2. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: 29–30.04.2013 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

Über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen gleichseitige Dreiecke ABC', BCA' bzw. ACB' mit den Mittelpunkten D, E bzw. F errichtet. Zeige dass das Dreieck DEF gleichseitig ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Jeder komplexen Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2)$ wird die Möbiustransformation $M_A : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $M_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ zugeordnet.

(a) Zeige, dass $M_A : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ ein Homöomorphismus ist und finde $(M_A)^{-1}$.

(b) Zeige, dass die Menge $\mathcal{M}$ aller Möbiustransformationen eine Gruppe ist (wobei die Gruppenverknüpfung die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist).

(c) Zeige, dass die Abbildung $\mathrm{GL}(2) \to \mathcal{M}$, $A \mapsto M_A$ ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathbb{C}I_2$ ist.

(d)Zeige, dass eine von der Identität verschiedene Möbiustransformation mindestens einen und höchstens zwei Fixpunkte besitzt.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Das Doppelverhältnis vier verschiedener komplexer Zahlen ist als $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}$ definiert.

(a) Zeige: Vier Punkte z_i, $i = 1, \ldots, 4$ in der Ebene liegen genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ reell ist.

(b) Zeige, dass eine Möbiustransformation M_A das Doppelverhältnis nicht verändert, d. h. $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4)$, wobei $w_j = M_A(z_j)$ für $j = 1, \ldots, 4$.

(c) Eine Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$ heißt verallgemeinerte Kreislinie, falls sie entweder eine Kreislinie in $\mathbb{C}$ oder eine (nicht notwendig durch 0 gehende) Gerade vereinigt mit dem Punkt ∞ ist. Zeige, dass Möbiustransformationen verallgemeinerte Kreislinien auf verallgemeinerte Kreislinien abbilden.

(d) Es seien (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) zwei Tripel jeweils verschiedener Punkten in $\widehat{\mathbb{C}}$. Zeige, dass es genau eine Möbiustransformation M_A gibt mit $M_A(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Betrachte $A = \{x + i \sin \frac{1}{x} : x > 0\}$.

(a) Zeige, dass A zusammenhängend und wegzusammenhängend ist.

(b) Bestimme $\bar{A}$ und zeige, dass $\bar{A}$ zusammenhängend ist. Zeige, dass $\bar{A}$ nicht wegzusammenhängend ist.