SoSe 2009 Marinescu / Erat

Funktionentheorie – Klausur

Name: ______________________________ Matrikelnr.: ____________________

Bezeichnungen:
$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ sei die Einheitskreisscheibe und
$\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$ die geschlitzte Ebene.

1. Aufgabe (4+4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{z(2-z)}{4}$. Zeige: f ist injektiv und das Bild $f(\mathbb{D})$ enthält eine offene Kreisscheibe vom Radius $1/2$.

(b) Zeige: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} z < 0$ gilt $|e^z - 1| < |z|$.

2. Aufgabe (2+4+4 Punkte)

(a) Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 1\}$. Zeige, dass

$$T : G \to \mathbb{D} \quad , \quad T(z) = \frac{z}{2-z} \ ,$$

bijektiv ist.

(b) Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $\operatorname{Re} f(z) < 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Zeige, dass

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1-|z|} \quad \text{für alle } |z| < 1 \ .$$

(c) Bestimme alle ganzen Funktionen f mit $f \circ f = f$.

3. Aufgabe (3+3 Punkte)

(a) Formuliere den *Identitätssatz.*

(b) Formuliere den *Satz von Liouville.*

(bitte wenden)

4. Aufgabe (2+4+2 Punkte)

(a) Berechne $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)}$.

(b) Sei $a > 0$. Berechne $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx$.

(c) Definiere den Begriff *Residuum*.

5. Aufgabe (2+4+4 Punkte)

Für eine geschlossene Kurve γ und $z \notin |\gamma|$ sei $n(\gamma, z)$ die Windungszahl. Zeige:

(a) $\mathbb{C}_-$ ist einfach zusammenhängend.

(b) Ist γ eine geschlossene Kurve in $G = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, dann ist γ homolog in G zu $\widetilde{\gamma} = n(\gamma, 0)c_0 + n(\gamma, 1)c_1$, wobei $c_0 : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $c_0(t) = \frac{1}{2}e^{2\pi it}$, und $c_1 = 1 + c_0$.

(c) Die Kurven

$$\gamma_0 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{C} \quad , \quad \gamma_0(t) = e^{it} \ , \qquad \text{und}$$
$$\gamma_1 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{C} \quad , \quad \gamma_1(t) = e^{i(\pi - t)} \ ,$$

sind homotop in $\mathbb{C}$, jedoch nicht in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6. Aufgabe (4+4 Punkte)

Sei G ein Gebiet und γ eine glatte geschlossene Kurve in G. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ für alle holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$.

(ii) $\displaystyle n(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, $z \in G \setminus |\gamma|$, für alle $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

Viel Erfolg! (Gesamtpunktzahl: 50 Punkte)