19. Vorlesung, 25.06.2013

Bemerkung. Ist f meromorph mit den Polstellen $b_1, b_2, \ldots$, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = \sum_\mu n(\Gamma, a_\mu)\cdot \nu_f(a_\mu) + \sum_\nu n(\Gamma, b_\nu)\cdot \operatorname{ord}_{b_\nu} f\ .$$

Ist Γ Randzyklus, so muß man also noch die Anzahl der Polstellen $N_f(\infty, V)$ in V abziehen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = N_f(w,V) - N_f(\infty, V)\,.$$

Beispiel. Sei $\gamma = \partial B_r(a)$ Randkurve einer Kreisscheibe und f holomorph in $B_{2r}(a)$, dann ist

$$N_f(w, B_r(a)) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = n(f\circ\gamma, w)\ ,$$

d.h. die Bildkurve läuft so oft um den Punkt w wie w–Stellen in $B_r(a)$ liegen.

3.2.6. **Satz** (Rouché)**.** *Seien f, g holomorph in G und Γ Randzyklus von $V \subset\subset G$. Gilt $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in |\Gamma|$, so haben f und g gleichviele Nullstellen in V (mit Vielfachheit).*

Beweis: Sei $h_\lambda = f + \lambda(g-f)$, $\lambda \in [0,1]$. Dann ist $h_0 = f$ und $h_1 = g$. Wegen

$$|\lambda(g(z)-f(z))| \le |g(z)-f(z)| < |f(z)| \quad \text{für } z \in |\Gamma|$$

ist $h_\lambda(z) \neq 0$ auf $|\Gamma|$. Somit ist die Anzahl der Nullstellen in V

$$N_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f'(z)+\lambda(g'(z)-f'(z))}{f(z)+\lambda(g(z)-f(z))}\,dz\ .$$

Nun hängt N_λ stetig von λ ab, und da $N_\lambda \in \mathbb{Z}$, folgt $N_0 = N_1$. □

Es gibt eine Version des Satzes von Roucheé für meromorphe Funktionen: Seien f, g meromorph in G und Γ Randzyklus von $V \subset\subset G$. Gilt $|f(z)-g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in |\Gamma|$, so gilt $N_f(0,V) - N_f(\infty,V) = N_g(0,V) - N_g(\infty, V)$.
Wir geben zwei Anwendungen des Satzes von Rouché. Es kommt darauf an, bei vorgegebener Funktion f eine Vergleichsfunktion g mit bekannter Nullstellenzahl so zu finden, dass die Ungleichung im Satz von Rouché erfüllt ist.

3.2.7. **Satz** (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Ein nicht konstantes Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis:
O.b.d.A. sei $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$, $n \ge 1$.
Setze $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = P(z)$, $g(z) = z^n$. Für $r > 0$ hinreichend groß gilt

$$|f(w) - g(w)| = |a_{n-1}w^{n-1} + \ldots + a_0| < |w^h| = g(w)\ ,$$

da

$$\lim_{w\to\infty} \frac{a_{n-1}w^{n-1} + \ldots + a_0}{w^n} = 0\ .$$

Also folgt: $N_f(0, B_r(0)) = N_g(0, B_r(0)) = n$,
$N_f(0, D) =$ Anzahl der Nullstellen von f in D. □

Einen anderen Beweis haben wir in 2.5.4 mit Hilfe des Satzes von Liouville gegeben.

3.2.8. **Satz** (Hurwitz I). *Eine Folge $f_n \in \mathcal{O}(D)$ konvergiere lokal gleichmäßig im Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ gegen $f \in \mathcal{O}(D)$, Es sei U beschränkt und offen mit $\overline{U} \subset D$, so dass f keine Nullstelle auf ∂U hat. Dann gibt es einen Index $m_U \in \mathbb{N}$, so dass alle Funktionen f, f_n mit $n \geq n_U$ in $\overline{U}$ gleich viele Nullstellen haben.*

Beweis:
Schritt 1: $U = B_r(z_0)$. Es gilt $\varepsilon = \min\{|f(z)| : z \in \partial U\} > 0$. $f_n \to f$ gleichmäßig auf $\partial U \Rightarrow \exists n_U$, so dass $\|f_n - f\|_{\partial U} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_U \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \partial U$, $n \geq n_U$. Rouché $\Rightarrow$ Behauptung.
Schritt 2: U beliebig. $\overline{U}$ kompakt $\Rightarrow f$ hat in $\overline{U}$ nur endlich viele Nullstellen (Identitätssatz). Sie liegen alle in $U = \overline{U} \setminus \partial U$, es gibt also paarweise disjunkte Kreisscheiben $U_1, \dots, U_k$ in U, so dass f in $K = \overline{U} \setminus (U_1 \cup \ldots \cup U_k)$ nicht verschwindet. Da $f_n \to f$ gleichmäßig auf K, sind fast alle f_n Nullstellen-frei in K.
Schritt 1 $\Rightarrow$ für fast alle f_n gilt $N_{f_n}(0, U_j) = N_f(0, U_j)$ also $N_{f_n}(0, U) = N_f(0, U)$. □

3.2.9. **Satz** (Hurwitz II). *Es sei $f_n \in \mathcal{O}(D)$ eine Folge von injektiven Funktionen, die in D gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{O}(D)$ konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder injektiv.*

Beweis:
Angenommen f ist weder injektiv noch konstant. Seien $a, b \in D$ mit $a \neq b$, $f(a) = f(b)$. Sei $r > 0$ mit $B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$. Die Funktion $f - f(a)$ hat Nullstellen in a und b und ist nicht identisch mit Null. Nach 3.2.8 haben fast alle Funktionen $f_n - f(a)$ fast gleich viele Nullstellen in $B_r(a)$ und $B_r(b)$, d.h. f_n nimmt den Wert $f(a)$ in zwei verschiedenen Stellen an. Widerspruch. □

3.3. **Anwendung des Residuensatzes auf die Berechnung von Integralen.** Zunächst betrachten wir *trigonometrische Integrale.*

3.3.1. **Satz.** *Sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion. Q habe keine Nullstelle auf $|z| = 1$. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{w \in \mathbb{D}} \operatorname{res}_w \widetilde{R}$$

mit $\widetilde{R}(z) = \frac{1}{z} R\big(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\big)$.

Beweis:
Sei $z \in S^1$, $z = e^{it} = \cos t + i \sin t$. Dann

$$\cos t = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \quad , \quad \sin t = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big) ,$$

also

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = \int\limits_{\partial \mathbb{D}} R\left(\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big), \frac{1}{2i}\Big(z - \frac{1}{z}\Big)\right) \frac{1}{iz}\, dz = \frac{1}{i} 2\pi i \sum_{w \in \mathbb{D}} \operatorname{res}_w \widetilde{R} .$$

□

Beispiel. Sei $w \in \mathbb{C}$, $|w| \neq 1$. Für $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2w\cos t + w^2} = I$ gilt

$$R(x, y) = \frac{1}{1 - 2wx + w^2} ,$$
$$\widetilde{R}(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - 2w\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + w^2} = \frac{1}{z} \frac{z}{z - wz^2 - w + w^2 z} = \frac{1}{(z - w)(1 - wz)} .$$

$\widetilde{R}$ hat genau einen Pol in $\mathbb{D}$, nämlich w falls $|w| < 1$ oder $\frac{1}{w}$, falls $|w| > 1$. Ist $|w| < 1$, so ist

$$\operatorname{res}_w \widetilde{R} = \lim_{z \to w} (z - w)\widetilde{R}(z) = \frac{1}{1 - w^2} \ .$$

Ist $|w| > 1$, so ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_w \widetilde{R} &= \lim_{z \to \frac{1}{w}} \left(z - \frac{1}{w}\right)\widetilde{R}(z) \\
&= \lim_{z \to \frac{1}{w}} \frac{zw - 1}{w} \cdot \frac{1}{(z - w)(1 - wz)} \\
&= -\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\frac{1}{w} - w} = \frac{1}{w^2 - 1} \\
&\Rightarrow \quad I = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-w^2} & , \ |w| < 1 \\ \frac{2\pi}{w^2-1} & , \ |w| > 1 \ . \end{cases}
\end{aligned}$$