6. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Abgabe: 3–4.06.2013 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)
Gibt es jeweils eine in einer geeigneten Nullumgebung holomorphe Funktion f mit $f(1/n) = a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine der folgenden Folgen ist?

(a) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, \dots$ bzw.

(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \dots$ bzw.

(c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$

Gibt es eine holomorphe Funktion f in einer geeigneten Nullumgebung mit $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}$?

2. Aufgabe (4 Punkte)
(a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante ganze Funktion. Zeige, dass das Bild $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft $\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Man zeige, dass f konstant ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann ist $P(\mathbb{C})$ offen nach dem Satz von der Gebietstreue. Zeige, dass $P(\mathbb{C})$ auch abgeschlossen ist, und folgere $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Zeige, dass in dieser Aussage der Fundamentalsatz der Algebra als Spezialfall enthalten ist.

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein (nichtleeres) Gebiet und $S \subset D$ eine Teilmenge, die keinen Häufungspunkt in D hat. Zeige, dass dann auch $D \setminus S$ ein Gebiet ist.