5. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Abgabe: 27–28.05.2013 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)

(a) Seien $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ und $g : \mathbb{C}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ · Für $a \in \mathbb{C}^*$ (bzw. $a \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$) finde die Taylorreihe von f (bzw. g) um a und berechne ihre Konvergenzradius.

(b) Die Funktion $z \mapsto \dfrac{1}{1-z-z^2}$ ist holomorph in 0. Zeige, dass ihre Taylorreihe um 0 die Form

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n$$

hat, wobei $(f_n)_{n\geq 0}$ die Fibonacci-Zahlen sind: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Was ist ihre Konvergenzradius?

2. Aufgabe (4 Punkte)

Die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ ist in 0 holomorph fortsetzbar und ihre Taylorreihe um 0 schreibt man in der Form

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n ,$$

wobei die B_n Bernoullische Zahlen genannt werden.

(a) Berechne B_0, B_1, B_2, B_3. Zeige, dass $f(z) + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2i} z \cot(\frac{1}{2i}z)$ und $f(z) + \frac{1}{2}z$ eine gerade Funktion ist. Zeige, dass $B_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für $n, p \in \mathbb{N}$, bezeichne mit $S_n^p = 1^p + \ldots + n^p$. Berechne S_n^1, S_n^2, S_n^3, S_n^4. Gibt es eine Gesetzmässigkeit bei der Bildung von S_n^p? Bernoulli hat die folgende Formel erraten

$$S_n^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{1}{2}\binom{p}{1} B_2 n^{p-1} + \frac{1}{4}\binom{p}{3} B_4 n^{p-3} + \\ + \frac{1}{6}\binom{p}{5} B_6 n^{p-5} + \frac{1}{8}\binom{p}{7} B_8 n^{p-7} + \ldots$$

Zeige, dass

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{S_n^p}{p!} z^p = 1 + e^z + \ldots + e^{nz} = \frac{z}{e^z-1} \cdot \frac{e^{(n+1)z} - 1}{z}$$

und beweise die Bernoullische Formel durch Koeffizientenvergleich.

Bitte wenden

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}^*$ offen und $\alpha \in \mathbb{C}$. Eine stetige Abbildung $f : U \to \mathbb{C}$ heisst Zweig von z^α auf U falls ein Zweig $\ell : U \to \mathbb{C}$ des Logarithmus existiert und $f(z) = e^{\alpha \ell(z)}$, $z \in U$.
(a) Zeige, dass f holomorph ist und $f'(z) = \frac{\alpha}{z} f(z)$, $z \in U$.
(b) Sei $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $g(z) = e^{\alpha \log(1+z)}$, wobei log den Hauptzweig des Logarithmus ist (also ist g ein Zweig von $(1+z)^\alpha$). Zeige, dass

$$g(z) = (1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n \,, \quad \text{für } z \in \mathbb{D}\,.$$

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Wir nennen Hauptzweig der k-ten Wurzel auf $\mathbb{C}_-$ die Funktion $\mathbb{C}_- \ni z \mapsto \sqrt[k]{z} := \exp(\frac{1}{k} \log z)$.
(a) Sei $U = \mathbb{C} \backslash \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Zeige, dass für alle $w \in U$ gilt $1 - w^2 \in \mathbb{C}_-$ und $\operatorname{Re}(iw + \sqrt{1-w^2}) > 0$, wobei $\sqrt{z}$ den Hauptzweig der Quadratwurzel ist.
(b) Sei $f : U \to \mathbb{C}$, $f(w) = \frac{1}{i} \log(iw + \sqrt{1-w^2})$. Zeige, dass $\sin(f(w)) = w$ für alle $w \in U$ und $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1,1]$. Daher wird die Funktion f durch arcsin (Arcussinus) bezeichnet.
Gebe die Taylorreihe von f um 0 an. Was ist ihre Konvergenzradius?