

### 10. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie

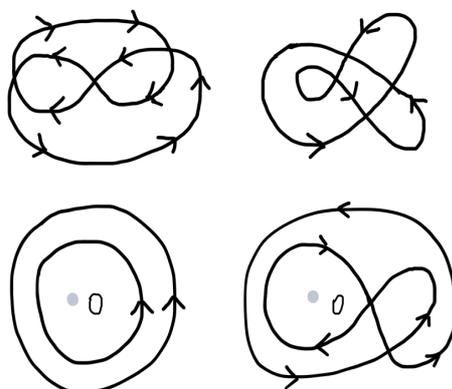
Abgabe: 1–2.07.2013 in den Übungen

#### 1. Aufgabe

(4 Punkte)

(a) Berechne die Umlaufzahl in der Komponenten des Komplements der ersten zwei Kurven in der Figur.

(b) Welche von der folgenden Zykeln sind nullhomolog in  $\mathbb{C}^*$ , welche Randzykeln?



#### 2. Aufgabe

(4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$(a) \int_{|\zeta|=5} \frac{\exp(\zeta)}{\cosh(\zeta)} d\zeta, \quad (b) \int_{\alpha} \frac{2 + 3 \sin(\pi\zeta)}{\zeta(\zeta - 1)^2} d\zeta.$$

Dabei ist  $\alpha$  der "Viereckenweg" mit den Eckpunkten  $3 + 3i$ ,  $-3 + 3i$ ,  $-3 - 3i$ ,  $3 - 3i$ .

#### 3. Aufgabe

(4 Punkte)

Zeige:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 3 \cos t} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{6},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 6x^2 + 5} = \frac{\pi}{8}(\sqrt{5} - 1), \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)^3} = \frac{7\pi}{16e}.$$

Bitte wenden.

**Zusatzaufgabe**

(+ 4 Punkte)

Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f \in \mathcal{M}(D)$  und  $a \in D$ .

(a) Zeige:

(i) Ist  $a$  eine Nullstelle von  $f$  von  $\text{ord}_a(f) = k \geq 1$  so gilt  $\text{ord}_a(f') = k - 1$ .

(ii) Ist  $a$  eine Nullstelle von  $f'$  von  $\text{ord}_a(f') = k \geq 0$  so gilt  $\text{ord}_a(f) = 0$  oder  $\text{ord}_a(f) = k + 1$ .

(iii) Ist  $a$  eine Pollstelle von Ordnung  $k$  von  $f$ , so ist  $a$  eine Pollstelle von Ordnung  $k + 1$  von  $f'$  und in der Laurententwicklung von  $f'$  kommt kein Summand  $\frac{a-1}{z-a}$  vor.

(iv) Ist  $a$  eine Pollstelle von Ordnung  $k$  von  $f'$ , so gilt  $k \geq 2$  und  $a$  ist eine Pollstelle von Ordnung  $k - 1$  von  $f$ .

(b) Sei  $a$  eine Pollstelle von  $f$ . Zeige, dass  $e^f$  eine wesentliche Singularität in  $a$  besitzt.