SS 13 Marinescu

1. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Abgabe: 22–23.04.2013 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Bestimme die Kartesische und Polarform der Zahl $z = -\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$ · Berechne z^6.

(b) Berechne $(1+i)^{200}$, $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^n$, (wobei $n \in \mathbb{N}$), $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $w = a + ib \in \mathbb{C}$. Bestimme $z = x + iy \in \mathbb{C}$ so dass $z^2 = w$.

(b) Bestimme die Quadratwurzeln von $w = \sqrt{3} + i$ in Kartesichen und Polarform. Berechne $\cos\frac{\pi}{12}$ ·

(c) Löse die Gleichungen $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$, $iz^8 + iz^4 + 1 + i = 0$.

(d) Löse die Gleichungen $z^6 = -\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$, $z^5 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$ ·

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeige, dass die stereographische Projektion $\sigma : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ ein Homöomorphismus ist.

(b) Zeige, dass die stereographische Projektion Kreise auf S^2 auf Kreise bzw. Geraden in $\widehat{\mathbb{C}}$ abbildet (eine Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$ ist eine gewöhnliche Gerade zusammen mit dem Punkt ∞).

(c) Eine Spiegelung von S^2 an der Äquatorebene induziert eine Selbstabbildung von $\widehat{\mathbb{C}}$. Welche?

(d) Die euklidische Metrik auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ wird mittels der stereographischen Projektion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ übertragen: Ist $z = \sigma(\xi)$ und $w = \sigma(\eta)$ so erhält man die *chordale Metrik* $\chi(z, w) = \|\xi - \eta\|$. Zeige, dass χ eine Metrik ist. Berechne explizit $\chi(z, \infty)$ für $z \neq \infty$ und $\chi(z, w)$ für $z, w \neq \infty$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

(a) Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Zeige, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}\,.$$

Finde die komplexen Zahlen z mit $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$.

(b) Sei $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Zeige $|z| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.