11. Blatt zur Vorlesung Funktionentheorie
Das Blatt wird in den Übungen besprochen

Hinweis:
Für die Klausurzulassung müssen mindestens 60 Punkte aus Übungsblättern 1-10 erreicht werden.

Übungsaufgabe
(a) Sei f meromorph in $\mathbb{C}$. Hat f in ∞ eine isolierte Singularität, so definiert man $\text{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R} f(z)dz$, wobei der Radius der Kreisscheibe $B_R(0)$ so groß gewählt wird, daßf keine weitere Polstelle im Komplement der Kreisscheibe hat. Zudem sei wie üblich $n(\partial B_R(0), 0) = 1$.
Dann gilt $\text{res}_\infty f = -\text{res}_0 \tilde{f}$, wobei $\tilde{f}(z) = z^{-2} f(\frac{1}{z})$.
(b) Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine rationale Funktion. Dann gilt $\sum_{p\in\hat{\mathbb{C}}} \text{res}_p f = 0$.

Übungsaufgabe
(a) Bestimme die Anzahl der Nullstellen von

$$f(z) = z^5 + iz^3 - 4z + i \quad \text{in} \quad \{1 < |z| < 2\}.$$

(b) Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter habe f in z_0 eine k-fache w_0-Stelle, $1 \leq k < \infty$. Dann gibt es Umgebungen $V \subset G$ von z_0 und W von w_0, so daßjedes $w \in W\backslash\{w_0\}$ genau k verschiedene Urbilder $z_1, \ldots, z_k$ in V hat, und zwar mit $\nu_f(z_j) = 1$ für $j = 1, \ldots, k$.

Übungsaufgabe
(a) Sei p ein Polynom mit $p(0) = 0$ und $p'(0) = 1$, also $p(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n$. Ist $p'(z) \neq 0$ für alle $|z| < 1$, dann gilt $|a_n| \leq 1/n$.
(b) Sei p ein Polynom vom Grad $n > 2$ mit nur einfachen Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$ d.h. sie sind paarweise verschieden und $p'(z_j) \neq 0$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p'(z_j)} = 0.$$

Übungsaufgabe
Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : G \to H$ holomorph. Dann sind äquivalent:
(i) Ist $z_n \in G$ eine Folge ohne Häufungspunkt in G, dann hat die Folge $f(z_n)$ keinen Häufungspunkt in H. Mann nennt (z_n) auch *Randfolge* und schreibt $z \to \partial G$. Somit: $z_n \to \partial G \Rightarrow f(z_n) \to \partial H$, f bildet Randfolgen auf Randfolgen ab.
(ii) Ist $K \subset H$ kompakt, so ist auch $f^{-1}(K)$ kompakt.
(iii) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $N_f(w) \equiv k$ für alle $w \in H$. Dies bedeutet, jeder Wert $w \in H$ wird in G genau k-mal angenommen, $f : G \to^{k:1} H$. (Tip: Aufgabe 2b)

(iv) f ist surjektiv (also nicht-konstant) und bildet abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab.

Eine stetige Abbildung $f : G \to H$, die (ii) erfüllt, nennt man *eigentlich*. Eine hlomorphe Abbildung $f : G \to H$, die (i) erfüllt, nennt man *endlich*.