1. Aufgabe.

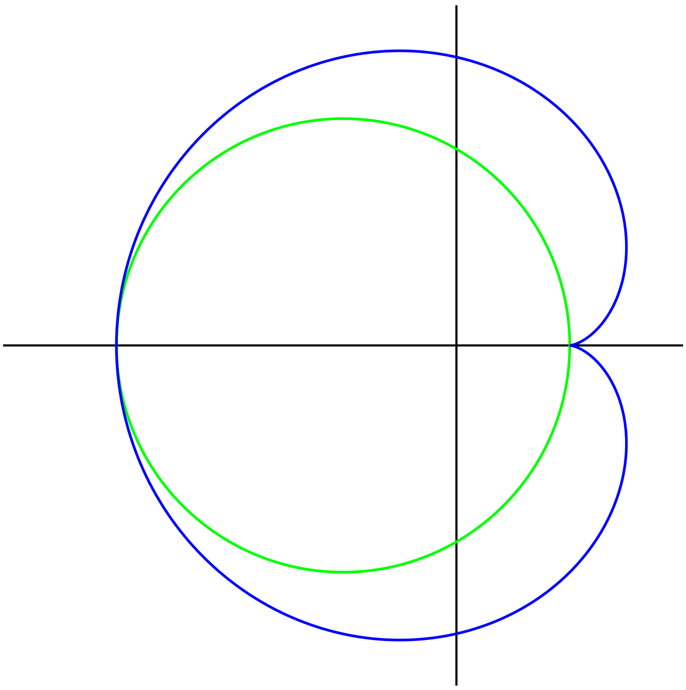
(a) Sei $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}\,,\ f(z) = \dfrac{z(2-z)}{4}\,.$ Wegen

$$f(z) = f(w) \iff 2(z-w) = z^2 - w^2 = (z-w)(z+w)$$

gilt entweder $z = w$ oder $z + w = 2$ (jedoch nicht in $\mathbb{D}$). Somit ist f injektiv in $\overline{\mathbb{D}}$. Betrachte $f(e^{it})$. Da $f(1) = 1/4$ und $f(-1) = -3/4$, probiere $-1/4$ als Mittelpunkt. D.h. wenn $d(-1/4, f(\partial\mathbb{D})) \geq 1/2$, dann folgt $D_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{4}) \subset f(\mathbb{D})$, denn $-1/4 \in f(\mathbb{D})$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{it}(2-e^{it})}{4} + \frac{1}{4}\right| \geq \frac{1}{2} \iff |e^{it}(2-e^{it})+1| \geq 2 \iff |e^{2it} - 2e^{it} - 1|^2 \geq 4 \\ \iff (e^{2it} - 2e^{it} - 1)(e^{-2it} - 2e^{-it} - 1) \geq 4 \\ \iff 1 - 2e^{it} - e^{2it} - 2e^{-it} + 4 + 2e^{it} - e^{-2it} + 2e^{-it} + 1 \geq 4 \\ \iff 2 \geq e^{2it} + e^{-2it} = 2\cos 2t \iff \cos 2t \leq 1\end{aligned}$$

Sei $\gamma(t) = f(e^{it})$. Da $|\gamma(t) - \gamma(0)| < 1$ für $t \neq \pi$, ist dies auch die größte Kreisscheibe in $f(\mathbb{D})$, denn $\quad |e^{2it} - 2e^{it} + 1| \leq 4 \iff 5 + 4\cos t - \cos 2t \geq 0 \quad$ und Gleichheit nur für $t = \pi$ in $[0, 2\pi]$.



(b) Sei $\operatorname{Re} z < 0$. Dann gilt

$$|e^z - 1| = \Big| \int\limits_{[0,z]} e^\zeta \, d\zeta \Big| \leq |z| \cdot \max_{\zeta \in [0,z]} |e^\zeta| = |z|\ .$$

Es gilt sogar $|e^z - 1| < |z|$, da $|e^\zeta| < 1$ für $\zeta \in (0, z]$.

2. Aufgabe.

(a) Sei $G = \{\operatorname{Re} z < 1\}$ und $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $T(z) = \dfrac{z}{2-z}$.

$$\left|\frac{z}{2-z}\right| < 1 \iff |z| < |2-z| \iff |z|^2 < 4 - 4\operatorname{Re} z + |z|^2 \iff \operatorname{Re} z < 1$$

Somit $|T(z)| < 1 \iff \operatorname{Re} z < 1$ bzw. $\operatorname{Re} z \geq 1 \iff |T(z)| \geq 1 \rightsquigarrow T(G) = \mathbb{D}$.
Insbesondere $T(1+iy) = \dfrac{1+iy}{1-iy} = \dfrac{a}{\overline{a}} \in \partial\mathbb{D}$.
Wegen $\dfrac{z}{2-z} = \dfrac{w}{2-w} \iff z = w$ ist T injektiv. Es gilt: $T^{-1}(z) = \dfrac{2z}{1+z}$.
(b) Sei $f : \mathbb{D} \to G$ mit $f(0) = 0$. Dann gilt $T \circ f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ mit $T \circ f(0) = 0$.
Mit dem Lemma von Schwarz folgt $|T \circ f(z)| \leq |z|$ und weiter

$$\left|\frac{f(z)}{2-f(z)}\right| \leq |z| \quad \rightsquigarrow \quad |f(z)| \leq |z|\cdot|2-f(z)| \leq 2|z| + |z|\cdot|f(z)|$$

$$\rightsquigarrow \quad |f(z)|(1-|z|) \leq 2|z| \quad \rightsquigarrow \quad |f(z)| \leq \frac{2|z|}{1-|z|}.$$

(c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist entweder f konstant oder $f(\mathbb{C}) = W$ offen. Wegen $f \circ f = f$ gilt $f|_W = \mathrm{id}_W$, und da W offen ist, folgt mit Identitätssatz $f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. f ist also konstant oder die Identität.

4. Aufgabe.

(a) Sei

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \quad , \quad f'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2} \quad , \quad f''(z) = \frac{2}{(z-1)^3} \quad .$$

Benutze

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

mit $z_0 = -1$, $n = 2$. Dann folgt

$$f''(-1) = -\frac{1}{4} = \frac{2}{2\pi i} \int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)}$$

$$\rightsquigarrow \quad \int\limits_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{\pi}{4i}$$

4b

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2} \pi e^{-a} \quad , \ a > 0.$$

Lösung:

Der Integrand ist gerade also $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\, dx$

Die Fkt $x \cos x$ ist ungerade also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+a^2} e^{ix}\, dx$$

Da $\operatorname{grad}(x^2+a^2) \geq \operatorname{grad}(x) + 1$ folgt (siehe 3.3.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+a^2}\, dx = 2\pi i \sum_{x \in \mathbb{H}} \operatorname{res}_x \left(\frac{z e^{iz}}{z^2 + a^2} \right)$$

$\frac{z e^{iz}}{z^2+a^2}$ hat einfache Pole bei ia und $-ia$. Da $a > 0$ gilt $ia \in \mathbb{H}$, $-ia \notin \mathbb{H}$. Wegen $\frac{z}{z^2+a^2} = \frac{z}{(z-ia)(z+ia)}$

gilt $\operatorname{res}_{ia} \frac{z e^{iz}}{z^2+a^2} = \left. \frac{z e^{iz}}{z + ia} \right|_{z=ia} = \frac{ia\, e^{i(ia)}}{2ia} = \frac{e^{-a}}{2}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+a^2}\, dx = \pi i e^{a}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \pi e^{-a}.$$

5

(a) $\mathbb{C}_-$ Sterngebiet $\Rightarrow$ $\mathbb{C}_-$ einfach zusammenhängend

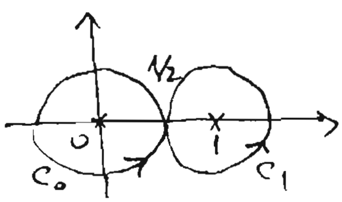
(z.B. weil die Def. zugreift: $\pi_1(\mathbb{C}_-) = \pi_1(\mathbb{C}_-, x_0) = \{e\}$ wobei x_0 ein Zentrum von $\mathbb{C}_-$ ist; oder weil alle holo. Fkt eine Stammfkt besitzen - siehe 2.3.2 & 3.2.9 (e))

Man kann auch argumentieren, dass $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C}_- = \mathbb{R}_- \cup \{\infty\}$ ist zshg - siehe 3.2.9(c) oder $\mathbb{C}_-$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)$ durch Polarkoordinaten.

(b) Z.z. $n(\tilde{\gamma}, z) = n(\gamma, z)$ für $z \in \complement\, \mathbb{C}\setminus\{0,1\} = \{0,1\}$.

$n(\tilde{\gamma}, z) = n(\gamma, 0)\, n(c_0, z) + n(\gamma, 1)\, n(c_1, z)$

$n(c_0, z) = \begin{cases} 1, & z = 0 \\ 0, & z = 1 \end{cases} \qquad n(c_1, z) = \begin{cases} 0, & z = 0 \\ 1, & z = 1 \end{cases}$



Also $n(\tilde{\gamma}, 0) = n(\gamma, 0)\, \underbrace{n(c_0, 0)}_{=1} + n(\gamma, 1)\, \underbrace{n(c_1, 0)}_{=0}$

$= n(\gamma, 0)$

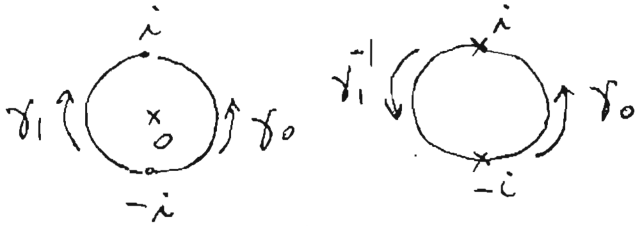
Analog $n(\tilde{\gamma}, 1) = n(\gamma, 1)$.

(c) • γ_0 und γ_1 haben denselben Anfangspkt und denseblen Endpkt.

$\mathbb{C}$ konvex $\Rightarrow$ $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in $\mathbb{C}$ (Bem. 3.4.2 (1))

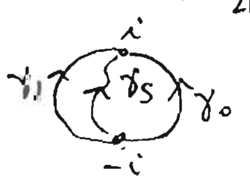
• Wäre $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in $\mathbb{C}^*$, so wäre $\gamma_0 * \gamma_1^{-1} \sim 0$ in $\mathbb{C}^*$

Aber $n(\gamma_0 * \gamma_1^{-1}, 0) = 1$ ↯



• Anderes Argument:
Angenommen $\gamma_0 \sim \gamma_1$ in $\mathbb{C}^*$; sei H eine Homotopie, $\gamma_s = H(\cdot, s)$
Dann ist $s \to \int_{\gamma_s} \frac{dz}{z}$ stetig

und weil $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}$ es gibt s_0 mit $\int_{\gamma_{s_0}} \frac{dz}{z} = 0$.



Aber $\int_{\gamma_s \circ \gamma_0^{-1}} \frac{dz}{z} \in 2\pi i\mathbb{Z}$ und $\int_{\gamma_0} \frac{dz}{z} = \pi i$

$\Rightarrow \int \ldots dz/z \in (2\mathbb{Z}+1)\pi i$ ↯