad (0 \leq r < R \leq +\infty, z_0 \in \mathbb{C}).$$

Dann gilt für alle  $r < r_1 < R_1 < R$

$$(2.16) \quad \int_{|\zeta - z_0| = r_1} g(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = R_1} g(\zeta) d\zeta.$$

**Beweis:**

Wir führen geschlossene Kurven wie in Figur ein, die in Sterngebieten (eigentlich Kreisscheiben) verlaufen. Auf diese Kurven wenden wir den Cauchyschen Integralsatz an. Durch Addition der Integrale erhalten wir (2.16)



□

2.8.4. **Satz** (Cauchysche Integralformel für Ringgebiete). Sei  $f$  holomorph im Ringgebiet (2.15). Dann gilt für alle  $z \in K_{r_1, R_1}(z_0)$  mit  $r < r_1 < R_1 < R$ :

$$(2.17) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

**Beweis:**

ObdA  $z_0 = 0$ . Seien  $z, r_1, R_1$  wie oben fest. Wir wenden (2.16) für die holomorphe Funktion an:

$$g : K_{r,R}(0) \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z. \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta|=R_1} g(\zeta) d\zeta &= \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \underbrace{\int_{|\zeta|=R_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{2\pi i \text{ da } |z| < R_1} = \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i f(z), \\ \int_{|\zeta|=r_1} g(\zeta) d\zeta &= \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \underbrace{\int_{|\zeta|=R_1} \frac{d\zeta}{\zeta - z}}_{0 \text{ da } |z| > r_1} = \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \end{aligned}$$

□

**2.8.5. Laurententwicklung.** Sei  $f$  holomorph in einem Ringgebiet (2.15). Dann hat  $f$  eine Laurententwicklung

$$(2.18) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K_{r,R}(z_0).$$

Dabei sind  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  eindeutig bestimmt durch

$$(2.19) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, \quad r < \varrho < R.$$

**Beweis:**

OBdA  $z_0 = 0$ . Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{z \left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n f(\zeta) d\zeta \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} f(\zeta) \zeta^n d\zeta \right) z^{-(n+1)} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{-n+1}}. \end{aligned}$$

Wegen  $|\zeta| = r_1 < |z|$  konvergiert die Reihe gleichmäßig auf  $\{|\zeta| = r_1\}$  und die gliedweise Integration ist erlaubt.

Wie im Potenzreihenentwicklungssatz erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}}.$$

Aus (2.15) erhalten wir (2.18). Allerdings haben wir in (2.19) nun  $\varrho = r_1$  bzw.  $\varrho = R_1$ . Den allgemeinen Fall erhalten wir wegen (2.16) für  $g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}$ :

Für alle  $r < \varrho < \sigma < R$  gilt

$$\int_{|\zeta|=\varrho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}} = \int_{|\zeta|=\sigma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

□

2.8.6. **Laurentzerlegung.** Sei  $f$  holomorph in (2.15). Dann existieren eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen  $g : B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h : B_{\frac{1}{r}}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass

$$f(z) = g(z - z_0) + h\left(\frac{1}{z - z_0}\right), \quad z \in K_{r,R}(z_0) \text{ und } h(0) = 0.$$

**Beweis:**

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \quad h(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

Eindeutigkeit: Übung.

□

2.8.7. **Satz** (Klassifizierung der isolierten Singularitäten).

Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität der Funktion  $f$  und sei  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  die Laurententwicklung von  $f$  in einem Kreisring  $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Die Singularität ist:

- (a) hebbar  $\iff a_n = 0$  für alle  $n < 0$ .
- (b) Pol der Ordnung  $m$   $\iff a_n = 0$  für alle  $n < -m$ ,  $a_{-m} \neq 0$ .
- (c) wesentlich  $\iff a_n \neq 0$  für unendlich viele  $n < 0$ .

**Beweis:** Übung.

□