1. Identitäten

Aufgabe 1.1. Seien a, b, c komplexe Zahlen. Dann gilt:
(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(iii) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
(iv) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
(v) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
(vi) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
(vii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
(viii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
(ix) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
(x) $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$

Aufgabe 1.2. Seien a, b komplexe Zahlen, $n \in \mathbb{N}$. Zeige dass

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$
$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + (-1)^{n-2}ab^{n-2} + (-1)^{n-1}b^{n-1}).$$

Insbesondere gilt:

$$1 - a^n = (1-a)(1 + a + \ldots + a^{n-1}),$$
$$1 + a^n = (1+a)(1 - a + \ldots + (-1)^{n-1}a^{n-1}).$$

Aufgabe 1.3. Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ komplexe Zahlen. Dann gilt die Lagrange-Identität:

$$\sum_{1 \le j < k \le n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \Big(\sum_{j=1}^n a_j^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n b_j^2\Big) - \Big(\sum_{j=1}^n a_j b_j\Big)^2.$$

Für n=2 lautet dies

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2.$$

Aufgabe 1.4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die Identitäten:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Sei $S_{n,k} = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(n+1)^k - n^k = \binom{k}{1} S_{n,k-1} + \binom{k}{2} S_{n,k-2} + \ldots + \binom{k}{k} S_{n,0}.$$

Diese Formel stellt eine Rekursionsformel für $S_{n,k}$ dar, die erlaubt, alle $S_{n,k}$ zu berechnen.

Aufgabe 1.5. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Ist $p \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p+1) + \ldots + (n+1)(n+2)\ldots(n+p) = \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}{(p+1)} .$$

Aufgabe 1.6. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} ,$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big] ,$$
$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!} .$$

Aufgabe 1.7. Berechne die Summen für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+1)!} , \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} , \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+p)} , \ (p \in \mathbb{N}), \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!+k!} .$$

2. Ungleichungen

Aufgabe 2.1. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Beweise folgende Ungleichungen. Wann gilt die Gleichheit?

(a) $(a+b) \geq 2\sqrt{ab}$, für $a \geq 0, b \geq 0$;
(b) $a + \frac{1}{a} \geq 2$, für $a \geq 0$;
(c) $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$;
(d) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$;
(e) $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$, für $a, b, c \geq 0$;
(f) $(a+b+c)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big) \geq 9$, für $a, b, c > 0$;
(f) $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c$, für $a, b, c > 0$.

Aufgabe 2.2. Zeige, dass für $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, gilt

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq 2\sqrt{1 - \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2} .$$

Aufgabe 2.3. Beweise die Bernoullische Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1+nx , \quad n \in \mathbb{N}_0,\ x \geq -1.$$

Die Ungleichung ist strikt, wenn $n \geq 2$, $x \neq 0$.

Aufgabe 2.4. Beweise, dass:

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} , \quad n, k \in \mathbb{N},\ k \leq n.$$

Aufgabe 2.5. Seien $a_1 \leq \ldots \leq a_n$, $b_1 \leq \ldots \leq b_n$ reele Zahlen. Beweise die Ungleichung

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big) \leq n \sum_{j=1}^{n} a_j b_j .$$