4. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: 13–14.05.2013 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Sei $\Delta \subset \mathbb{C}$ ein offenes Dreieck. Sei f holomorph in Δ und stetig auf $\overline{\Delta}$. Zeige, dass $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

(ii) Sei D ein Sterngebiet und L eine Gerade. Sei f stetig in D und holomorph in $D \setminus L$. Zeige, dass f eine Stammfunktion auf D besitzt und ist holomorph in D.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $G = \mathbb{C} \setminus \{iy \in \mathbb{C} : |y| \geq 1, y \in \mathbb{R}\}$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}\,, f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ · Bestimme eine Stammfunktion von $f|_G$. Besitzt f eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$? Berechne $\displaystyle\int_{|z-i|=1} f(z)\,dz\,,\ \int_{|z+i|=1} f(z)\,dz$ und $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,dz$.

3. Aufgabe (4 Punkte)

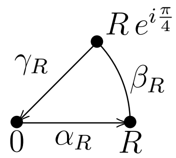
(i) Sei $R > 0$ und $\beta_R : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $\beta_R(t) := Re^{it}$. Zeige, dass

$$\left| \int_{\beta_R} e^{iz^2}\, dz \right| \leq \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}) < \frac{\pi}{4R}\,.$$

(Tip: Benutze die Ungleichung $\frac{2}{\pi} \cdot x \leq \sin x \leq x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.)

(ii) Zeige, dass

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\, dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,,$$



Dabei kann das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\alpha e^{iz^2}\, dz$ längs der Kurve $\alpha := \alpha_R * \beta_R * \gamma_R$ betrachtet, und der Cauchysche Integralsatz und die Abschätzung aus (i) benützt werden können.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{z+i}\, dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) := 2e^{it}.$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2(z^2+16)}\, dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) := 2e^{it}.$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z^2 - 15z + 30}{z^3 - 10z^2 + 32z - 32}\, dz, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) := 3e^{it}.$

(d) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) := 1 + e^{it}.$