

## 16. VORLESUNG, 13.06.2013

**2.9. Folgen holomorpher Funktionen.** Wir erinnern uns den folgenden Satz aus Analysis II:

**2.9.1. Satz** (Vertauschung von Grenzwert und Differentiation). *Sei  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  mit den Eigenschaften:*

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  *punktweise,*
- (2)  $f_n$  *stetig differenzierbar,*
- (3)  $(f'_n)_n$  *konvergiert gleichmäßig auf  $[a, b]$ .*

*Dann ist  $f$  auch differenzierbar, und es gilt  $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ .*

Die wesentliche Voraussetzung hier ist (3), wie das folgende Beispiel zeigt: Seien

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x + \frac{1}{n^n}}.$$

Für alle  $x \in [0, 1]$  gilt  $0 \leq f_n(x) \leq f_n(1) < \frac{2}{n}$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 =: f(x)$  gleichmäßig. Es gilt  $f'_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} (x + \frac{1}{n^n})^{\frac{1}{n}-1}$ . Daraus folgt  $f'_n(0) = \frac{1}{n^2} \frac{1}{n^{1-n}} = \frac{n^{n-1}}{n^2} = n^{n-3} \rightarrow \infty$ . Also  $f'_n(0) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0)$ . Hier konvergiert  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig, jedoch nicht  $f'_n \rightarrow f'$ .

Wir können sogar eine **stetige, nirgends differenzierbare Funktion** als gleichmäßigen Limes von stetigen Funktionen konstruieren. Wir formulieren das als eine Übung. Für mehr dazu siehe Walter, Analysis I, S. 353, 359.

**Aufgabe.** (a) Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in I$  differenzierbar. Seien  $a_n \rightarrow x_0$  und  $b_n \rightarrow x_0$  Folgen in  $I$  mit  $a_n \leq x_0 \leq b_n$  und  $a_n < b_n$  für alle  $n$ . Zeigen Sie:  $d_n := \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \rightarrow f'(x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(Tipp: Mit  $f(x) = f(x_0) + r(x)(x - x_0)$  liegt  $d_n$  zwischen  $r(a_n)$  und  $r(b_n)$ , warum?)

(b) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir eine Funktion  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  wie folgt: Ist  $1 \leq m \leq 2^n$  und  $x \in [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}]$ , so sei  $f_n(x) := x - \frac{m-1}{2^n}$  für ungerades  $m$  und  $f_n(x) := \frac{m}{2^n} - x$  für gerades  $m$ . Man überzeugt sich leicht, dass  $f_n$  wohldefiniert und stetig ist.

(i) Skizzieren Sie  $f_1, f_2, f_3, f_4$  und  $\sum_{k=1}^4 f_k$ .

(ii) Zeigen Sie, dass  $f := \sum_{k=1}^{\infty} f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  existiert und stetig ist.

(iii) Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  sei  $[a_n, b_n]$  ein Intervall der Form  $[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}]$  (wie oben), das  $x_0$  enthält. Zeigen Sie:  $\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$  ist für gerades  $n$  gerade und für ungerades  $n$  ungerade, und  $f$  ist in  $x_0$  nicht differenzierbar.

Die Funktion  $f$  ist also stetig, aber nirgends differenzierbar.

Wir werden sehen, dass in der Theorie der holomorphen Funktionen die Bedingung (3) aus Satz 2.9.1 überflüssig ist, wenn die Folge  $f_n$  gleichmäßig konvergiert. Die springende Punkte sind, dass

- wegen der Cauchy-Formel, ist der gleichmäßige Grenzwert holomorpher Funktionen wieder holomorph,
- bei holomorphen Funktionen erlauben die Cauchy-Abschätzungen eine Kontrolle der Ableitungen durch die Funktion.

**2.9.2. Definition.** Sei  $D$  eine offene Menge,  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wir sagen, dass  $(f_n)$  lokal gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert, wenn es zu jedem  $a \in D$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $f_n \rightarrow f$ ,  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $B_\delta(a)$ .

**2.9.3. Satz.** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen. Genau dann gilt  $f_n \rightarrow f$ ,  $n \rightarrow \infty$  lokal gleichmäßig in  $D$ , wenn für jede kompakte Teilmenge  $K \subset D$  gilt  $f_n \rightarrow f$ ,  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $K$ .

**2.9.4. Beispiel.** Sei  $f_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f_n(z) = z^n$ . Dann  $f_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  wegen  $|f_n(z)| \leq r^n$  für  $|z| \leq r$  und  $r^n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  für  $r < 1$ . Aber  $f_n$  konvergiert nicht gleichmäßig gegen 0, da  $\|f_n\|_{\mathbb{D}} = \sup_{\mathbb{D}} |f_n| = 1$ . Also ist die lokal gleichmäßige Konvergenz eine schwächere Forderung als die gleichmäßige Konvergenz.

**2.9.5. Satz (Weierstraßscher Konvergenzsatz).** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f_n \in \mathcal{O}(D)$  und  $f_n \rightarrow f$ ,  $n \rightarrow \infty$ , lokal gleichmäßig in  $D$ . Dann ist  $f \in \mathcal{O}(D)$  und für die Ableitungen hat man auch  $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , lokal gleichmäßig für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

**Beweis:** Zu  $z_0 \in D$  wählen wir  $r > 0$  mit  $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ , also

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f_n(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } z \in B_r(z_0) \quad (\text{Cauchy Integralformel}) .$$

Für  $z \in B_r(z_0)$  fest,  $\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} \rightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , gleichmäßig auf  $\partial B_r(z_0)$ , können wir Integral und Grenzwert vertauschen und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} , \quad z \in B_r(z_0) .$$

Daraus folgt, dass  $f$  holomorph ist (siehe z.B. 2.3.9).

Sei nun  $K \subset D$  kompakt,  $0 < r < d(K, \partial D)$ ,  $K(r) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, K) \leq r\}$ . Nach Satz 2.5.6 (Cauchysche Abschätzungen) gilt:

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_K \leq \frac{k!}{r^k} \|f_n - f\|_{K(r)} \rightarrow 0 , \quad n \rightarrow \infty .$$

□

**2.9.6. Satz.** Seien  $g_n \in \mathcal{O}(D)$  holomorph und die Reihe  $\sum_{n \geq 0} g_n$  konvergiere lokal gleichmäßig

in  $D$ . Dann ist  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ , holomorph und für  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $f^{(k)}(z) =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(z) \quad \text{für } z \in D .$$

**2.9.7. Definition.** Seien  $g_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann konvergiert  $\sum_{n \geq 0} g_n$  lokal normal, wenn für jedes

$a \in D$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_{B_\delta(a)} < \infty$ .

Dann konvergiert  $\sum_{n \geq 0} g_n$  auch lokal gleichmäßig.

**2.9.8. Satz.** Die Reihe  $\sum_{n \geq 0} g_n$ ,  $g_n \in \mathcal{O}(D)$ , konvergiere lokal normal in  $D$ . Dann ist  $f =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n \quad \text{ebenfalls holomorph.}$$

*Beispiel.* Die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion ist definiert durch

$$\zeta : \{\operatorname{Re} s > 1\} \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad \zeta(s) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} .$$

Die Reihe konvergiert normal in jeder Halbebene  $\{\operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon > 0$ .

$\zeta$  ist somit holomorph.

Konvergenz Folgen meromorpher Funktionen...

### 3. DIE ALLGEMEINE CAUCHY-THEORIE

Der Integralsatz und die Integralformel wurden für Sterngebiete bewiesen.

Frage: Sei  $D$  ein beliebiges Gebiet. Für welche Kurven  $\gamma \subset D$  gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{O}(D) ?$$

Antwort: Es sind genau die geschlossenen Kurven, deren Inneres in  $D$  liegt.

#### 3.1. Homologieversion der Cauchyschen Sätze.

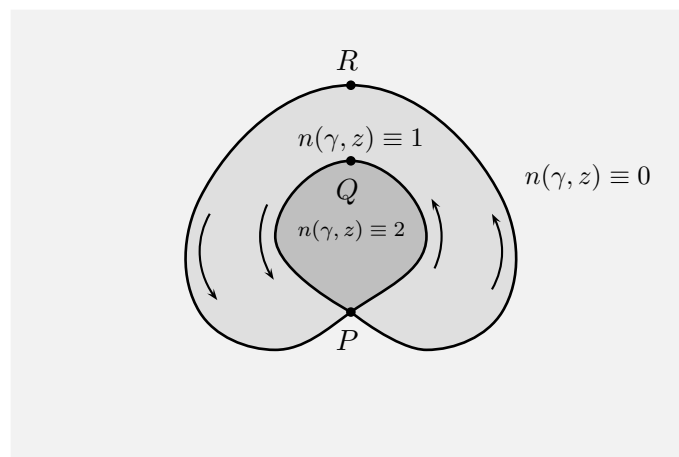
Für eine geschlossene Kurve  $\gamma$  und  $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$  wurde die Windungszahl definiert durch

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} .$$

3.1.1. **Satz** (Eigenschaften der Windungszahl).

- (i)  $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$  für  $z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$ .
- (ii)  $\mathbb{C} \setminus |\gamma| \ni z \mapsto n(\gamma, z)$  ist lokal-konstant.
- (iii)  $n(\gamma, z) = 0$  für  $z$  in der unbeschränkten Komponente von  $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ .

Als Beispiel betrachte die Kurve  $PQPRP$ :



3.1.2. **Definition.** Ist  $\gamma$  eine geschlossene Kurve in  $\mathbb{C}$ , so heißen

$$\operatorname{Int} \gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| : n(\gamma, z) \neq 0\} \quad \text{das Innere von } \gamma \text{ und}$$

$$\operatorname{Ext} \gamma = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\gamma| : n(\gamma, z) = 0\} \quad \text{das Äußere von } \gamma .$$

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen. Dann heißt  $\gamma$  *nullhomolog in  $D$* , wenn  $\operatorname{Int} \gamma \subset D$ .

*Bemerkung.*  $\gamma$  ist nullhomolog in  $D$ , wenn es keinen Punkt des Komplements von  $D$  umläuft.

$$\text{Int } \gamma \subset D \iff (n(\gamma, z) \neq 0 \Rightarrow z \in D) \iff (z \notin D \Rightarrow n(\gamma, z) = 0)$$

### 3.1.3. Lemma.

(i) Sei  $\gamma$  eine stückweise  $\mathcal{C}^1$ -Kurve und  $\varphi : |\gamma| \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann ist

$$F : \mathbb{C} \setminus |\gamma| \rightarrow \mathbb{C} \quad , \quad F(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

holomorph.

(ii) Sei  $D$  ein Gebiet. Sei  $g : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $g(\zeta, z)$  holomorph in  $z$  für jedes  $\zeta \in D$ . Dann ist

$$G(z) = \int_{\gamma} g(\zeta, z) d\zeta$$

holomorph.

**Beweis:** (i) Sei  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus |\gamma|$  fest. Dann gilt

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \quad \text{und daher}$$

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta .$$

Sei  $r = d(z_0, \gamma) > 0$ . Für  $|z - z_0| \leq r/2$  gilt  $|\zeta - z| \geq r/2$  für  $\zeta \in |\gamma|$ . Die Standardabschätzung für Integrale liefert

$$\left| \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| \leq \frac{2|z - z_0|}{r^3} \cdot \max_{\gamma} |\varphi| \cdot \ell(\gamma) ,$$

und für  $z \rightarrow z_0$  strebt dies gegen 0. Also existiert  $F'(z_0)$  und hat den behaupteten Wert. Somit ist  $F$  holomorph.

(ii) Zu zeigen (Morera): Für jedes Dreieck  $\Delta \subset\subset D$  gilt  $\int_{\partial\Delta} G(z) dz = 0$ .

$$\int_{\partial\Delta} G(z) dz = \int_{\partial\Delta} \int_{\gamma} g(\zeta, z) d\zeta dz = \int_{\gamma} \int_{\partial\Delta} g(\zeta, z) dz d\zeta = 0 ,$$

denn das innere Integral verschwindet (Goursat), da  $g(\zeta, z)$  holomorph in  $z$  ist.  $\square$