SS 13 Marinescu

9. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Abgabe: 24–25.06.2013 in den Übungen

1. Aufgabe (4 Punkte)
(a) Sei $f \not\equiv 0$ eine meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ und $A = N(f) \cup P(f)$ die Menge der Null- und Polstellen von f in $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann gilt

$$\sum_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} \operatorname{ord}_z f = \sum_{z \in A} \operatorname{ord}_z f = 0.$$

(b) Seien $z_1, \ldots, z_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden, und seien $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ so, dass $m_1 + \ldots + m_n = 0$. Dann gibt es eine meromorphe Funktion f auf $\widehat{\mathbb{C}}$ mit

$$\operatorname{ord}_z f = \begin{cases} m_j, & \text{falls } z = z_j \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, n\}, \\ 0, & \text{falls } z \notin \{z_1, \ldots, z_n\}. \end{cases}$$

2. Aufgabe (4 Punkte)
(a) Sei $S := \{ -n \; ; \; n \in \mathbb{N} \}$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{z+n}$$

in $\mathbb{C} \setminus S$ zwar lokal gleichmässig, aber nicht normal konvergiert.
(b) Zeige, dass die Reihe von meromorphen Funktionen

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

lokal gleichmässig auf $\mathbb{C}$ konvergiert.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Für die durch die folgenden Funktionsterme definierten Funktionen bestimme man jeweils in all ihren Singularitäten die Residuen:

$$\text{(a)} \; \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} \qquad \text{(b)} \; \frac{\exp(z)}{(z-1)^2} \qquad \text{(c)} \; z \exp\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Zusatzaufgabe (+ 4 Punkte)
(a) Betrachte die meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad g(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2.$$

Zeige, dass $f - g$ eine holomorphe Fortsetzung h zu $\mathbb{C}$ hat.
(b) Zeige, dass h beschränkt auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, |\operatorname{Im} z| > 1\}$ ist. Zeige, dass h konstant ist, und dann, dass $h \equiv 0$ (unter Betrachtung von $\lim_{y \to \infty} h(iy)$).
(c) Zeige, dass $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.