SoSe 2009 Marinescu / Erat

# Funktionentheorie – Klausur

Name: ______________________________ Matrikelnr.: ____________________

**Bezeichnungen:**
$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ sei die Einheitskreisscheibe und
$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene.

## 1. Aufgabe (4+4+2 Punkte)

(a) Sei $c \in \mathbb{C}$ und $f(z) = z^2 + c$. Definiere die Folge $z_0 = 0$, $z_n = f(z_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass gilt: $|c| > 2 \;\Rightarrow\; z_n \to \infty$.

(b) Sei $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ein reelles Polynom, d.h. $a_j \in \mathbb{R}$. Zeige: Ist $c \in \mathbb{C}$ Nullstelle von $p$, dann auch $\bar{c}$. Folgere, dass jedes reelle Polynom vom Grad $\geq 3$ Produkt zweier nicht–konstanter reeller Polynome ist.

(c) Sei $p(z) = z + az^2$ mit $|a| \leq 1/2$. Zeige, dass $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ injektiv ist.

## 2. Aufgabe (2+2+2+2 Punkte)

(a) Zeige: Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, dann gilt $|f'(0)| \leq 1$.

(b) Bestimme die Anzahl der Nullstellen von $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in $\{|z| < 1\}$.

(c) Seien $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$. Zeige: Gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$, dann gilt $f \equiv g$.

(d) Sei $n > k$ und $p(z) = z^n + az^k$ ein Polynom. Zeige: $p(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \;\Rightarrow\; a = 0$.

## 3. Aufgabe (3+3 Punkte)

(a) Formuliere das *Schwarzsche Lemma*.

(b) Formuliere den *Satz von der Gebietstreue*.

(bitte wenden)

**4. Aufgabe** (2+4+4 Punkte)

(a) Berechne $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i}\,dz\,.$

(b) Seien $a, b > 0$, $a \neq b$. Berechne $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx\,.$

(c) Sei $f$ eine rationale Funktion, bei der der Nennergrad um mindestens 2 größer ist als der Zählergrad. Zeige $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{C}} \operatorname{res}_z f = 0\,.$

**5. Aufgabe** (2+2+2 Punkte)

(a) Definiere die Begriffe *nullhomotop* und *einfach zusammenhängend*.

(b) Sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist dann $f(G)$ einfach zusammenhängend? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(c) Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \exp(iz)$. Bestimme $f(\mathbb{H})$. Ist $f$ injektiv?

**6. Aufgabe** (3+3+4 Punkte)

(a) Sei $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom und $D = D_r(a) = \{|z-a| < r\}$ eine Kreisscheibe, auf deren Rand keine Nullstelle von $p$ liegt, d.h. $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \partial D$. Zeige, dass

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz$$

die Anzahl der Nullstellen von $p$ in $D$ ist (gezählt mit Vielfachheit).

(b) Sei $f \not\equiv 0$ holomorph in $a$. Zeige $\operatorname{res}_a(f'/f) = \operatorname{ord}_a f\,.$

(c) Beweise den *Satz von Hurwitz*:
Sei $G$ ein Gebiet und seien $f_n : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei in $G$. Konvergiert $f_n$ lokal gleichmäßig gegen $f : G \to \mathbb{C}$ und ist $f \not\equiv 0$, dann hat auch $f$ keine Nullstelle in $G$.

Viel Erfolg! (Gesamtpunktzahl: 50 Punkte)