18. Vorlesung, 21.06.2013

3.2. Residuensatz.

3.2.1. **Definition.** Sei U offen und $a \in U$. Sei $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $r > 0$, so dass $\overline{B}_r(a) \subset U$. Dann heißt

$$\operatorname{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} f(z)\, dz$$

das *Residuum* von f in a.

Bemerkung.

(i) Ist $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$ die Laurent–Reihe um b, dann ist $\operatorname{res}_b f = a_{-1}$.

(ii) Ist f holomorph in a, dann ist $\operatorname{res}_a f = 0$.

(iii) Sei $h(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-b)^n$ ein Hauptteil um b und $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{b\}$ eine geschlossene Kurve. Dann ist $h : \mathbb{C} \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} h(z)\, dz = \frac{a_{-1}}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-b} = a_{-1} \cdot n(\gamma, b) = n(\gamma, b) \cdot \operatorname{res}_b h\ .$$

(iv) Ist a außerwesentliche Singularität von $f \not\equiv 0$, dann ist $\operatorname{ord}_a f = \operatorname{res}_a \left(\frac{f'}{f}\right)$.

3.2.2. **Satz** (Residuensatz)**.** *Sei D ein Gebiet, $S \subset D$ eine diskrete Menge in D und $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine geschlossene Kurve in $D \setminus S$ mit $\operatorname{Int} \gamma \subset D$ (d.h. γ ist nullhomolog in D). Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{z \in \operatorname{Int} \gamma} n(\gamma, z) \cdot \operatorname{res}_z f\ .$$

Beweis:

$$\left.\begin{array}{rl} z \in D \setminus S & \Rightarrow \ \operatorname{res}_z f = 0 \\ \overline{\operatorname{Int} \gamma} \text{ ist kompakt} & \Rightarrow \ \operatorname{Int} \gamma \cap S \text{ ist endlich} \end{array}\right\} \quad \text{Summe rechts ist endlich}$$

Sei $S \cap \operatorname{Int} \gamma = \{b_1, \dots, b_n\}$. Seien

$$h_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(j)} (z - b_j)^n$$

die Hauptteile von f um b_j. Dann ist $f - \sum\limits_{j=1}^{n} h_j$ holomorph in einer Umgebung V von $\overline{\operatorname{Int} \gamma}$. Wegen $\operatorname{Int} \gamma \subset V$ folgt mit dem Cauchy–Integralsatz

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz - \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\gamma} h_j(z)\, dz \\ &= \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz - 2\pi i \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, b_j) \cdot \operatorname{res}_{b_j} f\ . \end{aligned}$$

$\square$

3.2.3. **Satz** (Residuensatz für Zykel)**.** *Sei D ein Gebiet, $S \subset D$ eine diskrete Menge in D und $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\Gamma \subset D \setminus S$ nullhomologer Zyklus in D. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = \sum_{z \in \operatorname{Int} \Gamma} n(\Gamma, z) \cdot \operatorname{res}_z f \ .$$

Ist Γ Randzyklus von $V \subset\subset D$, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = \sum_{z \in V} \operatorname{res}_z f \ .$$

3.2.4. **Definition.** Sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist

$$\nu_f(a) := \operatorname{ord}_a(f - f(a))$$

die Vielfachheit, mit der a auf $f(a)$ abgebildet wird.

Ist f konstant, dann $\nu_f(a) = \infty$. Ansonsten gibt es ein $n \geq 1$, so dass in der Nähe von a gilt $f(z) = f(a) + (z-a)^n g(z)$ mit g holomorph in a und $g(a) \neq 0$. Dann ist $\nu_f(a) = n$. Für $n = 1$ gilt $g(a) = f'(a)$.

Bemerkung.

(i) $\nu_f(a) \geq 1 \quad , \quad \nu_f(a) = 1 \iff f'(a) \neq 0\,.$

(ii) f nicht–konstant $\quad \rightsquigarrow \quad \nu_f(a) = \operatorname{res}_a \left(\frac{f'}{f - f(a)}\right)$.

(iii) $N_f(w) = \sum\limits_{z \in f^{-1}(w)} \nu_f(z)$ ist die Anzahl der w–Stellen in G mit Vielfachheit.

Sei f holomorph in G und γ geschlossene Kurve in G. Sei $w \notin f(|\gamma|)$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f \circ \gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - w} = n(f \circ \gamma, w) \ .$$

Aus dem Residuensatz folgt sofort

3.2.5. **Satz** (Argumentprinzip)**.** *Sei G Gebiet und f holomorph in G. Seien $a_1, a_2, \ldots$ die paarweise verschiedenen w–Stellen von f und $\Gamma \subset G$ nullhomologer Zyklus in G mit $a_\mu \notin |\Gamma|$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = \sum_{\mu} n(\Gamma, a_\mu) \cdot \nu_f(a_\mu) \ .$$

Ist Γ Randzyklus von $V \subset\subset G$, dann ist dies die Anzahl $N_f(w, V)$ der w–Stellen in V, d.h. $N_f(w, V) = N_f(w) \cap V$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w}\, dz = N_f(w, V)\,.$$