17. Vorlesung, 18.06.2013

3.1.4. **Definition.**

(i) Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ geschlossene Kurven, so nennt man die formale Summe $\Gamma := \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ einen *Zyklus* und $|\Gamma| := |\gamma_1| + \ldots \cup |\gamma_n|$ seinen Träger.
Ist $f : |\Gamma| \to \mathbb{C}$ stetig, dann definiert man

$$\int_\Gamma f(z)\,dz := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,dz \quad \text{und} \quad n(\Gamma, z) := \sum_{j=1}^n n(\gamma_j, z)\ ,\ z \notin |\Gamma|\ .$$

(ii) Sei Γ ein Zyklus in einem Gebiet D. Dann heißt Γ *nullhomolog in* D, wenn $n(\Gamma, z) = 0$ für alle $z \notin D$.
Zwei Zykel Γ_1, Γ_2 heißen *homolog in* D, wenn $n(\Gamma_1, z) = n(\Gamma_2, z)\ \forall\, z \notin D$.

(iii) Ein Zyklus Γ in D heißt *Randzyklus* von (der offenen Menge) $V \subset\subset D$, wenn

$$\partial V = |\Gamma| \quad , \quad n(\Gamma, z) = 1 \quad \forall\, z \in V \quad , \quad n(\Gamma, z) = 0 \quad \forall\, z \notin \overline{V}\ .$$

Analog wird eine *Randkurve* γ definiert als einfach geschlossene Kurve, die V berandet.

3.1.5. **Satz.** *Sei D ein Gebiet und Γ $\Gamma \subset D$ Zyklus in D.*
Dann sind äquivalent:

(i)

$$f \in \mathcal{O}(D) \quad \Rightarrow \quad \int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad ;$$

(ii)

$$f \in \mathcal{O}(D) \quad \Rightarrow \quad n(\Gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad , \quad z \in D \setminus |\Gamma| \quad ;$$

(iii) $\operatorname{Int}\Gamma \subset D$, *d.h.* Γ *ist nullhomolog in* D.

Beweis:
(i)$\Rightarrow$(ii):
Sei $g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$, $\zeta \in D \setminus \{z\}$, und $g(z) = f'(z)$. Dann ist g holomorph in D und

$$0 = \int_\Gamma g(\zeta)\,d\zeta = \int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - 2\pi i \cdot f(z) \cdot n(\Gamma, z)\ ,\ z \in D \setminus |\Gamma|\ .$$

(ii)$\Rightarrow$(i):
Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ und $z \in D \setminus |\Gamma|$. Dann ist $h(\zeta) = (\zeta - z) \cdot f(\zeta) \in \mathcal{O}(D)$ mit $h(z) = 0$. Somit

$$0 = n(\Gamma, z) \cdot h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta\ .$$

(i)$\Rightarrow$(iii):
Sei $z \notin D$. Dann gilt

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0\ , \quad \text{da} \quad f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z} \in \mathcal{O}(D)\ , \quad \text{wenn } z \notin D\ .$$

(iii)⇒(ii):

Sei $f \in \mathcal{O}(D)$. Zeige: $\quad \operatorname{Int}\Gamma \subset D \quad \Rightarrow \quad \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0 \quad .$

Definiere $g : D \times D \to \mathbb{C}$,

$$g(\zeta, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} & , \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & , \quad \zeta = z\ . \end{cases}$$

Dann ist zu zeigen, dass

(1) g stetig ist und $g(\zeta, z)$ holomorph in z.
(2) Dann folgt mit Lemma 3.1.3(ii), dass $G(z) = \int_\Gamma g(\zeta, z)\,d\zeta$ holomorph ist.
(3) $G = F|_D$ ist Einschränkung einer ganzen Funktion $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
(4) F ist beschränkt und sogar $F(z) \to 0$ für $z \to \infty$.
Dann folgt (Liouville) $F \equiv 0$.

Zu (1), $g(\zeta, z)$ ist holomorph in z und in ζ.
Für die Stetigkeit auf der Diagonalen sei $(z_0, z_0) \in D \times D$. Für $(\zeta, z) \in B_\delta(z_0) \times B_\delta(z_0)$ betrachte

$$g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) = \frac{1}{\zeta - z} \int\limits_{[\zeta, z]} \big(f'(w) - f'(z_0)\big)\,dw\ .$$

Nun ist f' stetig. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass $|f'(w) - f'(z_0)| < \varepsilon$ in $B_\delta(z_0)$.
Somit gilt auch (2).
Für (3) setze

$$F(z) = \begin{cases} G(z) & , \quad z \in D \\ H(z) & , \quad z \in \operatorname{Ext}\Gamma\ , \end{cases}$$

wobei $H(z) := \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ holomorph ist nach Lemma 3.1.3(i).
F ist wohldefiniert, da $G(z) = H(z)$ für $z \in D \cap \operatorname{Ext}\Gamma$. Aus der Voraussetzung $\operatorname{Int}\Gamma \subset D$ folgt nun $D \cup \operatorname{Ext}\Gamma = \mathbb{C}$, d.h. F ist eine ganze Funktion.
Zu (4): Für $R > \max|\Gamma|$ und $|z| > R$ gilt

$$|F(z)| = |H(z)| = \left| \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \right| \leq \ell(\Gamma) \cdot \max_\Gamma |f| \cdot \frac{1}{d(z, \Gamma)} \longrightarrow 0 \quad (z \to \infty)\ .$$

□