

8. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: 17–18.06.2013 in den Übungen

1. Aufgabe

(4 Punkte)

Bestimme jeweils den Typ der Singularität an der Stelle a für die durch die folgenden Funktionsausdrücke definierten Funktionen:

$$(a) f(z) := \frac{\exp(z) - 1 - z}{z}, \quad a = 0.$$

$$(b) f(z) := \frac{1}{\exp(z) - 1}, \quad a = 0.$$

$$(c) f(z) := \frac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3}, \quad a = 1.$$

$$(d) f(z) := z \cos\left(\frac{1}{z-1}\right), \quad a = 1.$$

2. Aufgabe

(4 Punkte)

Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) := \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$, entwickle man in den Ringgebilden

$$K_{0,1}(0), \quad K_{1,2}(0), \quad K_{2,\infty}(0)$$

jeweils in eine Laurent-Reihe. (Notation: $K_{r_1, r_2}(a) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-a| < r_2\}$.)

3. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei $r > 0$ und $D := B_r(0) \setminus \{0\}$ und

$f_1 : D \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $z \mapsto f_1(z) := \exp(1/z)$,

$f_2 : D \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $z \mapsto f_2(z) := \exp(1/z) + \exp(-1/z)$.

Zeige (ohne Verwendung des Satzes von Picard):

$$f_1(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f_2(D) = \mathbb{C}.$$

Zusatzaufgabe

(+ 4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $D \neq \emptyset$, und $S \subset D$ eine diskrete Teilmenge, $S \neq \emptyset$, und $f : D \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeige:

(a) Kein Punkt $s \in S$ ist eine wesentliche Singularität.

(b) Ist $s \in S$ ein Pol von f , so ist s ein Pol erster Ordnung.