SS 13 Marinescu

3. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: 6–7.05.2013 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Sei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene. Finde eine Möbiustransformation M_A die $\mathbb{H}$ biholomorph auf $\mathbb{D}$ abbildet. Ansatz: Suche M_A, so dass den Rand von $\mathbb{H}$ (d. h. die reelle Achse) auf dem Rand von $\mathbb{D}$ (d. h. die Kreislinie) abbildet, z. B. $M_A(0) = -1$, $M_A(1) = -i$, $M_A(\infty) = 1$.

(b) Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{H} \to \mathbb{C}_-$, $z \longmapsto -z^2$ biholomorph ist. Gebe eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{D} \to \mathbb{C}_-$ an.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $D \in \mathbb{C}^*$ ein Gebiet.

(a) Sei $\ell : D \to \mathbb{C}$ eine Logarithmusfunktion. Die folgenden Aussagen über eine Funktion $\hat{\ell} : D \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) $\hat{\ell}$ ist eine Logarithmusfunktion in D.

(ii) Es gibt $n \in \mathbb{Z}$ mit $\hat{\ell} = \ell + 2\pi i n$.

(b) Die folgenden Aussagen über eine holomorphe Funktion $\ell : D \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) ℓ ist eine Logarithmusfunktion.

(ii) Es gilt $\ell'(z) = \frac{1}{z}$ und es gibt $a \in D$ mit $\exp(\ell(a)) = a$.

(c) Sei $\ell(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$. Zeige dass ℓ eine Logarithmusfunktion in $B_1(1)$ ist, nämlich $\ell(z) = \log z$, $z \in B_1(1)$, wobei log den Hauptzweig des Logarithmus bezeichret.

(d) Zeige, dass in $\mathbb{C}^*$ existieren keine Logarithmusfunktionen.

3. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Zeige, dass $2i \sin z = e^{-iz}(e^{2iz} - 1)$, $2\cos z = e^{i(\pi - z)}\left(e^{2i(z-\frac{1}{2}\pi)} - 1\right)$ und $\sin z = 0 \Leftrightarrow z \in \pi\mathbb{Z}$, $\cos z = 0 \Leftrightarrow z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

(b) Definiere die Cotangens - und Tangensfunktion durch $\cot z := \dfrac{\cos z}{\sin z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$ und $\sin z := \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Zeige, dass cot und tan holomorph sind und $\cot' z = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$, $\tan' z = \dfrac{1}{\cos^2 z}$.

(c) Zeige, dass $\cot z = i\left(1 - \dfrac{2}{1 - e^{2iz}}\right)$, $\tan z = i\left(1 - \dfrac{2}{1 + e^{-2iz}}\right)$.

(d) Zeige, dass cot und tan periodisch von Minimalperiode π sind.

Bitte wenden

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Betrachte die Arcustangensreihe $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

(a) Zeige, dass die Reihe a Konvergenzradius 1 hat.

(b) Zeige, dass $a'(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z \in B_1(0) =: \mathbb{D}$.

(c) Da $\tan 0 = 0$, ist die Funktion $a(\tan z)$ in einer Kreisscheibe $B_r(0)$ definiert und holomorph. Zeige, dass $a(\tan z) = z$ in $B_r(0)$.

Die Identität $a(\tan z) = z$ macht die Bezeichnung $a = \arctan$ (Arcustangens) verständlich.

(d) Zeige, dass $\tan(\arctan z) = z$ für $z \in \mathbb{D}$.