Notizen zur Vorlesung

Analysis I

G. Sweers

Wintersemester 06-07

Inhaltsverzeichnis

Analysis 1, Woche 1

Zahlen

1.1 Natürliche Zahlen

Bevor wir anfangen, legen wir die Bedeutung einiger Symbole aus der Mengenlehre fest:

- $x \in A$ heißt "x ist ein Element von A";
- $A \subset B$ heißt "A ist eine Teilmenge von B";
- $A \cup B = \{x; x \in A \text{ oder } x \in B\}$ ist die Vereinigung beider Mengen ("oder" ist hier nicht ausschließend);
- $A \cap B = \{x; x \in A \text{ und } x \in B\}$ ist der Durchschnitt beider Mengen;
- $A \backslash B = \{x; x \in A \text{ und } x \notin B\}$;
- $\exists$ heißt "es gibt";
- $\forall$ heißt "für alle";

Wir brauchen auch bald den Begriff "injektiv".

Definition 1.1 *Eine Abbildung $f : A \mapsto B$ heißt injektiv oder auch eineindeutig, wenn $f(x) = f(y)$ impliziert, dass $x = y$.*

Die Menge der **natürlichen Zahlen**[1] nennt man $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Axiomatisch ist $\mathbb{N}$ festgelegt durch folgende Eigenschaften:

Definition 1.2 (nach Peano) $\mathbb{N}$ *wird definiert durch:*

1. $0 \in \mathbb{N}$,
2. *Es gibt eine Nachfolgerabbildung $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass:*

[1]Manchmal fängt man auch erst mit 1 statt 0 an. Wir werden 0 dazu nehmen

(a) $0 \notin N(\mathbb{N})$,
(b) $N(n) = N(k) \Rightarrow n = k$ *(N ist injektiv),*
(c) wenn $A \subset \mathbb{N}$ *derart ist, dass* $0 \in A$ *und* $N(A) \subset A$, *so gilt* $A = \mathbb{N}$.

Wenn man kein Römer ist, dann schreibt man: $N(0) = 1$, $N(N(0)) = 2$ usw.

Formell kann man jetzt Addition und Multiplikation einführen als Abbildungen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

1.1.1 Vollständige Induktion

Wenn man für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Behauptung $B(n)$ beweisen möchte, kann man oft den folgenden Ansatz benutzen:

Satz 1.3 (Induktionsprinzip) *Sei* $B(n)$ *mit* $n \in \mathbb{N}$ *eine Folge von Behauptungen. Nehme an*

1. $B(0)$ *gilt,*
2. *"*$B(n)$ *gilt"* $\Rightarrow$ *"*$B(n+1)$ *gilt" für alle* $n \in \mathbb{N}$
   (das heißt: angenommen $B(n)$ *ist wahr, dann folgt, dass auch* $B(n+1)$ *wahr ist).*

Dann hat man "$B(n)$ *gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$*".*

Beweis. Nenne A die Teilmenge aus $\mathbb{N}$ definiert durch "$B(n)$ ist wahr für $n \in A$". Eigenschaft 2(c) gibt das Ergebnis. ■

Als Beispiel nehmen eine berühmte Ungleichung.

Lemma 1.4 (Bernoullische Ungleichung) *Für* $x > -1$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Diese Behauptung läßt sich mit dem Induktionsprinzip beweisen.

1) Für $n = 0$ hat man $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0x$.

2) Angenommen $(1+x)^n \geq 1 + nx$ gilt, dann hat man zu zeigen, dass $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\,x$. Das geht wie folgt:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq^{*)} (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)\,x + nx^2 \geq 1 + (n+1)\,x.$$

Bei $*)$ ist die Induktionsannahme benutzt worden. ■

1.1.2 Funktionen auf $\mathbb{N}$

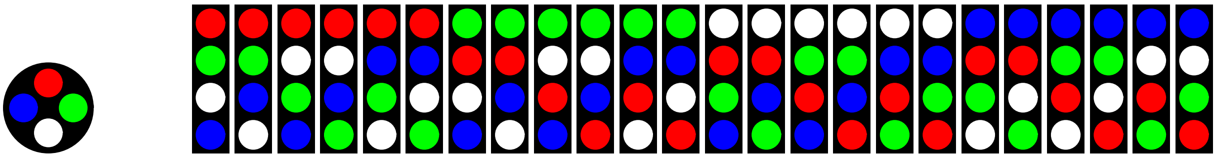
Fakultät: man definiert

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2)\ \ldots\ 3\ 2\ 1 \text{ für } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \\ 0! &= 1. \end{aligned}$$

Also:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	...

Man kann n unterschiedliche Kugeln auf $n!$ unterschiedliche Möglichkeiten hintereinander legen.

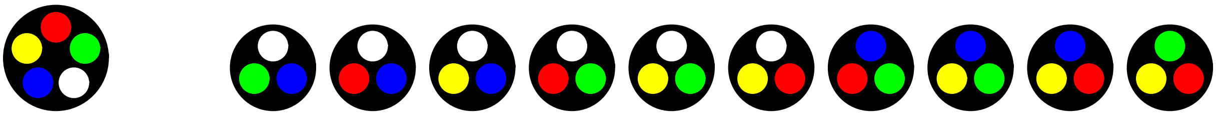


4 Kugeln kann man auf 24 Weisen ordnen.

Binomialkoeffizienten: man definiert

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1}\cdots\frac{n-k+3}{3}\,\frac{n-k+2}{2}\,\frac{n-k+1}{1} \quad \text{für } n\in\mathbb{N} \text{ und } k\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\\ \binom{n}{0} &= 1 \quad \text{für } n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Mit n unterschiedlichen Kugeln kann man $\binom{n}{k}$ unterschiedliche Teilmengen von k Kugeln bilden.



Nimmt man 3 aus 5 unterschiedlichen Kugeln, dann gibt es 10 Möglichkeiten.

Einige Identitäten:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ für } k,n\in\mathbb{N} \text{ mit } k\le n,\\ \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \text{ für } k,n\in\mathbb{N} \text{ mit } k\le n,\\ \binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} &= \binom{n+1}{k} \text{ für } k,n\in\mathbb{N} \text{ mit } 1\le k\le n,\\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} &= 2^n \text{ für } n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Pascalsches Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccccccc} &&&&&\binom{0}{0}&&&&& \\ &&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&& \\ &&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&& \\ &&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&& \\ &\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}& \\ \binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5} \end{array}$$

Lemma 1.5 *Für $n\in\mathbb{N}$ und beliebige Zahlen x,y gilt:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

Wenn man erschreckt von $\sum$ dann kann man so etwas notfalls anders schreiben:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \binom{n}{0}x^0y^{n-0}+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\binom{n}{3}x^3y^{n-3}+\binom{n}{4}x^4y^{n-4}+\ \dots\ +\binom{n}{n-1}x^{(n-1)}y^{n-(n-1)}+\binom{n}{n}x^ny^{n-n}.$$

Dann geht man aber davon aus, dass jeder die Pünktchen versteht.

1.1.3 Ganze Zahlen

Man setzt:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Addition, Multiplikation und sogar Subtraktion lassen sich auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definieren. Man sagt $n \leq m$ für $n, m \in \mathbb{Z}$, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt so, dass $n + k = m$.

1.2 Rationale Zahlen

Man setzt:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m}; n \in \mathbb{Z} \text{ und } m \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \right\}.$$

Dabei unterscheidet man aber zum Beispiel nicht zwischen $\frac{3}{5}$ und $\frac{9}{15}$. Man sagt $\frac{n}{m} = \frac{a}{b}$, wenn $nb = am$. Addition und Multiplikation werden definiert durch

$$\frac{n}{m} + \frac{a}{b} = \frac{nb + ma}{mb} \text{ und } \frac{n}{m}\frac{a}{b} = \frac{na}{mb}.$$

Identifiziert man $\frac{n}{1}$ und n, dann ist $\mathbb{Z}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$.

1.2.1 Algebraische Eigenschaften

Wenn man $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ schreibt, meint man damit, dass $\mathbb{K}$ irgendeine Menge ist, wobei Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$ definiert sind. Insbesonders soll $\mathbb{K}$ abgeschlossen sein unter diesen beiden Operatoren, das heißt: für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt $a + b \in \mathbb{K}$ und $a \cdot b \in \mathbb{K}$.

Definition 1.6 $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *nennt man einen* ***Körper****:*

1. *Für jedes $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $(a + b) + c = a + (b + c)$, die* ***Assoziativität bei Addition****;*
2. *Es gibt ein* ***neutrales Element der Addition*** *$0 \in \mathbb{K}$ so, dass für jede $a \in \mathbb{K}$ gilt $a + 0 = a$;*
3. *Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ gibt es* ***ein additiv inverses Element*** *$-a \in \mathbb{K}$ mit $a + (-a) = 0$;*
4. *Für jedes $a, b \in \mathbb{K}$ gilt $a + b = b + a$, die* ***Kommutativität bei Addition****;*
5. *Für jedes $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, die* ***Assoziativität bei Multiplikation****;*
6. *Es gibt ein* ***neutrales Element der Multiplikation*** *$1 \in \mathbb{K}$ mit $1 \neq 0$ so, dass für jede $a \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot 1 = a$;*
7. *Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ gibt es* ***ein multiplikativ inverses Element*** *$a^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $a \cdot a^{-1} = 1$;*
8. *Für jedes $a, b \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$, die* ***Kommutativität bei Multiplikation****;*
9. *Für jedes $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, die* ***Distributivität.***

$\mathbb{Q}$ wird mit Addition und Multiplikation ein **Körper**.

Bemerkung 1.6.1 *Eigenschaften 1 bis 4 definieren* $(\mathbb{K}, +)$ *als (additive) Gruppe. Ebenso definieren die Eigenschaften 5 bis 8* $(\mathbb{K}\setminus\{0\}, \cdot)$ *als (multiplikative) Gruppe. Wenn nur die Eigenschaften 1-3 erfüllt sind, dann nennt man* $(\mathbb{K}, +)$ *eine nicht-kommutative Gruppe. Und keine Verwirrung aufkommen zu lassen, wird* $(\mathbb{K}, +)$*, wobei alle 4 Eigenschaften erfüllt sind, auch explizit eine kommutative Gruppe genannt.*

Man kann direkt kontrollieren, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein **Körper** ist, und dass $(\mathbb{Q}, +)$ und $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$ eine additive, respektive multiplikative Gruppe ist.

Öfters sieht man folgende ‘Addition’: $\frac{p}{m} \boxplus \frac{q}{n} = \frac{p+q}{m+n}$. Angenommen wir nehmen immer die ‘kleinst mögliche’ Schreibweise, also $\frac{2}{3}$ statt $\frac{4}{6}$, welche Probleme hat man denn so für $(\mathbb{Q}, \boxplus, \cdot)$?

1.2.2 Anordnung

Auf $\mathbb{Z}$ gibt es eine natürliche Anordnung. Die Anordnung von $\mathbb{Z}$ können wir übertragen auf $\mathbb{Q}$:

Definition 1.7 *Sei* $\dfrac{n}{m}$ *und* $\dfrac{a}{b}$ *in* $\mathbb{Q}$ *(mit* $m, b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$*).*

$$\frac{n}{m} \le \frac{a}{b} \text{ wenn } nb \le ma.$$

Und man schreibt $\frac{n}{m} < \frac{a}{b}$ *wenn* $\frac{n}{m} \le \frac{a}{b}$ *und* $\frac{n}{m} \ne \frac{a}{b}$*.*

1.2.3 Unendlich und abzählbar

Definition 1.8
1. *Man nennt eine Menge A **unendlich** wenn A nicht leer ist und wenn es eine Abbildung* $f : A \mapsto A$ *gibt, die injektiv aber nicht surjektiv*[2] *ist.*
2. *Man nennt eine Menge A **abzählbar unendlich** wenn A unendlich ist und es eine surjektive Abbildung* $f : \mathbb{N} \mapsto A$ *gibt.*

Lemma 1.11 $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar unendlich.*

1.2.4 Rationale Zahlen reichen nicht

Die Griechen von vor etwa 500 v.C. brachten die Zahlen in Verbindung mit meßbaren Längen und dachten, dass sich alle Zahlen als Verhältnis von ganzen Zahlen schreiben lassen. Modern gesagt: $\mathbb{Q}$ reicht. Die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat gibt da aber schon ein Problem. Wegen Pythagoras findet man für die Länge x nämlich $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Lemma 1.12 *Es gibt keine rationale Zahl* x *so, dass* $x^2 = 2$*.*

---

[2] Zur Erinnnerung:

Definition 1.9 *Eine Abbildung* $f : A \mapsto B$ *heißt surjektiv, wenn es für jedes* $b \in B$ *mindestens ein* $a \in A$ *gibt so, dass* $f(a) = b$*.*

Definition 1.10 *Wenn* $f : A \mapsto B$ *surjektiv und injektiv ist, heißt* f *bijektiv.*

Beweis. Man beweist diese Aussage durch einen Widerspruch. Nehme an, es gibt $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ so, dass

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2.$$

Man darf annehmen, dass entweder n oder m ungerade ist. Denn wenn beide gerade sind, kann man aus beiden einen Faktor 2 ziehen. Es folgt

$$n^2 = 2m^2.$$

Weil die rechte Seite gerade ist, muss auch die linke Seite gerade sein und so auch n. Es folgt, dass $n = 2k$ für irgendeine $k \in \mathbb{Z}$, und man findet

$$4k^2 = 2m^2.$$

Aus $m^2 = 2k^2$ folgt, dass m gerade ist und der Widerspruch. ■

Anscheinend reichen die rationalen Zahlen nicht aus. Man sollte dazu geneigt sein die restlichen Löcher zu stopfen. Das führt zu den sogenannten reellen Zahlen.

1.2.5 Wie kann man reellen Zahlen einführen?

Eine Möglichkeit, diese rationalen Zahlen zu vervollständigen, ist, die Anordnung von $\mathbb{Q}$ zu benutzen. Eine Konstruktion geht wie folgt:

1. Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Folgen rationaler Zahlen, die monoton wachsend und nach oben beschränkt sind.

2. Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ aus $\mathfrak{F}$ sind, dann sagt man $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ (beide Folgen sind äquivalent) wenn für jedes $q \in \mathbb{Q}$ gilt

$$a_n \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; b_n \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   Anders gesagt: beide Folgen habe die gleichen obere Schranken.

3. Schlußendlich setzt man $\mathbb{R} = (\mathfrak{F}, \sim)$, dass heißt, man identifiziert Folgen, die äquivalent sind.

Man fasst diese Konstruktion zusammen, indem man sagt:

$\mathbb{R}$ ist die Menge aller Grenzwerte von monoton wachsenden, beschränkten Folgen aus $\mathbb{Q}$.

Wir haben aber noch nicht gesagt, was ein Grenzwert oder ein Limes ist ...

Als Beispiel hier der Anfang einer Folge, die $\sqrt{2} = 1.41421356237309504 88...$ liefert:

$$\left\{1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \dots\right\}.$$

Analysis 1, Woche 2

Reelle Zahlen

2.1 Anordnung

Definition 2.1 *Man nennt $\leq$ eine **Anordnung** für $\mathbb{K}$, wenn:*

1. *Für jeden $a \in \mathbb{K}$ gilt $a \leq a$ (**Reflexivität**).*
2. *Für jeden $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \leq b$ und $b \leq a$ gilt $a = b$ (**Antisymmetrie**).*
3. *Für jeden $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $a \leq b$ und $b \leq c$ gilt $a \leq c$ (**Transitivität**).*

Definition 2.2 $(\mathbb{K}, \leq)$ *nennt man **total angeordnet**, wenn $\leq$ eine Ordnung für $\mathbb{K}$ ist und zusätzlich:*

4. *Für jeden $a, b \in \mathbb{K}$ gilt, $a \leq b$ oder $b \leq a$.*

Definition 2.3 $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ *heißt ein **total angeordneter Körper** wenn:*

1. $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *ein Körper ist*
2. $(\mathbb{K}, \leq)$ *total angeordnet ist;*
3. *Für jeden $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $a \leq b$ gilt $a + c \leq b + c$;*
4. *Für jeden $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $a \leq b$ und $0 \leq c$ gilt $a \cdot c \leq b \cdot c$.*

$(\mathbb{K}, +, \leq)$ heißt eine total angeordnete Gruppe, wenn $(\mathbb{K}, +)$ eine Gruppe ist und die Bedingungen 2 und 3 aus Definition 2.3 erfüllt sind.

Man kann zeigen, dass $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ eine total angeordnete Gruppe ist und $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ein total angeordneter Körper.

Wenn $(\mathbb{K}, \leq)$ total angeordnet ist, dann heißt $k \in \mathbb{K}$ eine **obere Schranke** für die Teilmenge $A \subset K$, wenn für alle $a \in A$ gilt, dass $a \leq k$.

Nehmen wir $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \leqq)$, wobei "$(q_1, q_2) \leqq (p_1, p_2)$"definiert wird durch "$q_1 \leq q_2$ und $p_1 \leq p_2$", dann ist $\leqq$ eine Anordnung aber nicht eine totale Anordnung.

2.2 Reelle Zahlen

2.2.1 Eine Einführung der reellen Zahlen

Definition 2.4 ($\mathbb{R}$ als Grenzwerte beschränkte monoton wachsende Folgen) *Eine erste Konstruktion:*

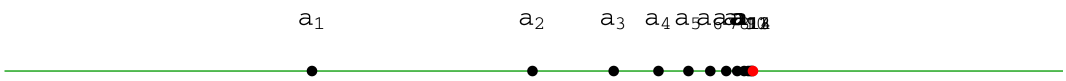
1. *Sei $\mathfrak{F}$ die Menge aller Folgen rationaler Zahlen, die monoton wachsend und nach oben beschränkt sind.*

2. *Für $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ sagt man $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ (beide Folgen sind äquivalent), wenn für jede $q \in \mathbb{Q}$ gilt*

$$a_n \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; b_n \leq q \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

   Anders gesagt: beide Folgen haben die gleichen oberen Schranken.

3. *$\mathbb{R} := (\mathfrak{F}, \sim)$, dass heißt, man identifiziert äquivalenten Folgen.*



Man betrachtet $\mathbb{Q}$ als Teilmenge, indem man für $q \in \mathbb{Q}$ die Äquivalenzklasse der Folge $\{q, q, q, q, q, \dots\}$ nimmt. Es stellt sich heraus, dass $\mathbb{R}$ eine vernünftige Struktur hat.

Satz 2.5 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *ist ein total geordneter Körper.*

Beweis. Addition, Multiplikation und Anordnung sind für $\mathbb{Q}$ definiert und man hofft das auch für $\mathbb{R}$ ähnlich zu haben. Also formell muss man jetzt Addition, Multiplikation und Anordnung für $\mathbb{R}$ neu definieren und zeigen, dass tatsächlich $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ein total geordneter Körper bildet. $\mathbb{Q}$ soll auf vernünftige Weise eingebettet sein. Ein Paar Sachen werden wir zeigen.

Erstens die Addition. Die ist relativ einfach. Man definiert $x + y$ in dem man zwei Folgen rationaler Zahlen zu x und y nimmt, sage $x \cong \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ und $y \cong \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$, und schreibt

$$x + y \cong \{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Mit $x \cong \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ wird gemeint, dass $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ einen Vertreter aus $\mathfrak{F}$ für die Äquivalenzklasse zu $x \in (\mathfrak{F}, \sim)$. Man kann zeigen, dass $\{x_n + y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ und die dazu gehörende Äquivalenzklasse nicht abhängt von den Vertretern $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Auch kann man schon zeigen dass drei Eigenschaften für einen Körper (Assoziativität, Existenz von einem neutralen Element und Kommutativität) erfüllt sind. Für die Existenz von ein additiv inverses Element zu x kann man nicht einfach $\{-x_n\}_{n=0}^{\infty}$ nehmen weil diese Folge nicht monoton wachsend ist. Wenn $x \in (\mathfrak{F}, \sim)$ gibt es aber ein $-x \in (\mathfrak{F}, \sim)$ und dass sieht man zum Beispiel mit Hilfe des folgende Algorithmus. Der liefert eine Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, die $-x$ vertritt.

Algorithmus 2.1 `1. Sei` $q \in \mathbb{Q}$ `eine obere Schranke für` $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ `und setze`

$$b_0 := -q, \;\; n := 0 \text{ und } s := 1.$$

2. `Wenn` $-b_n - s$ `eine obere Schranke ist für` $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$`, setze` $b_{n+1} := b_n + s$`.` `Wenn` $-b_n - s$ `keine obere Schranke ist für` $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$`, setze` $b_{n+1} := b_n$ `und` $s := \frac{1}{2}s$`.`

3. $n := n + 1$ `und gehe zurück zu 2.`

Die Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ soll $-x \cong \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ liefern. Dann muß man aber noch zeigen, dass $x + (-x) = 0$ oder besser gesagt: dass 0 die kleinste obere Schranke für $\{x_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist.

Multiplikation ist schon lästiger. Wenn $x \cong \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ und $y \cong \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$ so sind, dass x_n und y_n positiv sind für n genügend groß, dann setzt man

$$x \cdot y \cong \{\max(0, x_n) \max(0, y_n)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Auch hier muß man zeigen, dass das Ergebnis nicht vom zufälligen Vertreter abhängt.

Wenn für alle x_n gilt, dass $x_n < 0$, aber $y_n > 0$ für n genügend groß, dann benutzt man zweimal den Algorithmus für den additiv Inversen und definiert

$$x \cdot y = -((-x) \cdot y),$$

und so weiter.

Die Anordnung $\leq$ wird wie folgt definiert. Seien x, y vertreten durch $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}, \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{F}$, dann setzt man $x \leq y$, wenn:

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ oder } \exists\, N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \leq y_n.$$

Auch hier muss man kontrollieren, dass man so eine totale Anordnung bekommt.

Das ganze ist eine ziemliche langwierige Sache und die Ergebnisse sind nicht sehr überraschend. ■

2.2.2 Andere Einführungen der reellen Zahlen

Statt monoton wachsende, nach oben beschränkte Folgen in $\mathbb{Q}$ zu nehmen, kann man auf ähnliche Art auch monoton nach unten beschränkte Folgen in $\mathbb{Q}$ nehmen. Das wäre eine zweite Konstruktion.

Für eine nächste Möglichkeit brauchen wir die Betragsfunktion. Sei $\mathbb{K}$ eine Gruppe, die, oder ein Körper, der eine totale Anordnung $\leq$ besitzt. Dann setzt man

$$|a| = \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$$

Und $a < 0$ bedeutet $0 \geq a$ und $a \neq 0$.

Definition 2.6 ($\mathbb{R}$ durch Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen) *Eine dritte Konstruktion:*

1. *$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \in \mathbb{Q}$ heißt eine* ***Cauchy-Folge*** *(auch Fundamentalfolge genannt) wenn:*
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\text{: } n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$
Sei $\mathfrak{CF}$ die Menge aller Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$.

2. *Für $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathfrak{CF}$ sagt man $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ (beide Folgen sind äquivalent) wenn*
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon \in \mathbb{N}\text{: } n \geq M_\varepsilon \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

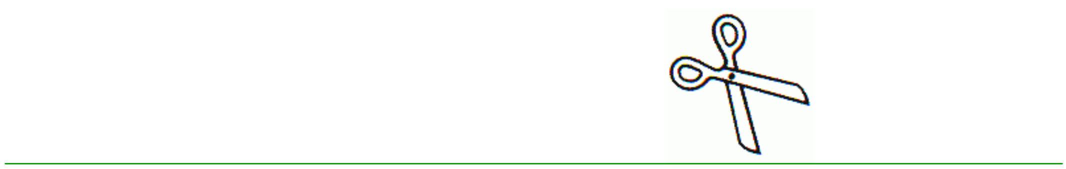
3. *$\mathbb{R} := (\mathfrak{CF}, \sim)$.*

Definition 2.7 ($\mathbb{R}$ durch Dedekindscher Schnitte) *Eine vierte Konstruktion:*

1. *(A, B) heißt einen Schnitt von $\mathbb{Q}$, wenn $A, B \subset \mathbb{Q}$ mit*
   (a) *$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{Q}$;*
   (b) *für jede $a \in A$ und $b \in B$ gilt $a \leq b$.*

2. *wenn $q \in A \cap B$, dann $(A \backslash \{q\}, B) \sim (A, B \backslash \{q\})$.*

3. *Sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller Schnitten in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} := (\mathfrak{S}, \sim)$.*



Definition 2.8 ($\mathbb{R}$ durch Intervallschachtelungen) *Eine fünfte Konstruktion:*

1. *$\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ und $a_n < b_n$ heißt eine Intervallschachtelung, wenn*
   (a) *für jede $n \in \mathbb{N}$ gilt, $I_{n+1} \subset I_n$;*
   (b) *für jede $\varepsilon > 0$ gibt es ein Intervall[1] I_n mit Länge $b_n - a_n < \varepsilon$.*

[1]

Notation 2.9 *Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ nennt man Intervalle. Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$*

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$; *(geschlossenes Intervall)*
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$; *(offenes Intervall)*
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Manchmal sieht man auch:

- $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$.

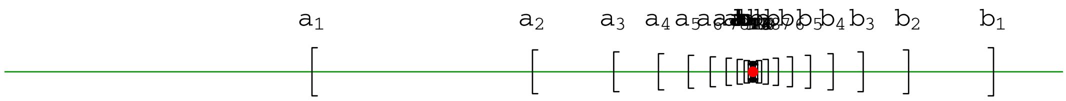
Die Bedeutung von $[a, b)$, $[a, \infty)$, (a, ∞) undsoweiter kann man erraten.

Wir haben hier die Symbole $-\infty$ (negativ unendlich) und ∞ (positiv unendlich) benutzt. ∞ und $-\infty$ sind keine Zahlen und liegen nicht in $\mathbb{R}$. Man schreibt ab und zu trotzdem $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Mit $(\overline{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ kann man aber nicht mehr wie in ein Körper arbeiten: $\infty - \infty$ ist nicht vernünftig zu definieren.

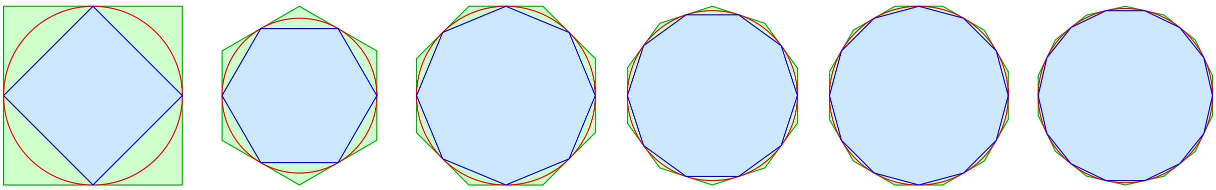
Sei $\mathfrak{I}$ die Menge der Intervallschachtelungen in $\mathbb{Q}$.

2. *Zwei Intervallschachtelungen $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißen äquivalent, wenn für jeden $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_n \cap J_n \neq \emptyset$.*

3. $\mathbb{R} := (\mathfrak{I}, \sim)$.



Indem man die Flächeninhalte von einem Kreis und einem n-Polygon vergleicht, kann man eine Intervallschachtelung konstruieren, die zu π führt.



2.2.3 Nur eine vollständige Erweiterung?

Zu diesen verschiedenen Einführungen von $\mathbb{R}$ sollte man aber einige Fragen klären. Zum Beispiel:

- Liefern diese Verfahren alle das gleiche Ergebnis?
- Man findet, mit $\mathbb{Q}$ angefangen, eine größere Menge, die man $\mathbb{R}$ nennt. Wenn man ein ähnliches Verfahren losläßt auf $\mathbb{R}$, bekommt man dann eine noch größere Menge?

Selbstverständlich sind monoton wachsende Folgen keine monoton fallenden Folgen und hat man formell zwei verschiedene Ergebnisse, wenn man bei der ersten und zweiten Konstruktion die Form betrachtet. Trotzdem soll man das Gefühl haben, dass diese zwei Methoden keinen wesentlichen Unterschied herbeiführen. In der Mathematik verwendet man den Begriff **isomorph**. Man meint mit A ist isomorph B, dass es nicht nur eine bijektive Abbildung von A nach B gibt, sondern dass es eine Abbildung gibt, die die Struktur erhält[2].

Bevor wir die zweite Frage beantworten können, brauchen wir:

Definition 2.11 *Sei $(\mathbb{K}, \leq)$ total angeordnet. Dann heißt $\mathbb{K}$ **vollständig für die Anordnung** $\leq$, wenn jede nicht-leere nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{K}$ eine kleinste obere Schranke hat. Diese kleinste obere Schranke von M heißt das "**Supremum von** M" und man schreibt $\sup M$.*

[2] Der Begriff Isomorphie hängt ab von der betreffenden Struktur.

Definition 2.10 *Zwei total angeordnete Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ und $(\mathbb{L}, \oplus, \odot, \leqq)$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ gibt so, dass:*

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$;
2. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$;
3. $a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leqq \varphi(b)$.

Satz 2.12 *Es gibt, bis auf Isomorphien, eine eindeutige Erweiterung $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$, die vollständig ist für die Anordnung $\leq$.*

Es gibt Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ die echt kleiner sind als $\mathbb{R}$ aber nicht vollständig für die Anordnung sind. Zum Beispiel ist auch $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] := \left\{p + q\sqrt{2}; p, q \in \mathbb{Q}\right\}$ eine Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

2.2.4 Abzählbar

Wir haben gesehen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich ist. Wie ist das mit $\mathbb{R}$?

Satz 2.13 $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. Wir nehmen an, $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ sei eine Abzählung von $\mathbb{R}$, und werden einen Widerspruch erzeugen. Das funktioniert wie folgt. Zu jeden x_n kann man die Dezimalentwicklung als Folge nehmen. So wie $\sqrt{2}$ die Äquivalenzklasse von der monoton wachsenden und beschränkten Folge $\{1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.412,\ \dots\}$ darstellt. Wir definieren y durch eine Folge $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, die wir als Dezimalentwicklung definieren wo das n-ten Dezimal von y (eine Ziffer von 0 bis 9) ungleich des n-ten Dezimals von x_n genommen wird (und auch ungleich 9). Also zum Beispiel für die reellen Zahlen

$$\begin{array}{lcl} x_0 & \cong & \{50,\ 51,\ 51.3,\ 51.34,\ 51.343,\ 51.3436\dots\} \\ x_1 & \cong & \{400,\ 440,\ 444,\ 444.6,\ 444.66,\ 444.666...\} \\ x_2 & \cong & \{0,\ .1,\ .19,\ .191,\ .1912,\ .19121,\ .19123...\} \\ x_3 & \cong & \{3,\ 3.1,\ 3.12,\ 3.123,\ 3.1234,\ 3.12345,\ \dots\} \\ & & \dots \end{array}$$

wären die Dezimale, die zu meiden sind $1.693\dots$. Wir setzen

$$y \cong \{2,\ 2.7,\ 2.78,\ 2.784,\ \dots\}$$

und y liegt in $\mathbb{R}$ (die Folge ist monoton wachsend und beschränkt) aber nicht in der Abzählung, weil y bei jeder x_n mindestens eine Ziffer anders hat.

Die Ziffer 9 oder 0 soll vermieden werden, weil

$$1.00000000... = .9999999999... \ .$$

Die Dezimalentwicklung von reellen Zahlen ist leider nicht eindeutig (surjektiv aber nicht injektiv!). ■

Weitere Ergebnisse die nützlich sind:

Lemma 2.14
- *Für jede $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es $q \in \mathbb{Q}$, so dass $x < q < y$.*
- *Für jede $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$ gibt es $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ so dass $p < x < q$.*

2.2.5 Vollständigkeit

Ein ganz wichtiger Bestandteil von dem Satz 2.12 möchten wir noch mal betonen.

Korollar 2.15 $(\mathbb{R}, \leq)$ *ist vollständig. Das heißt: jede nicht leere, beschränkte Menge aus* $\mathbb{R}$ *hat ein Supremum.*

Eine andere Möglichkeit diese Vollständigkeit zu formulieren braucht den Begriff "Grenzwert".

Definition 2.16 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von Zahlen in $\mathbb{R}$. Diese Folge heißt* ***konvergent*** *nach $a \in \mathbb{R}$, wenn Folgendes gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und nennt a den Limes oder Grenzwert.

Die meist benutzte Formulierungen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ sind wie folgt:

Satz 2.17

- *Jede beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$.*
- *Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Limes in $\mathbb{R}$.*
- *Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Limes in $\mathbb{R}$.*
- *Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent in $\mathbb{R}$.*

Analysis 1, Woche 3

Komplexe Zahlen I

3.1 Etwas Imaginäres

Wir betrachten $\mathbb{R}[i] = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$, wobei i einstweilen nur ein Symbol ist. Die Addition wird wie üblich[1] definiert:

$$(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i\,(y + b)\,.$$

Man sieht fast sofort, dass Assoziativität und Kommutativität für diese Addition gelten, dass auch ein neutrales Element, $0 + i0$, zur Addition existiert und dass jedes Element ein additiv Inverses hat.

Die Multiplikation definiert man auf eine besondere Weise, wir schreiben deshalb vorläufig $\odot$, nämlich durch

$$(x + iy) \odot (a + ib) = (xa - yb) + i\,(xb + ya)\,.$$

Ein Buchhalter kann direkt kontrollieren, dass Assoziativität und Kommutativität für die Multiplikation gelten. Sogar die Distributivität folgt unweigerlich. Auch findet man gleich das neutrale Element:

$$(x + iy) \odot (1 + i0) = (x\ 1 - y\ 0) + i\,(x\ 0 + y\ 1) = x + iy.$$

Für das inverse Element bei der Multiplikation muss man sich einige Mühe geben. Für $x + iy \neq 0 + i0$, also $x \neq 0$ und $y \neq 0$, hat man $x^2 + y^2 \neq 0$, und es ist folgendes wohl definiert:

$$(x + iy)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Eine Kontrollrechnung ergibt

$$\begin{aligned} (x + iy)^{-1} \odot (x + iy) &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \odot (x + iy) = \\ = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}x - \frac{-y}{x^2 + y^2}y\right) &+ i\left(\frac{x}{x^2 + y^2}y + \frac{-y}{x^2 + y^2}x\right) = 1 + i0. \end{aligned}$$

[1]Das Wort 'üblich' ist eigentlich nur eine Ausrede um die Feinheiten unter den Teppich zu kehren. Formell unterscheidet man drei verschiedene $+$. Schreiben wir $+$ für die bekannte Addition in $\mathbb{R}$, $\dotplus$ für die Notation in $\mathbb{R}\,[i] = \{x \dotplus iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ und $\oplus$ für die Addition in $\mathbb{R}\,[i]$, würde es so ausschauen:

$$(x \dotplus iy) \oplus (a \dotplus ib) = (x + a) \dotplus i\,(y + b)\,.$$

Weil $(\mathbb{R}\,[i]\,, \oplus)$ eine Gruppe bildet, folgt, dass diese Notation sehr stabil ist und dass man ohne Probleme dreimal $+$ schreiben kann.

Man kann $\mathbb{R}$ sogar als Teilmenge von $\mathbb{R}[i]$ auffassen, indem man $x + i0$ und x identifiziert. Die Multiplikation $\odot$ in $\mathbb{R}\,[i]$ verträgt sich mit der Multiplikation in $\mathbb{R}$:

$$x \odot a = (x + i0) \odot (a + i0) = (x\ a - 0\ 0) + i\,(x\ 0 + 0\ a) = x\ a + i0 = x\ a.$$

Deshalb gibt es keine Probleme, wenn wir statt $(x + iy) \odot (a + ib)$ ab jetzt nur $(x + iy)\,(a + ib)$ schreiben. Man setzt

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) = (\mathbb{R}\,[i]\,, +, \odot)$$

und nennt $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen. Die Tatsache, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ eine vernünftige Struktur hat, fasst man zusammen in:

Lemma 3.1 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist ein Körper.*

Beispiel 3.2
- $(1 + i2) + (3 + i4) = 4 + i6,$
- $(1 + i2)\,(3 + i4) = -5 + i10,$
- $\dfrac{1 + i2}{3 + i4} = \frac{11}{25} + i\frac{2}{25},$
- $i^2 = (0 + i1)^2 = (0 + i1)\,(0 + i1) = -1 + i0 = -1.$

Endlich können wir die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Beispiel 3.3 *Man löst $z^2 = -17$ wie folgt:*

$$z^2 = -17 \Leftrightarrow z^2 - \left(i\sqrt{17}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z - i\sqrt{17}\right)\left(z + i\sqrt{17}\right) = 0$$

und

$$\left(z - i\sqrt{17}\right)\left(z + i\sqrt{17}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(z - i\sqrt{17} = 0 \text{ oder } z + i\sqrt{17} = 0\right).$$

Man findet $z \in \left\{i\sqrt{17}, -i\sqrt{17}\right\}$.

Obwohl $\mathbb{C}$ nicht $\mathbb{R}^2$ ist, kann es nützlich sein, die Darstellung in $\mathbb{R}^2$ zu benutzen um Fragen zu veranschaulichen.

Definition 3.4 *Sei $z \in \mathbb{C}$ und schreibe $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.*

1. *Der **reelle Teil**:* $\mathrm{Re}(z) = x$;
2. *Der **imaginäre Teil**:* $\mathrm{Im}(z) = y$;
3. *Der **Betrag** (oder Modulus):* $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
4. *Das **Argument**:* $\mathrm{Arg}(z) =$ *"die Größe des Winkels $\measuredangle\,(1, 0, z)$ gegen den Uhrzeigersinn gemessen".*

Man sollte noch kontrollieren ob der oben definierte Betrag übereinstimmt mit dem schon vorher definierten Betrag für reelle Zahlen:

$$|x+i0|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = \left\{ \begin{array}{c} x \text{ (wenn } x \geq 0) \\ -x \text{ (wenn } x < 0) \end{array} \right\} = |x|_{\mathbb{R}}\,;$$

also können wir ohne Probleme $|\ \ |$ schreiben.

Nützlich ist auch die sogenannte **komplexe Konjugation**.

Definition 3.5 *Für $z \in \mathbb{C}$, mit $z = x + iy$ und $x, y \in \mathbb{R}$, schreibt man $\overline{z} = x - iy$.*

Lemma 3.6 *Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

- $z\,\overline{z} = |z|^2$;
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ *und* $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$.

Der Beweis ist direkt.

Die komplexe Konjugation kommt u.a. zur Hilfe bei der Division:

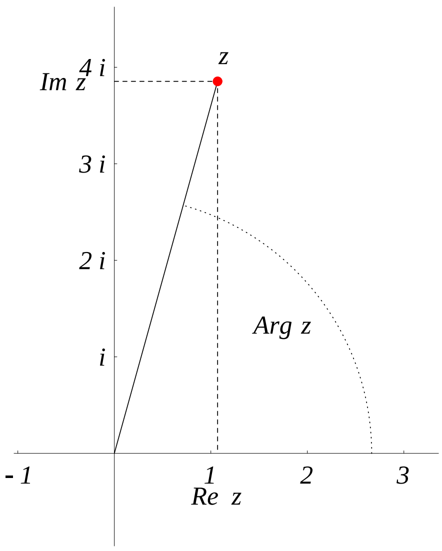
$$\frac{w}{z} = \frac{w\,\overline{z}}{z\,\overline{z}} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}} = |z|^{-2}\,w\overline{z}.$$

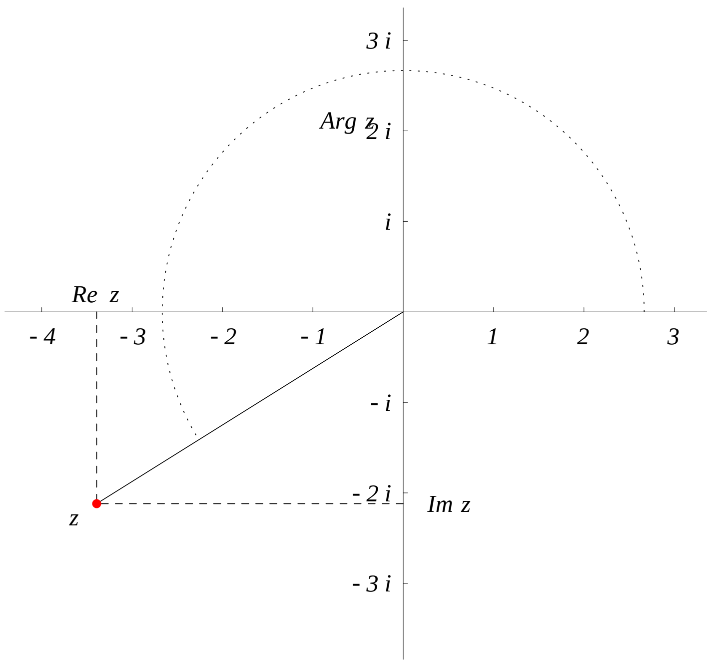
Zum Beispiel:

$$\frac{1-2i}{-3+4i} = \frac{1-2i}{-3+4i}\frac{-3-4i}{-3-4i} = \frac{(1-2i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-11+2i}{3^2+4^2} = -\frac{11}{25} + i\frac{2}{25}.$$

Man hat jetzt zwei 'verschiedene' Möglichkeiten eine komplexe Zahl zu schreiben:

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z), \\ z &= |z|\left(\cos(\operatorname{Arg}(z)) + i\sin(\operatorname{Arg}(z))\right). \end{aligned}$$





Addition zweier komplexer Zahlen kann man darstellen, indem man das Parallelogramm zu den beiden Punkten komplett macht. Überraschenderweise kann man auch zu der Multiplikation eine geometrische Darstellung machen.

Lemma 3.7 *Wenn $z, w \in \mathbb{C}$, dann gilt:*

1. $|zw| = |z|\,|w|$,
2. *es gibt* $k \in \{0,1\}$ *so, dass* $\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w) - 2k\pi$.

Beweis. Wir schreiben $z = x + iy$ und $w = u + iv$ und finden:

$$\begin{aligned} |zw| &= |(xu - yv) + i\,(xv + yu)| = \sqrt{(x^2u^2 - 2xyuv + y^2v^2) + (x^2v^2 + 2xyuv + y^2u^2)} = \\ &= \sqrt{x^2u^2 + y^2v^2 + x^2v^2 + y^2u^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)\,(v^2 + y^2)} = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{v^2 + u^2} = |z|\,|w|\,. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der ‘zweiten’ Schreibweise und $\mathrm{Arg}(z) = \alpha$, $\mathrm{Arg}(w) = \beta$, haben wir[2]

$$\begin{aligned} &zw = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot|w|\,(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ = \;& |z|\,|w|\,((\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i\,(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)) = \\ = \;& |z|\,|w|\,(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))\,. \end{aligned}$$

Also

$$\cos(\mathrm{Arg}(z)) = \cos(\alpha+\beta) \;\text{ und }\; \sin(\mathrm{Arg}(z)) = \sin(\alpha+\beta)$$

und weil $0 \le \alpha + \beta \le 4\pi$, findet man $\mathrm{Arg}(z) = \alpha + \beta$ oder $\mathrm{Arg}(z) = \alpha + \beta - 2\pi$. ■

3.1.1 Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Definition 3.8 *Eine Funktion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form*

$$p(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{C}$, nennt man ein Polynom. Wenn $a_n \neq 0$, dann sagt man p hat Grad n. Eine Zahl $z_1 \in \mathbb{C}$ so, dass $p(z_1) = 0$, heißt eine Wurzel von p.

Bemerkung 3.8.1 *Um nicht immer zu bemerken, dass wir $a_0 \neq 0$ haben müssen um ein Polynom von Grad n zu bekommen, werden wir ab jetzt meistens $a_0 = 1$ nehmen.*

Man kann mit diesem i jetzt Quadratwurzeln von negative Zahlen nehmen. Was passiert aber, wenn man $z^2 = i$ oder $z^2 = 2 + 2i$ versucht zu lösen?

Das Lösen von $z^n = w$

Wir fangen gleich mal allgemeiner an und fragen uns, ob wir

$$z^n = w \in \mathbb{C} \text{ und } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

lösen können.

Benutzt man das letzte Lemma, dann findet man

$$|z|^n = |z^n| = |w|\,,$$

[2]Die altbekannten Winkelformuln für sin und cos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta. \end{aligned}$$

und weil $|w| \geq 0$ ist und $|z| \geq 0$ sein sollte, folgt

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}. \tag{3.1}$$

Weil

$$\operatorname{Arg}(z^n) = \operatorname{Arg}(w)$$

wenn z eine Lösung ist, läßt der zweite Teil des gleichen Lemma folgern, dass

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg}(z) - 2k\pi$$

wobei man ein $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ zulassen muss. Also hat man

$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{1}{n}\left(\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi\right) \text{ für eine } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}. \tag{3.2}$$

Das heißt, wenn z eine Lösung ist von $z^n = w$, dann kann (3.1) und (3.2) kombinieren und bekommt

$$\begin{aligned} z &= |z| \left(\cos\left(\operatorname{Arg}(z)\right) + i \sin\left(\operatorname{Arg}(z)\right)\right) = \\ &= \sqrt[n]{|w|} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\left(\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi\right)\right) + i \sin\left(\frac{1}{n}\left(\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Lemma 3.9 *Die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von $z^n = w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind:*

$$\left\{ \sqrt[n]{|w|} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\operatorname{Arg}(w) + \frac{k}{n}2\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{n}\operatorname{Arg}(w) + \frac{k}{n}2\pi\right)\right);\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \right\}.$$

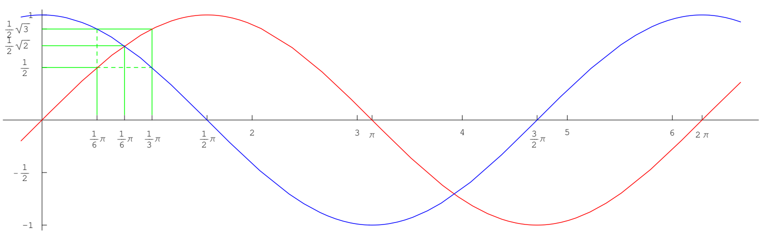
Bemerkung 3.9.1 *Man bemerke, dass es für $w \neq 0$ genau n verschiedene Lösungen gibt.*

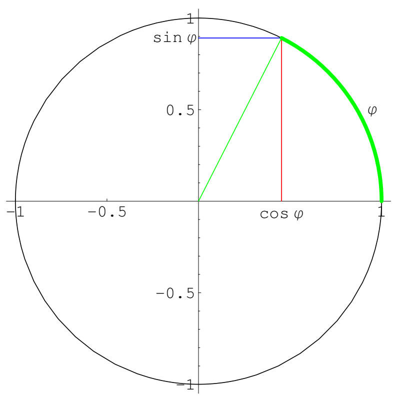
Beweis. Vorher haben wir schon gezeigt, dass jede Lösung dieser Form hat. Mit Lemma 3.7 sieht man direkt, dass man auch tatsächlich Lösungen hat:

$$\begin{aligned} z^n &= \left(\sqrt[n]{|w|} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\operatorname{Arg}(w) + \frac{k}{n}2\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{n}\operatorname{Arg}(w) + \frac{k}{n}2\pi\right)\right)\right)^n = \\ &= |w| \left(\cos\left(\operatorname{Arg}(w) + k2\pi\right) + i \sin\left(\operatorname{Arg}(w) + k2\pi\right)\right) = \\ &= |w| \left(\cos\left(\operatorname{Arg}(w)\right) + i \sin\left(\operatorname{Arg}(w)\right)\right) = w. \end{aligned}$$

Man erinnere sich, dass sin und cos 2π-periodisch sind[3]. ∎

[3] Vorläufig werden wir die sin und cos benutzen, so wie man sie in der Schule eingeführt hat, das heißt, als 'Projektionen' von Punkten auf dem Einheitskreis. Und dann gibt es noch $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$.





Der Graph für den Sin geht durch $(0, 0)$ und ist hier rot; der für Cos ist blau; für den Winkel benutzt man die Bogenlänge auf dem Einheitskreis und keine Grad oder "degree".

Beispiel 3.10 *Gefragt:* $z^6 = -4 - 4\sqrt{3}i$.

Es folgt $|z|^6 = |z^6| = \left|-4 - 4\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-4)^2 + \left(-4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64} = 8$ *und*

$$|z| = \sqrt[6]{8} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Auch hat man $\operatorname{Arg}(z^6) = \operatorname{Arg}(-4 - 4\sqrt{3}i) =$ *(mach eine Skizze)* $= \frac{4}{3}\pi$ *und damit*

$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right) = \frac{2}{9}\pi + \frac{1}{3}k\pi.$$

Die Lösungen sind

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{2}{9}\pi + i\sin\frac{2}{9}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{9}\pi + i\sin\frac{5}{9}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{8}{9}\pi + i\sin\frac{8}{9}\pi\right),$$
$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{9}\pi + i\sin\frac{11}{9}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{14}{9}\pi + i\sin\frac{14}{9}\pi\right), \sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{9}\pi + i\sin\frac{17}{9}\pi\right).$$

Leider ist das kaum einfacher zu schreiben. Man sieht aber so direkt, dass diese 6 Lösungen in der komplexen Ebene die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks bilden.

Beispiel 3.11 *Gefragt:* $z^2 = 1 + 2i$.

Es folgt $|z|^2 = |z^2| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ *und*

$$|z| = \sqrt[4]{5}.$$

Auch $\operatorname{Arg}(z^2) = \operatorname{Arg}(1 + 2i) =$ *(mach eine Skizze)* $= \arctan(2)$ *und damit*

$$\operatorname{Arg}(z) = \frac{1}{2}\arctan(2) \text{ oder } \operatorname{Arg}(z) = \frac{1}{2}\arctan(2) + \pi.$$

Die Lösungen sind

$$\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)\right) \text{ und}$$
$$-\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)\right).$$

Beispiel 3.12 *Schreibe ohne goniometrische Funktionen:* $\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)$.

Setze $x = \sqrt[4]{5}\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)$ *und* $y = \sqrt[4]{5}\sin\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right)$, *und man hat* $(x + iy)^2 = 1 + 2i$. *Also nimmt man den reellen und imaginären Teil, und man findet*

$$x^2 - y^2 = 1 \text{ und } 2xy = 2.$$

So folgt $y = \frac{1}{x}$ *und* $x^2 - x^{-2} = 1$, *und durch* $x^2\left(x^2 - x^{-2}\right) = x^2$ *bekommt man*

$$x^4 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Weil x^2 *nicht negativ ist, hat man* $x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ *und* $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$. *Weil* x *positiv ist, folgt*

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arctan(2)\right) = \frac{x}{\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt{\frac{1}{10}\sqrt{5} + \frac{1}{2}}.$$

Das Lösen von $z^2 + \beta z + \gamma = 0$

Der Trick, den wir im dem letzten Beispiel gemacht haben, ist auch nützlich für das Berechnen der Wurzeln eines quadratischen Polynoms:

$$z^2 + \beta z + \gamma c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \tfrac{1}{2}\beta\right)^2 = \tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma.$$

Dieser Trick wird die Vervollständigung des Quadrates genannt. Setzen wir $w = z + \frac{1}{2}\beta$, dann können wir $w^2 = \frac{1}{4}\beta^2 - \gamma$ lösen, entweder durch

$$|w| = \sqrt{\left|\tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right|} \text{ und } \operatorname{Arg}(w) = \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\left(\tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right) + 2k\pi$$

oder mit $w = x + iy$ durch

$$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}\left(\tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right) \text{ und } 2xy = \operatorname{Im}\left(\tfrac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right).$$

Wie vorhin hat man $y = \frac{1}{2}x^{-1}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right)$ (wenn nicht zufälligerweise $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right) = 0$ gilt) und es folgt $x^2 - Bx^{-2} = A$ und

$$x^4 - Ax^2 - B = 0$$

wobei $A = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right)$ und $B = \frac{1}{4}x^{-2}\left(\operatorname{Im}\left(\frac{1}{4}\beta^2 - \gamma\right)\right)^2$. Als nächstes löst man x^2, x und anschließend y. Bemerke das man zwei Lösungen für x und den duzugehörenden y findet. Schlußendlich bekommt man

$$z = x + iy - \frac{1}{2}\beta.$$

Beispiel 3.13 *Wenn man zum Beispiel $z^2 = -4$ lösen möchte, dann kann man auf einem Sudelblatt $z = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} = \pm 2i$ hinschreiben. Wenn man anschließend das Sudelblatt dahin tut wo es hingehört, nämlich zum Altpapier, und $z \in \{2i, -2i\}$ als Antwort liefert, wird keiner das einem übel nehmen. Schlimmer wird es schon, wenn man $z^2 = 2i$ löst durch $z = \pm\sqrt{i}\sqrt{2}$. Jetzt ist diese Wurzel aus i wohl ganz fehl am Platz. Da hilft nur noch*

$$|z|^2 = \left|z^2\right| = 2 \textit{ also } |z| = \sqrt{2} \textit{ und}$$
$$2\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}\left(z^2\right) + 2k\pi = \tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi \textit{ für } k \in \{0,1\}.$$

Man bekommt zwei Möglichkeiten: $z = z_1$ und $z = z_2$, wobei

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 + i, \\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{4}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - i\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -1 - i. \end{aligned}$$

Beispiel 3.14 *Wenn man Maple fragt $z^2 + \left(1 + 4\sqrt{2} + i\left(3 + \sqrt{2}\right)\right)z + \sqrt{2} + 11i = 0$ zu lösen, bekommt man wiederum zwei Möglichkeiten.*

```
> solve(z^2+(1+4*2^(1/2)+I*(3+2^(1/2)))*z+2^(1/2)+11*I=0,z);
```

$$-2\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{I} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{2} + 26\,\mathrm{I}\sqrt{2} + 22 - 22\,\mathrm{I}},\ -2\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{I} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{2} + 26\,\mathrm{I}\sqrt{2} + 22 - 22\,\mathrm{I}}$$

Leider der gleiche Unfug mit Wurzeln aus komplexen Zahlen. Erst wenn man das vernünftig schreibt oder schreiben lässt, findet man $z_1 = -1 - i\sqrt{2}$ und $z_2 = -4\sqrt{2} - 3i$.

Analysis 1, Woche 4

Komplexe Zahlen II

4.1 Fundamentalsatz der Algebra

Wir haben gesehen, dass eine Gleichung wie $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ meistens zwei Lösungen hat und, dass $z^n = \alpha$ sogar n Lösungen in $\mathbb{C}$ hat.

Satz 4.1 (Fundamentalsatz der Algebra) *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Jede Gleichung*

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{4.1}$$

mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$.

Beweis. Einen Beweis hoffen wir in Analysis 2 zu geben. Der Beweis wird analytische Methoden verwenden. ■

Angenommen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \tag{4.2}$$

Lemma 4.2 *Wenn man eine Lösung von (4.1) hat, sagen wir $z = z_0$, dann gibt es $b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$ so, dass*

$$p(z) = (z - z_0) \left(z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-2} z + b_{n-1} \right).$$

Beweis. Wir betonen den Algorithmus, den man benutzt bei der Division $p(z) / (z + w)$:

- Erster Schritt:

$$\begin{array}{lllll} z + w & / & z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \quad \dots \quad + a_{n-1} z + a_n & \backslash & z^{n-1} \\ & & \underline{z^n + w z^{n-1}} & & \\ & & (a_1 - w) z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ \dots \ + a_{n-1} z + a_n & & \end{array}$$

- Zweiter Schritt:

$$\begin{array}{lllll} z + w & / & z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \qquad \dots \qquad + a_{n-1} z + a_n & \backslash & z^{n-1} + (a_1 - w) z^{n-2} \\ & & \underline{z^n + w z^{n-1}} & & \\ & & (a_1 - w) z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \qquad \dots \qquad + a_{n-1} z + a_n & & \\ & & \underline{(a_1 - w) z^{n-1} + w (a_1 - w) z^{n-2}} & & \\ & & \qquad (a_2 - w (a_1 - w)) z^{n-2} + \ \dots \ + a_{n-1} z + a_n & & \end{array}$$

usw. Man findet am Ende einen konstanten Restterm, den wir c nennen. Also

$$\frac{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}{z+w} = z^{n-1} + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-2} z + b_{n-1} + \frac{c}{z+w}.$$

Nehmen wir $w = -z_0$,

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - w = a_1 + z_0, \\ b_2 &= a_2 - w\,(a_1 - w) = a_2 + z_0\,(a_1 + z_0)\,, \\ b_3 &= \ldots\,, \end{aligned}$$

und schreiben wir $q(z) = z^{n-1} + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-2} z + b_{n-1}$, dann folgt

$$\frac{p(z)}{z - z_0} = q(z) + \frac{c}{z - z_0}$$

und

$$p(z) = (z - z_0)\,q(z) + c.$$

Weil $p(z_0) = 0$, hat man $0 = (z_0 - z_0)\,q(z) + c = c.$ ∎

Korollar 4.3 *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und definiere p durch (4.2). Dann gibt es $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ so, dass*

$$p(z) = (z - z_1)\,(z - z_2) \ldots (z - z_n)\,. \tag{4.3}$$

Beweis. Wir benutzen vollständige Induktion. Für $n = 1$ hat man $p(z) = z + a_1$ und das Ergebnis folgt, wenn wir $z_1 = -a_1$ nehmen.

Jetzt nehmen wir an, dass jedes Polynom von Grad n sich schreiben lässt wie in (4.3).

Sei P ein Polynom von Grad $n + 1$:

$$P(z) = z^{n+1} + a_1 z^n + a_2 z^{n-1} + \cdots + a_n z + a_{n+1}.$$

Aus dem Fundamentalsatz folgt, dass $P(z) = 0$ mindestens eine Lösung hat: nennen wir sie z_0. Mit dem letzten Lemma gibt es ein Polynom p so, dass

$$P(z) = (z - z_0)\,p(z)$$

Weil p Grad n hat, gibt es $z_1, \ldots, z_n$ mit

$$p(z) = (z - z_1)\,(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$

und damit folgt die Behauptung: $P(z) = (z - z_0)\,(z - z_1)\,(z - z_2) \ldots (z - z_n)$. ∎

4.1.1 Sein und haben

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass man ein Polynom von Grad n schreiben kann als Produkt von n linearen Faktoren. Das heisst, die Wurzeln $z_1, \ldots, z_n$ existieren. Eine ganz andere Frage ist, ob man diese z_i auch explizit berechnen kann. Approximieren und den Limes nehmen, wird, wenn man das vernünftig macht, sicher funktionieren. Wenn man diesen Wurzeln aber durch ein algebraisches Verfahren berechnen möchte, wie es die pq-Formel macht für Polynome von Grad 2, dann geht das leider selten. Für allgemeine Polynomen von Grad 3 kann man durch die Methode von Cardano[1] die Wurzeln finden und für allgemeine Polynomen von Grad 4 gibt es die Methode von Ferrari. Dann hört es auf. Im Allgemeinen hat man für Polynome von Grad 5 und höher keine algebraische Weise um die Wurzeln zu finden: “es gibt sie, aber man hat sie nicht”. Übrigens scheint Cardano (1501-1576) die Methode nicht selber erfunden zu haben sondern bloß abgeschrieben.

[1] Sehe http://mathworld.wolfram.com/CubicFormula.html und http://mathworld.wolfram.com/QuarticEquation.html .

4.1.2 Reelle Koeffizienten und komplexe Wurzeln.

Lemma 4.4 *Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und definiere p durch (4.2). Wenn $p(z_1) = 0$ dann gilt auch $p(\overline{z_1}) = 0$.*

Beweis. Weil die a_i reell sind hat man sofort

$$\begin{aligned} p(\overline{z_1}) &= (\overline{z_1})^n + a_1 (\overline{z_1})^{n-1} + a_2 (\overline{z_1})^{n-2} + \dots + a_{n-1} (\overline{z_1}) + a_n = \\ &= \overline{z_1^n + a_1 z_1^{n-1} + a_2 {z_1}^{n-2} + \dots + a_{n-1} z_1 + a_n} = \overline{p(z_1)} = 0. \end{aligned}$$

■

4.2 Ungleichungen und $\mathbb{C}$

Es gibt keine totale Anordnung von $\mathbb{C}$, die zu der Körperstruktur passt. Wenn wir $i > 0$ nehmen würden, dann müßte $-1 = i^2 > 0$ stimmen. Ebenso führt $-i > 0$ zu $-1 > 0$. Obwohl es keine vernünftige Anordnung in $\mathbb{C}$ hat, gibt es doch einige nützliche Ungleichungen.

Lemma 4.5 *Sei $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

1. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *und* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$;
2. $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
3. *die Dreiecksungleichung:* $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Beweis. 1 folgt sofort. 2 folgt aus

$$\begin{aligned} |z|^2 &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \leq (\operatorname{Re} z)^2 + 2 |\operatorname{Re} z| |\operatorname{Im} z| + (\operatorname{Im} z)^2 = \\ &= (|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|)^2 . \end{aligned}$$

Und 3 sieht man hier:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \overline{(z + w)} = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = \\ &= z\overline{z} + \left(z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}\right) + w\overline{w} = z\overline{z} + 2 \operatorname{Re}(z\overline{w}) + w\overline{w} = \\ &\leq |z|^2 + 2 |z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2 |z| |\overline{w}| + |w|^2 = \\ &= |z|^2 + 2 |z| |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 . \end{aligned}$$

■

Wir können also auch nicht von Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ reden, wenn wir diese als eine Eigenschaft abhängig von einer totalen Anordnung definieren. Eine Alternative gibt es.

Lemma 4.6 *$\mathbb{C}$ ist vollständig in dem Sinne, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ einen Limes hat in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Wenn $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine komplexe Cauchy-Folge ist, dann ist $\{\operatorname{Re}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Cauchy-Folge, denn

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z_m)| \leq |z_n - z_m| .$$

Weil $\mathbb{R}$ vollständig ist, konvergiert $\{\operatorname{Re}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ und ebenso $\{\operatorname{Im}(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Sagen wir, dass $\operatorname{Re}(z_n) \to a$ und $\operatorname{Im}(z_n) \to b$. Dann gilt aber auch $z_n \to a + ib$. Wir können nämlich wie folgt abschätzen:

$$|z_n - (a + ib)| \leq |\operatorname{Re}(z_n) - a| + |\operatorname{Im}(z_n) - b| .$$

■

4.3 Geometrische Überlegungen

Beispiel 4.7 *Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $ab \neq 0$. Dann beschreibt $\{z \in \mathbb{C}; a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z = c\}$ eine Gerade in $\mathbb{C}$. Und jede Gerade in $\mathbb{C}$ ist so zu beschreiben. Wenn man bedenkt, dass* $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ *und* $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, *ist $a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z = c$ gleich*

$$\overline{(a+ib)}z + (a+ib)\,\overline{z} = 2c$$

Nennt man $w = a + ib$, dann wird das

$$\overline{w}z + w\overline{z} = 2c. \tag{4.4}$$

Beispiel 4.8 *Sei $w \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann beschreibt $\{z \in \mathbb{C}; |z + w| = r\}$ einen Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt $-w$. Und jeden Kreis in $\mathbb{C}$ kann man so beschreiben. Weil $|\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$ gilt, ist $|z + w| = r$ gleich*

$$z\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + w\overline{w} = r^2. \tag{4.5}$$

Beispiel 4.9 *Kreise und Geraden in $\mathbb{C}$ lassen sich zusammen beschreiben von*

$$az\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + b = 0, \tag{4.6}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$ und $|w|^2 > ab$.

Wenn $a = 0$, dann hat man einen Ausdruck der Form (4.4) und beschreibt (4.6) eine Gerade. Wenn $a \neq 0$, dann ist (4.6) gleich

$$z\overline{z} + \overline{\left(\frac{w}{a}\right)}z + \left(\frac{w}{a}\right)\overline{z} + \frac{b}{a} = 0$$

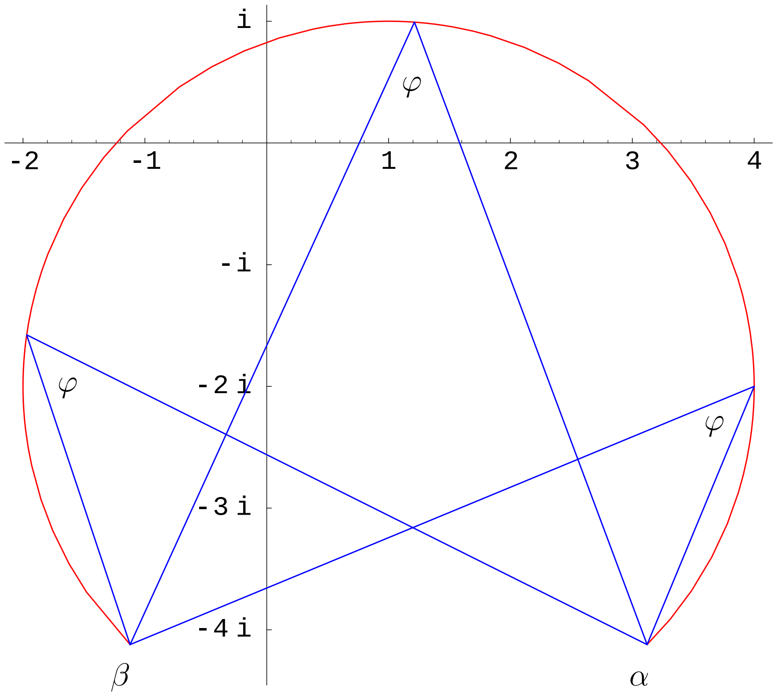
und man hat

$$\left|z + \frac{w}{a}\right|^2 = \left|\frac{w}{a}\right|^2 - \frac{b}{a}.$$

Wenn, und nur wenn $|w|^2 > ab$ gilt, ist die rechte Seite positiv und es gibt einen Kreis.

Beispiel 4.10 *Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq \beta$. Weil $|z - \alpha|$ die Distanz von α zu z darstellt, kann man $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - \alpha| = |z - \beta|$ beschreiben als die $z \in \mathbb{C}$, die die gleiche Distanz sowohl zu α als auch zu β haben. Geometrisch gesprochen wäre das die Mittelsenklinie.*

Beispiel 4.11 *Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$ mit $\alpha \neq \beta$. Dann beschreibt die Menge $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Arg}(z - \alpha) = \operatorname{Arg}(z - \beta) + \varphi\}$ einen Teil von einem Kreis durch α und β. Einen Beweis werden wir später geben.*



4.3.1 Abbildungen

Beispiel 4.12 1. *Eine Verschiebung in* $\mathbb{C}$ *läßt sich beschreiben durch* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit*

$$f(z) = z + w.$$

2. *Die Spiegelung in der reellen Achse kann man beschreiben durch* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit*

$$f(z) = \overline{z}.$$

3. *Eine Rotation um* 0 *kann man beschreiben durch* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit*

$$f(z) = wz$$

wobei $w \in \mathbb{C}$ *so ist, dass* $|w| = 1$. *Der Winkel der Rotation ist* $\operatorname{Arg} w$.

4. *Eine Skalierung zentriert in* 0 *wird* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit*

$$f(z) = wz$$

wobei $w \in \mathbb{R}^+$. *Der Skalierungsfaktor ist genau* w.

Wenn man $w \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ *nimmt, dann ist* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit* $f(z) = wz$ *eine Kombination einer Rotation mit Winkel* $\operatorname{Arg} w$ *und einer Skalierung mit Faktor* $|w|$.

5. *Kombinationen von Verschiebungen, Rotationen und Skalierungen heissen Gleichförmigkeitstransformierungen. Die allgemeine Formel einer solcher Abbildung ist*

$$f(z) = \alpha z + \beta \text{ mit } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ und } \alpha \neq 0. \tag{4.7}$$

Ein solches f *bildet eine Gerade ab auf einer Geraden und einen Kreis auf einem Kreis. Nimmt man auch noch eine Spiegelung dazu, bekommt man eine Abbildung der Form* $f(z) = \alpha \overline{z} + \beta$ *mit* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *und* $\alpha \neq 0$.

6. *Die Spiegelung im Einheitskreis wird eine Inversion genannt. Die dazu gehörende Abbildung ist* $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *mit*

$$f(z) = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Man sieht direkt, dass diese Inversion eine Teilmenge der Form

$$\{z \in \mathbb{C}; az\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + b = 0\}$$

abbildet auf $\left\{\zeta \in \mathbb{C}; b\zeta\overline{\zeta} + \overline{w}\zeta + w\overline{\zeta} + a = 0\right\}$. *Denn schreibt man* $\zeta = (\overline{z})^{-1}$, *folgt* $z = \left(\overline{\zeta}\right)^{-1}$ *und ergibt die Gleichung*

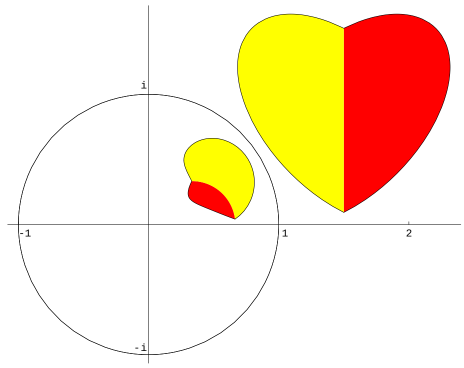
$$az\overline{z} + \overline{w}z + w\overline{z} + b = 0,$$

dass

$$a\frac{1}{\overline{\zeta}}\frac{1}{\zeta} + \overline{w}\frac{1}{\overline{\zeta}} + w\frac{1}{\zeta} + b = 0$$

und, nachdem man mit $\zeta\overline{\zeta}$ *multipliziert hat,*

$$a + \overline{w}\zeta + w\overline{\zeta} + b\zeta\overline{\zeta} = 0.$$



Definition 4.13 *Sei* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ *mit* $\alpha\delta \neq \beta\gamma$. *Dann heißt* $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ *mit*

$$f(z) = \frac{\alpha z - \beta}{\gamma z - \delta}$$

eine ***gebrochen lineare Abbildung***.

Bemerkung 4.13.1 *So wie es hier definiert ist, müßte man Bedenken haben. Was soll denn* $\mathbb{C}^*$ *sein? Die genaue Definition benutzt* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *und geht wie folgt:*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha z - \beta}{\gamma z - \delta} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{\delta/\gamma\}, \\ \infty & \text{für } z = \delta/\gamma, \\ \dfrac{\alpha}{\gamma} & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

Bemerkung 4.13.2 *Wenn* $\gamma = 0$ *in* $f(z) = \dfrac{\alpha z - \beta}{\gamma z - \delta}$, *dann folgt aus* $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, *dass* $\alpha \neq 0$ *und ist* f *wie in (4.7). Wenn* $\gamma \neq 0$, *dann gilt*

$$f(z) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma}\frac{1}{\gamma z - \delta}$$

und ist f *die Kombination von den hier oben genannten Abbildungen:*

$$\begin{array}{lll} f_1(z) = \gamma z, & f_2(z) = z - \delta, & f_3(z) = \frac{1}{z}, \\ f_4(z) = \overline{z}, & f_5(z) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma} z, & f_6(z) = z + \frac{\alpha}{\gamma}. \end{array}$$

Es gilt nämlich: $f(z) = (f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$.

Bemerkung 4.13.3 *Man kann zeigen, dass nur die gebrochen linearen Abbildungen die Eigenschaft haben, "Kreise und Geraden in* $\mathbb{C}^*$*" zu überführen in "Kreise und Geraden in* $\mathbb{C}^*$*".*

Lemma 4.14 *Die inverse Abbildung zu einer gebrochen linearen Abbildung ist auch eine gebrochen lineare Abbildung.*

Beweis. Wenn $w = f(z)w = \dfrac{\alpha\ z - \beta}{\gamma\ z - \delta}$, mit $\alpha\delta \neq \beta\gamma$, dann hat man $z = \dfrac{\delta\ w - \beta}{\gamma\ w - \alpha}$ wenn $w \neq \dfrac{\alpha}{\gamma}$. Man kann leicht sehen, dass $f^{\text{inv}}(\infty) = \dfrac{\delta}{\gamma}$ und $f^{\text{inv}}(\dfrac{\alpha}{\gamma}) = \infty$ auch passen. ■

Gehen wir mal zurück zu Beispiel 4.11. Dort haben wir die Menge

$$\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Arg}(z - \alpha) = \operatorname{Arg}(z - \beta) + \varphi\}$$

betrachtet für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$ mit $\alpha \neq \beta$. Setzten wir $w = \cos\varphi + i \sin\varphi$, dann folgt aus $\operatorname{Arg}(z - \alpha) = \operatorname{Arg}(z - \beta) + \varphi$, dass

$$\frac{z - \alpha}{z - \beta} = rw$$

für irgendeine $r \in \mathbb{R}^+$. Die Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ mit $f(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$ ist eine gebrochen lineare Abbildung, dann ist also auch f^{inv} eine gebrochen lineare Abbildung. Dann beschreibt $\left\{f^{\text{inv}}(rw); r \in \mathbb{R}\right\}$ einen Kreis oder eine Gerade, weil $\{rw; r \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade beschreibt. Weil wir nur eine halbe Gerade haben, nämlich $\{rw; r \in \mathbb{R}^+\}$, bekommen wir mit $\left\{f^{\text{inv}}(rw); r \in \mathbb{R}^+\right\}$ wahrscheinlich nur einen Teil dieses Kreises. Indem wir die beiden Endpunkte betrachten, haben wir $f^{\text{inv}}(0) = \alpha$ und $f^{\text{inv}}(\infty) = \beta$. Das heisst, wir haben wahrscheinlich nur einen Bogen des Kreises und dieser Bogen verbindet α mit β. Weil $\operatorname{Arg}(z - \alpha) > \operatorname{Arg}(z - \beta)$ kann man sich davon überzeugen, dass dieser Bogen rechts von der Geraden $\alpha\beta$ in der Richtung α nach β liegt.

Analysis 1, Woche 5

Funktionen

5.1 Definition

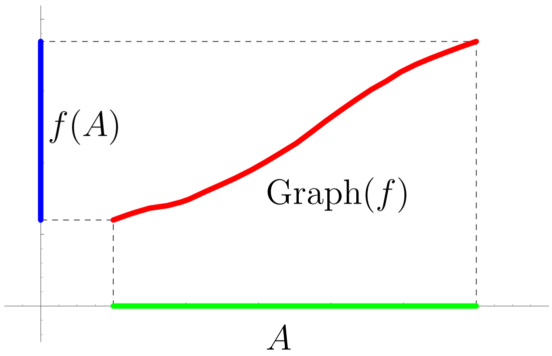
Funktionen oder Abbildungen sind wir schon mehrere Male begegnet. Es wird Zeit mal genau fest zu legen, was gemeint ist.

Definition 5.1 *Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die auf eindeutige Weise zu jedem Element $a \in A$ ein Element $b \in B$ zuordnet.*

Notation 5.2 *Man nennt*

1. *die Menge A den* ***Definitionsbereich****;*
2. *die Menge B den* ***Wertebereich****;*
3. *die Menge $f(A) = \{b \in B; \exists a \in A\}$ die* ***Wertemenge****;*
4. *der* ***Graph*** *dieser Funktion ist definiert als die folgende Teilmenge von $A \times B$:*

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(a, f(a))\,; a \in A\}\,.$$



Bemerkung 5.2.1 *Wenn man $f(x) = x^2$ als Funktion betrachten möchte, dann reicht diese Vorschrift nicht. Man muss auch noch den Definitionsbereich angeben. Einige Beispiele:*

1. *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ ist surjektiv aber nicht injektiv.*
2. *Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht surjektiv aber injektiv.*
3. *Die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ ist surjektiv und injektiv.*
4. *Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht surjektiv und nicht injektiv.*

Bemerkung 5.2.2 *Manchmal wird statt B auch $f(A)$ als Wertebereich gehandelt und nennt man $f(A)$ das Bild von A.*

5.2 Nochmals Polynome

Ein Polynom

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{5.1}$$

kann man betrachten als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ oder von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$. Es ist sogar möglich p als Funktion auf die Menge der $k \times k$-Matrizen zu betrachten.

Lemma 5.3 *Sei p ein Polynom von Grad $n \geq 1$.*

1. *Dann ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv.*

2. *$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist injektiv, dann und nur dann, wenn $n = 1$.*

Bemerkung 5.3.1 *Für $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann man eine solche Aussage nicht machen. Zum Beispiel $p(x) = x^2$ als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist nicht surjektiv. Und $p(x) = x^3$, als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, ist injektiv und hat Grad 3.*

Beweis. 1. Sei $w \in \mathbb{C}$ und betrachte $p(z) - w = 0$. Dann ist $p(z) - w$ auch ein Polynom von Grad n und der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass er eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Anders gesagt, es gibt $z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = w$.

2. ($\Leftarrow$) Wenn p von Grad 1 ist, also $p(z) = a_0 z + a_1$ mit $a_0 \neq 0$, dann ist $a_0 z + a_1 = w$ für jede $w \in \mathbb{C}$ eindeutig lösbar.

2. ($\Rightarrow$) Sei p ein Polynom von Grad $n > 1$. Als Folgerung dieses Fundamentalsatzes gibt es $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ so, dass

$$p(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Wenn nicht alle z_i gleich sind, dann hat p zwei verschiedene Nullstellen, dass heißt $p(z_i) = p(z_j) = 0$ für $z_i \neq z_j$ und ist p nicht injektiv. Wenn alle z_i gleich sind, dann hat man

$$p(z) = a_0 (z - z_1)^n$$

und hat $p(z) = a_0$ genau n unterschiedliche Lösungen, nämlich die n Einheitswurzeln, und ist p wiederum nicht injektiv. ∎

Lemma 5.4 *Angenommen, $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ sind alle verschieden. Dann gilt folgendes*

1. *Es gibt genau ein Polynom n-ten Grades mit $a_0 = 1$, der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ als Nullstellen hat. Wenn $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$, dann hat man $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.*

2. *Es gibt genau ein Polynom n-ten Grades mit $p(z_0) = 1$, der $z_1, z_2, \ldots, z_n$ als Nullstellen hat. Wenn $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$, dann hat man $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.*

Beweis. 1. Ein solches Polynom ist

$$p(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n). \tag{5.2}$$

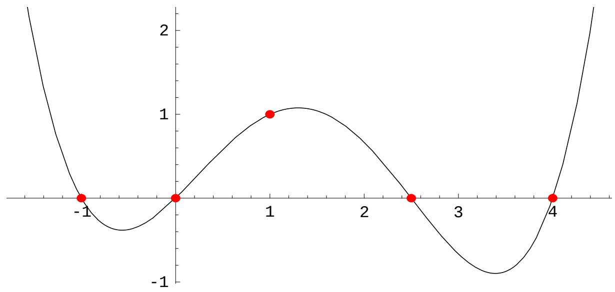
Aus Lemma 4.2 folgt, dass wenn p die Nullstelle z_1 hat, es ein Polynom q von Grad $n-1$ gibt so, dass $p(z) = (z - z_1)\, q(z)$. Man hat auch $q(z_i) = p(z_i)/(z_i - z_1) = 0$ für $i > 1$. Eine wiederholte Anwendung ergibt, dass p tatsächlich wie in (5.2) ist.

2. Man nimmt

$$p(z) = \frac{(z - z_1)\ (z - z_2)\ \ldots\ (z - z_n)}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \ldots (z_0 - z_n)} \tag{5.3}$$

und bekommt Eindeutigkeit indem man den ersten Teil benutzt.

Man sieht sofort, dass reelle Nullstellen, sowohl in (5.2) als auch in (5.3), reellen Koeffizienten liefern. ∎



Eine Skizze vom Graphen des Polynoms p von Grad 4 mit $p(-1) = p(0) = p(\frac{5}{2}) = p(4) = 0$ und $p(1) = 1$.

Korollar 5.5 *Angenommen, $z_0, z_1, \ldots, z_n$ sind $n+1$ unterschiedliche reelle (oder komplexe) Zahlen. Für die reellen (oder komplexen) Zahlen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ gibt es ein Polynom p mit höchstens Grad n so, dass $p(z_i) = f_i$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Beweis. Man nehme

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{z - z_j}{z_i - z_j} \right) f_i.$$

Es folgt, dass $p(z_k) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{z_k - z_j}{z_i - z_j} \right) f_i = \left(\prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne k}} \frac{z_k - z_j}{z_k - z_j} \right) f_k = f_k$. ■

5.3 Rationale Funktionen

Definition 5.6 *Eine rationale Funktion f besteht aus dem Quotient zweier Polynome, sagen wir p und q. Wenn q die Nullstellen $z_1, \ldots, z_k$ hat, dann heisst dass:*

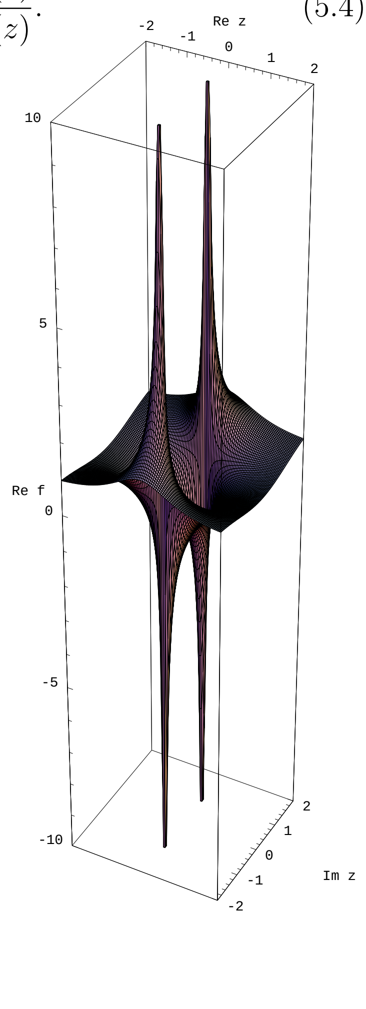
$$f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C} \text{ und } f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}. \tag{5.4}$$

Bemerkung 5.6.1
Man darf davon ausgehen, dass p und q keine gemeinsame Nullstellen haben. Denn wenn sie eine solche hätten, liesse sich die Formel $\frac{p(z)}{q(z)}$ vereinfachen. Zum Beispiel

$$\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^4 - 1} = \frac{(z^2-1)^2}{(z^2+1)(z^2-1)} = \frac{z^2-1}{z^2+1}.$$

Wenn p und q keine gemeinsame Nullstellen haben, dann nennt man eine Nullstelle von q einen Pol von f. Wenn $z = z_1$ eine n-fache Nullstelle für q ist, heißt z_1 einen n-fachen Pol von f. In der Nähe eines Pols ist eine rationale Funktion unbeschränkt. Hier rechts steht eine Skizze zum Graphen des reellen Teils von $\frac{z^2-1}{z^2+1}$, das heißt, von der Funktion $f_1 : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(z) = \text{Re}\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right).$$



Proposition 5.7 *Seien p und q Polynome mit $q(z) = (z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2}\dots(z-z_k)^{n_k}$ und $z_1,\dots,z_k$ alle verschieden und $n_1,\dots,n_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Dann lässt sich die rationale Funktion f in (5.4) schreiben als*

$$\begin{aligned} f(z) \; = \;& \frac{c_{11}}{(z-z_1)^{n_1}} + \frac{c_{12}}{(z-z_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{c_{1n_1}}{(z-z_1)} + \\ &+ \frac{c_{21}}{(z-z_2)^{n_2}} + \frac{c_{22}}{(z-z_2)^{n_2-1}} + \dots + \frac{c_{2n_1}}{(z-z_2)} + \\ &+ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad + \\ &+ \frac{c_{k1}}{(z-z_k)^{n_k}} + \frac{c_{k2}}{(z-z_k)^{n_k-1}} + \dots + \frac{c_{kn_1}}{(z-z_k)} + \\ &+ r(z) \end{aligned}$$

wobei $c_{ij} \in \mathbb{C}$ und r ein Polynom ist mit $\mathrm{Grad}(r) = \mathrm{Grad}(p) - \mathrm{Grad}(q)$ wenn $\mathrm{Grad}(p) \geq \mathrm{Grad}(q)$. Wenn $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q)$ hat man $r = 0$.

Bemerkung 5.7.1 *Man nennt diesen Vorgang **die Abspaltung von Partialbrüchen**. Aus dieser neuen Darstellung folgt, dass es zum Verständnis einer rationalen Funktion reicht, das Verhalten von einzelnen Polen zu studieren. Der Grund für diesen Aufwand soll, wenn nicht jetzt, spätetens bei der Integration deutlich werden.*

Beispiel 5.8 *Bevor wir einen Beweis geben, erinnern wir noch mal an den Divisionalgorithmus. Wir haben ihn benutzt, um Faktoren aus einem Polynom zu holen. Auch bei der Abtrennung von Standardtermen aus einer rationalen Funktion wird er benutzt. Als Beispiel:*

$$f(x) = \frac{x^6 + x^5 + x^4 + 1}{x^4 - 2x^2 + 1}.$$

Die Division liefert

$$\begin{array}{lll} x^4 - 2x^2 + 1 \;\; / & x^6 + x^5 + x^4 + 1 & \backslash \;\; x^2 + x + 3 \\ & \underline{x^6 - 2x^4 + x^2} & \\ & \quad x^5 + 3x^4 - x^2 + 1 & \\ & \quad \underline{x^5 - 2x^3 + x} & \\ & \qquad 3x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 & \\ & \qquad \underline{3x^4 - 6x^2 + 3} & \\ & \qquad\quad 2x^3 + 5x^2 - x - 2 & \end{array}$$

und also

$$\frac{x^6 + x^5 + x^4 + 1}{x^4 - 2x^2 + 1} = x^2 + x + 3 + \frac{2x^3 + 5x^2 - x - 2}{x^4 - 2x^2 + 1}.$$

Wir verfolgen mit

$$\begin{aligned} &\frac{2x^3 + 5x^2 - x - 2}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{2x^3 + 5x^2 - x - 2}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 1)} = \\ = \;& \frac{(2x^3 + 5x^2 - x - 2) + {-1}(x^2 + 2x + 1) + 1(x^2 + 2x + 1)}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 1)} = \end{aligned}$$

Hier ist -1 so gewählt, dass $((2x^3 + 5x^2 - x - 2) + {-1}(x^2 + 2x + 1))_{x=1} = 0$, dass heißt, man berechnet c derart, dass

$$0 = \left(2x^3 + 5x^2 - x - 2\right)_{x=1} + c\left(x^2 + 2x + 1\right)_{x=1} = 4 + c\,4.$$

Demzufolge ist $(2x^3+5x^2-x-2)-1\,(x^2+2x+1)$ *ein Polynom mit* $x=1$ *als Nullstelle. Und weil* $x=1$ *eine Nullstelle ist, kann man einen Faktor* $(x-1)$ *ausklammern in*

$$\left(2x^3+5x^2-x-2\right)-1\left(x^2+2x+1\right)=2x^3+4x^2-3x-3.$$

Dazu benutzt man wiederum eine Division:

$$\begin{array}{lll} x-1 \;\; / & 2x^3+4x^2-3x-3 & \backslash \;\; 2x^2+6x+3 \\ & \underline{2x^3-2x^2} & \\ & \quad 6x^2-3x-3 & \\ & \quad \underline{6x^2-6x} & \\ & \qquad\quad 3x-3 & \\ & \qquad\quad \underline{3x-3} & \\ & \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Man findet $2x^3+4x^2-3x-3=(x-1)\,(2x^2+6x+3)$ *und geht wie folgt weiter:*

$$\begin{aligned} &= \frac{(2x^3+5x^2-x-2)-1\,(x^2+2x+1)}{(x-1)^2\,(x^2+2x+1)}+\frac{1\,(x^2+2x+1)}{(x-1)^2\,(x^2+2x+1)}= \\ &= \frac{(x-1)\,(2x^2+6x+3)}{(x-1)^2\,(x^2+2x+1)}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(6x+2x^2+3)}{(x-1)\,(x^2+2x+1)}+\frac{1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Das gleiche tun wir mit

$$\begin{aligned} \frac{(2x^2+6x+3)}{(x-1)\,(x^2+2x+1)} &= \frac{(2x^2+6x+3)-\frac{11}{4}\,(x^2+2x+1)}{(x-1)\,(x^2+2x+1)}+\frac{\frac{11}{4}\,(x^2+2x+1)}{(x-1)\,(x^2+2x+1)}= \\ &= \frac{\left(-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)(x-1)}{(x-1)\,(x^2+2x+1)}+\frac{\frac{11}{4}}{x-1}=\frac{-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}{x^2+2x+1}+\frac{\frac{11}{4}}{x-1}. \end{aligned}$$

Es wurde benutzt, dass

$$\left(2x^2+6x+3\right)-\frac{11}{4}\left(x^2+2x+1\right)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\left(-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)(x-1)\,.$$

Noch einmal ähnliches:

$$\frac{-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}{x^2+2x+1}=\frac{-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}}{(x+1)^2}=\frac{-\frac{3}{4}\,(x+1)+\frac{1}{2}}{(x+1)^2}=\frac{-\frac{3}{4}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}.$$

Insgesamt bringt es uns zu

$$\frac{x^6+x^5+x^4+1}{x^4-2x^2+1}=x^2+x+3+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{11}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2}+\frac{-\frac{3}{4}}{x+1}.$$

Wenn man dieses Beispiel genau betrachtet, gibt es eigentlich nur einen wichtigen Schritt.

Lemma 5.9 *Seien* p *und* q *Polynome mit* $\mathrm{Grad}(p)\le\mathrm{Grad}(q)-1$ *und so, dass* p *und* q *keine gemeinsame Nullstelle haben. Sei* z_1 *eine* m*-fache Nullstelle von* q*, sagen wir*

$$q(z)=(z-z_1)^m\,\tilde{q}(z),$$

dann gibt es ein Polynom $\tilde{p}$ *mit* $\mathrm{Grad}(\tilde{p})\le\mathrm{Grad}(q)-2$ *und eine* $c\in\mathbb{C}$ *so, dass*

$$\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{p(z)}{(z-z_1)^m\,\tilde{q}(z)}=\frac{\tilde{p}(z)}{(z-z_1)^{m-1}\,\tilde{q}(z)}+\frac{c}{(z-z_1)^m}. \tag{5.5}$$

Beweis von Lemma 5.9. Weil $\tilde{q}(z_1) \neq 0$, ist $c = \frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}$ wohl definiert und es ist folgendes erlaubt:

$$\frac{p(z)}{(z-z_1)^m \, \tilde{q}(z)} = \frac{p(z) - \frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}\tilde{q}(z) + \frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}\tilde{q}(z)}{(z-z_1)^m \, \tilde{q}(z)} = \frac{p(z) - \frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}\tilde{q}(z)}{(z-z_1)^m \, \tilde{q}(z)} + \frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)} \frac{1}{(z-z_1)^m}.$$

Weil $P(z) = p(z) - \frac{p(z_1)}{\tilde{q}(z_1)}\tilde{q}(z)$ ein Polynom ist mit $z = z_1$ als Nullstelle und mit $\text{Grad}(P) \leq \text{Grad}(q) - 1$, gibt es ein Polynom $\tilde{p}$ mit $\text{Grad}(\tilde{p}) = \text{Grad}(P) - 1$ so, dass

$$P(z) = (z - z_1)\, \tilde{p}(z).$$

Es folgt, dass

$$\frac{p(z)}{(z-z_1)^m \, \tilde{q}(z)} = \frac{\tilde{p}(z)}{(z-z_1)^{m-1} \, \tilde{q}(z)} + \frac{c}{(z-z_1)^m}.$$

■

Beweis von Satz 5.7. Der erste Schritt wäre, im Fall $\text{Grad}(p) \geq \text{Grad}(q)$, durch eine Division eine rationale Funktion zu bekommen mit dem Grad des Zählers kleiner als den Grad des Nenners. Das liefert uns ein Polynom r und ein Polynom p_1 mit $\text{Grad}(p_1) \leq \text{Grad}(q) - 1$ derart, dass

$$\frac{p(z)}{q(z)} = r(z) + \frac{p_1(z)}{q(z)}.$$

Als nächsten Schritt vereinfachen wir $\frac{p_1(z)}{q(z)}$ so, dass p_1 und q keine gemeinsame Nullstellen haben. Jetzt brauchen wir den Satz nur für solche $\frac{p_1(z)}{q(z)}$ zu beweisen.

Das beweisen wir mit vollständiger Induktion nach dem Grad von q.

1) Wenn $\text{Grad}(q) = 1$, dann gilt $\text{Grad}(p_1) = 0$ und hat $\frac{p_1(z)}{q(z)}$ schon die gefragte Form.

2) Nehmen wir an, dieser Satz stimmt für alle q mit Grad n. Wenn wir ein Polynom q von Grad $n+1$ haben, dann erlaubt uns Lemma 5.9 die Induktionsannahme zu nutzen, denn (5.5) gibt uns eine rationale Funktion mit Grad n im Nenner. ■

Die oben durchgeführte Spaltung kann eine langwierige Sache sein, wenn man all diese Schritte verfolgt. Weil man aber jetzt weis, was zu erwarten ist, kann man schneller voran kommen.

Beispiel 5.10 *Nehmen wir* $\dfrac{z^5}{z^4+2z^2+1}$. *Die erste Division läßt sich kaum kürzen:*

$$\frac{z^5}{z^4+2z^2+1} = \frac{z^5+2z^3+z}{z^4+2z^2+1} - \frac{2z^3+z}{z^4+2z^2+1} = z - \frac{2z^3+z}{z^4+2z^2+1}.$$

Dann muss man immer noch den Nenner faktorisieren:

$$z^4 + 2z^2 + 1 = \left(z^2+1\right)^2 = \left((z-i)\,(z+i)\right)^2 = (z-i)^2\,(z+i)^2\,.$$

Wir können jetzt aber verwenden, dass wir wissen, es gibt $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, so dass

$$\frac{2z^3+z}{z^4+2z^2+1} = \frac{2z^3+0z^2+1z+0}{z^4+2z^2+1} = \frac{a}{(z-i)^2} + \frac{b}{z-i} + \frac{c}{(z+i)^2} + \frac{d}{z+i}.$$

Die rechte Seite kann man zusammen nehmen:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{(z-i)^2} + \frac{b}{z-i} + \frac{c}{(z+i)^2} + \frac{d}{z+i} = \\
= \; &\frac{a\,(z+i)^2 + b\,(z+i)^2\,(z-i) + c\,(z-i)^2 + d\,(z-i)^2\,(z+i)}{(z-i)^2\,(z+i)^2} = \\
= \; &\frac{(b+d)\,z^3 + (a+ib+c-id)\,z^2 + (2ia+b-2ic+d)\,z + ib-a-c-id}{\left(z^2+1\right)^2},
\end{aligned}$$

und man muss nur noch ein lineares System von 4 Gleichungen lösen:

$$\left\{\begin{array}{r} b+d=2, \\ a+ib+c-id=0, \\ 2ia+b-2ic+d=1, \\ ib-a-c-id=0. \end{array}\right.$$

Man findet $a=\frac{1}{4}i$, $b=1$, $c=-\frac{1}{4}i$ *und* $d=1$. *Das Ergebnis lautet:*

$$\frac{z^5}{z^4+2z^2+1}=z-\frac{\frac{1}{4}i}{(z-i)^2}-\frac{1}{z-i}+\frac{\frac{1}{4}i}{(z+i)^2}-\frac{1}{z+i}.$$

5.4 Potenzen und Wurzeln

Potenzen mit ganzen Zahlen sind definiert durch

$$\begin{array}{lll} \text{wenn } n\in\mathbb{N}^+: & z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n \text{ Faktoren}} & \text{für } z\in\mathbb{C}, \\ \text{wenn } n=0: & z^0=1 & \text{für } z\in\mathbb{C}, \\ \text{wenn } n\in\mathbb{Z}^-: & z^{-n}=\frac{1}{z^n} & \text{für } z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}. \end{array}$$

Die ersten Erweiterungen sind die Wurzelfunktionen:

- Wenn $n\in\mathbb{N}$ gerade ist, dann ist $(x\mapsto\sqrt[n]{x}):\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ definiert als die inverse Funktion zu $(x\mapsto x^n):\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$.

Weil die Funktion $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ mit $f(x)=x^n$ für jede $n\in\mathbb{N}^+$ injektiv (weil $0\le x_1<x_2$ impliziert, dass $x_1^n<x_2^n$) und surjektiv ist, gibt es genau eine Lösung in $\mathbb{R}_0^+$ von $y=x^n$ für $y\in\mathbb{R}_0^+$. Diese Lösung $x\in\mathbb{R}_0^+$ nennt man $\sqrt[n]{x}$.

- Wenn $n\in\mathbb{N}$ ungerade ist, dann ist $(x\mapsto\sqrt[n]{x}):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert als die inverse Funktion zu $(x\mapsto x^n):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Hier wird benutzt, dass $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^n$ bijektiv ist.

5.4.1 Potenzen mit rationalen Koeffizienten

Was machen wir mit $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ für $m\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}^+$? Für $x>0$ gibt es kein Problem.

- Man definiert die Funktion $\left(x\mapsto x^{\frac{m}{n}}\right):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ durch

$$x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}.$$

Man kann sehen, dass $y_1=x^{\frac{km}{kn}}$ und $y_2=x^{\frac{m}{n}}$ das gleiche Ergebnis liefern. Denn

$$y_1^{kn}=\left(\sqrt[kn]{x^{km}}\right)^{kn}=x^{km} \text{ und } y_2^{kn}=\left(y_2^n\right)^k=\left(\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^n\right)^k=(x^m)^k=x^{km}$$

und weil $\left(y\mapsto y^{kn}\right):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ injektiv ist, folgt $y_1=y_2$. Weil $\frac{km}{kn}$ und $\frac{m}{n}$ in $\mathbb{Q}$ mit $k\in\mathbb{N}$ die gleiche Zahl vertritt, ist so x^p wohl definiert für $p\in\mathbb{Q}$ und $x\in\mathbb{R}^+$. Das ganze sieht aus wie eine Trivialität bis man folgendes betrachtet:

$$-1=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{(-1)^5}=(-1)^{\frac{5}{3}}=(-1)^{\frac{10}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^{10}}=\sqrt[6]{1}=1.$$

Um derartige Probleme zu vermeiden, definieren wir $x\mapsto x^{\frac{m}{n}}$ nicht für $x<0$.

Für positive x passt das alles wie man möchte und man kann wie 'üblich' mit den Koeffizienten verfahren:

Lemma 5.11 *Seien $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $p, q \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:*

1. $x^{p+q} = x^p x^q$;
2. $x^{pq} = (x^p)^q$;
3. $(xy)^p = x^p y^p$.

Beweis. Wenn $p, q \in \mathbb{Z}$ liegen, dann folgen diese Ergebnisse aus einer wiederholten Anwendung von der Körpereigenschaften. Übrig bleibt es zu beweisen für $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}$.

Wir setzen $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{k}{\ell}$ mit $m, k \in \mathbb{Z}$ und $n, \ell \in \mathbb{N}^+$.

Die erste Behauptung:

$$\begin{aligned}
\left(x^{p+q}\right)^{n\ell} &= \left(x^{\frac{m}{n}+\frac{k}{\ell}}\right)^{n\ell} = \left(x^{\frac{m\ell+kn}{n\ell}}\right)^{n\ell} = \left(\sqrt[n\ell]{x^{m\ell+kn}}\right)^{n\ell} = x^{m\ell+kn},\\
\left(x^p x^q\right)^{n\ell} &= \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n\ell}\left(x^{\frac{k}{\ell}}\right)^{n\ell} = \left(\sqrt[n]{x^m}^{\,n}\right)^{\ell}\left(\sqrt[\ell]{x^k}^{\,\ell}\right)^{n} = \left(x^m\right)^{\ell}\left(x^k\right)^{n} = x^{m\ell+kn},
\end{aligned}$$

und die Injektivität von $\left(x \mapsto x^{n\ell}\right) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ liefert $x^{p+q} = x^p x^q$.

Die zweite Behauptung:

$$\begin{aligned}
\left(x^{pq}\right)^{n\ell} &= \left(x^{\frac{mk}{n\ell}}\right)^{n\ell} = \left(\sqrt[n\ell]{x^{mk}}\right)^{n\ell} = x^{mk},\\
\left(\left(x^p\right)^q\right)^{n\ell} &= \left(\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{k}{\ell}}\right)^{n\ell} = \left(\sqrt[\ell]{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{k}}^{\,\ell}\right)^{n} = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{kn} = \left(\sqrt[n]{x^m}^{\,n}\right)^{k} = \left(x^m\right)^k = x^{mk},
\end{aligned}$$

und die Injektivität von $\left(x \mapsto x^{n\ell}\right) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ liefert $x^{pq} = \left(x^p\right)^q$.

Die dritte Behauptung:

$$\left((xy)^p\right)^n = \sqrt[n]{(xy)^m}^{\,n} = (xy)^m = x^m y^m = \sqrt[n]{x^m}^{\,n}\sqrt[n]{y^m}^{\,n} = \left(x^p\right)^n\left(y^p\right)^n = \left(x^p y^p\right)^n$$

und die Injektivität von $\left(x \mapsto x^n\right) : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ liefert $(xy)^p = x^p y^p$. ■

Analysis 1, Woche 6

Folgen

6.1 Folgen, Cauchy und Konvergenz

Die reellen Zahlen haben wir eingeführt, indem wir monoton wachsende Folgen in $\mathbb{Q}$ benutzt haben. Derartige Folgen hatten einen Grenzwert und ganz grob gesagt: die Menge aller solcher Grenzwerte haben wir $\mathbb{R}$ genannt. Außerdem haben wir bemerkt, dass man mit monoton wachsenden Folgen in $\mathbb{R}$ keine noch größere Zahlenmenge bekommt. Anders formuliert: $\mathbb{R}$ ist vollständig. Auch haben wir bemerkt, dass Cauchy-Folgen (von rationalen Zahlen) einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ haben und man soll sich nicht wundern, dass Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$ einen Grenzwert in $\mathbb{C}$ haben.

Wir wiederholen/erweitern:

Definition 6.1 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

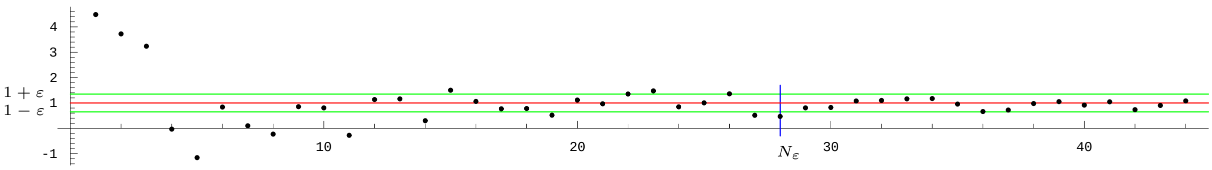
- *Sie heißt eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, wenn*
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \; n, m > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$
- *Sie heißt eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$, wenn es $a \in \mathbb{R}$ gibt so, dass*
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \; n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$
- *Sie heißt eine divergente Folge in $\mathbb{R}$, wenn sie nicht konvergent ist.*

Bemerkung 6.1.1 *Wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt, bekommt man die Definition von einer Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, von einer konvergenten Folge in $\mathbb{C}$ und von eine divergente Folge in $\mathbb{C}$.*

Bemerkung 6.1.2 *Allgemein gilt, dass eine konvergent Folge auch eine Cauchy-Folge ist. Wenn a der Limes ist, dann gilt*
$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m|$$
und mit Hilfe dieser Abschätzung kann man bei $\varepsilon > 0$ für die konvergente Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ die Zahl $N_\varepsilon^{Cauchy} := N_{\varepsilon/2}^{Konvergenz}$ nehmen.

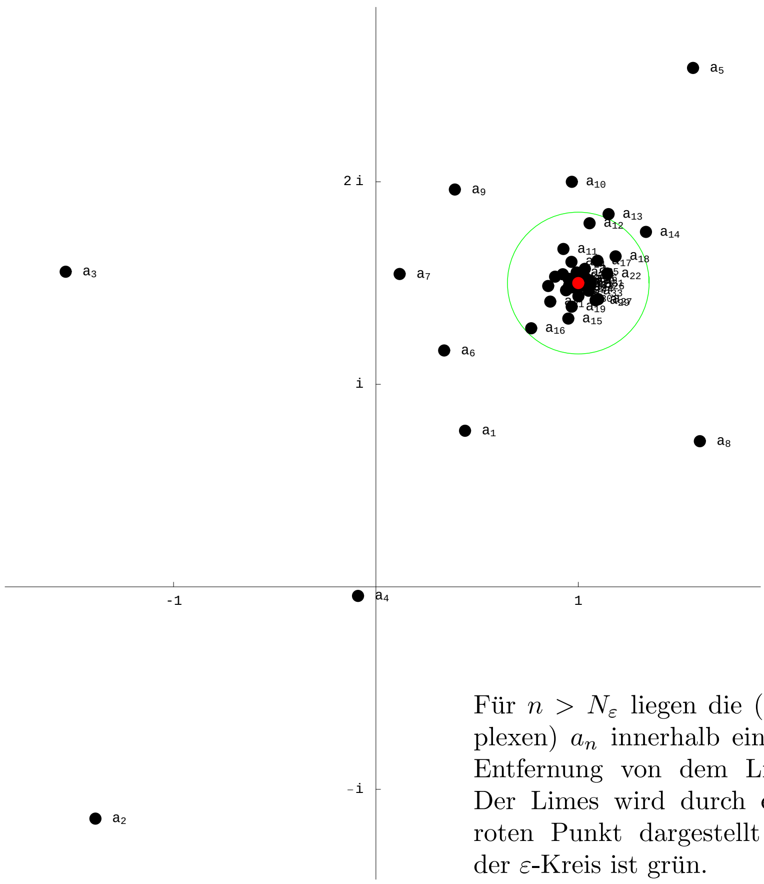
Eine Cauchy-Folge (in zum Beispiel $\mathbb{Q}$) ist aber nicht unbedingt konvergent (in die Menge $\mathbb{Q}$).

Bemerkung 6.1.3 *Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nach a konvergiert, schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. In dieser Notation sind also zwei Behauptungen versteckt: erstens, dass die Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, und zweitens, dass der Limes (oder Grenzwert) gleich a ist.*



Konvergenz in $\mathbb{R}$ kann man sich wie hier oben vorstellen: Wenn man an N_ε vorbei ist, liegen die restlichen a_n innerhalb einer Bandbreite ε von dem Limes. Der dargestellte Limes ist 1.

Wir wiederholen: jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Ebenso ist jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$.



Für $n > N_\varepsilon$ liegen die (komplexen) a_n innerhalb einer ε-Entfernung von dem Limes. Der Limes wird durch einen roten Punkt dargestellt und der ε-Kreis ist grün.

6.1.1 Rechenregeln

Wir geben die wichtigsten Rechenregeln für den Limes.

Lemma 6.2 *Seien $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$ Dann gilt:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ wenn $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$.

Bemerkung 6.2.1 *Weil $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ liegt, gelten diese Regeln selbstverständlich auch für Folgen in $\mathbb{R}$.*

Bemerkung 6.2.2 *Für reelle Folgen sieht man auch manchmal $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Das heißt dann, der Limes existiert nicht (oder existiert im uneigentlichen Sinne) und es gibt für jede $M \in \mathbb{Z}^-$ eine Zahl $N_M \in \mathbb{N}$, so dass $a_n < M$ wenn $n > N_M$. Ähnlich wird $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ definiert. Die Rechenregel, die hier oben stehen, gelten im allgemeinen nicht.*

1. *Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $c > 0$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = \infty$.*
2. *Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.*
3. *Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, dann $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \infty$.*

Einen Beweis dieser Behauptungen dürfen Sie sich selber ausdenken.

Übrigens, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, dann kann man so allgemein nichts sagen zu $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$. Auch aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ kann man noch nichts folgern für $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n)$.

Beweis von Lemma 6.2. Nennen wir $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

1. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N_{\varepsilon/(1+|c|)} \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon/(1+|c|)$ für $n > N_{\varepsilon/(1+|c|)}$. Es folgt, dass für $n > N_{\varepsilon/(1+|c|)}$

$$|ca_n - ca| = |c|\,|a_n - a| \leq |c| \frac{\varepsilon}{(1+|c|)} < \varepsilon.$$

Man könnte sich fragen warum wir $\varepsilon/(1+|c|)$ statt $\varepsilon/|c|$ verwenden. Eigentlich sollte $\varepsilon/|c|$ doch reichen? Jein! Für $c \neq 0$ klappt es, aber den Fall $c = 0$ müssen wir dann getrennt behandeln, weil da $\varepsilon/|c|$ nicht definiert ist.

2. Sei $\varepsilon > 0$. Dann müssen wir zeigen, dass es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Weil $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt, gibt es $N^a_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für $n > N^a_{\varepsilon/2}$. Ebenso gibt es $N^b_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für $n > N^b_{\varepsilon/2}$. Setzen wir $N_\varepsilon = \max\left(N^a_{\varepsilon/2}, N^b_{\varepsilon/2}\right)$, dann folgt für $n > N_\varepsilon$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

3. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\varepsilon_1 = \frac{1}{2|b|+2}\varepsilon$ und $\varepsilon_2 = \min\left(\frac{1}{2|a|+2}\varepsilon, 1\right)$. Es gibt $N^a_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon_1$ für $n > N^a_{\varepsilon_1}$ und $N^b_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \varepsilon_2$ für $n > N^b_{\varepsilon_1}$. Für $n > N_\varepsilon = \max\left(N^a_{\varepsilon_1}, N^b_{\varepsilon_2}\right)$ haben wir $|b_n - b| < \varepsilon_2 \leq 1$, also auch $|b_n| \leq |b_n - b| + |b| \leq |b| + 1$, und

$$\begin{aligned}
|(a_n b_n) - (ab)| &= |a_n b_n - a b_n + a b_n - ab| \leq |a_n b_n - a b_n| + |a b_n - ab| = \\
&\leq |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b| \leq \\
&\leq (|b| + 1)\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| < \\
&< (|b| + 1)\,\frac{\varepsilon}{2\,|b| + 2} + |a|\,\frac{\varepsilon}{2\,|a| + 2} \leq \\
&\leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

4. Sei $\varepsilon > 0$. Nehmen wir[1] $\varepsilon_1 = \min\left(\frac{1}{2}\,|b|\,\varepsilon, 1\right)$ und $\varepsilon_2 = \min\left(\frac{1}{4}\frac{|b|^2}{|a|+1}\varepsilon, \frac{1}{2}\,|b|\right)$. Dann gibt es $N^a_{\varepsilon_1}, N^b_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon_1$ für $n > N^a_{\varepsilon_1}$ und $|b_n - b| < \varepsilon_2$ für $n > N^b_{\varepsilon_2}$. Also gilt auch $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$ für $n > N^a_{\varepsilon_1}$ und $|b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq |b| - \frac{1}{2}\,|b| = \frac{1}{2}\,|b|$ für $n > N^b_{\varepsilon_1}$. Damit zeigt sich, dass für $n > N_\varepsilon := \max\left(N^a_{\varepsilon_1}, N^b_{\varepsilon_2}\right)$ gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n}{b} + \frac{a_n}{b} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n}{b}\right| + \left|\frac{a_n}{b} - \frac{a}{b}\right| \leq \\
&\leq \frac{|a_n|}{|b|\,|b_n|}\,|b - b_n| + \frac{1}{|b|}\,|a_n - a| \leq \\
&\leq \frac{|a| + 1}{\frac{1}{2}\,|b|^2}\,|b - b_n| + \frac{1}{|b|}\,|a_n - a| < \\
&< \frac{|a| + 1}{\frac{1}{2}\,|b|^2}\varepsilon_2 + \frac{1}{|b|}\varepsilon_1 \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

5. Weil die Dreiecksungleichung impliziert, dass

$$-\,|a_n - a| \leq |a_n| - |a| \leq |a_n - a|\,,$$

folgt $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ und können wir zu jeden $\varepsilon > 0$ für die Folge $\{|a_n|\}_{n=0}^\infty$ den N_ε für $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ wählen.

6. Weil $|\mathrm{Re}\,a_n - \mathrm{Re}\,a| \leq |a_n - a|$ folgt die letzte Aussage auf ähnlicher Art. ■

6.1.2 Einige Standardverfahren

Lemma 6.3 (Einschließungslemma) *Wenn $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ und $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ drei reelle Folgen sind, wobei*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell = \lim_{n\to\infty} c_n \text{ und } a_n \leq b_n \leq c_n,$$

dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Bemerkung 6.3.1 *Das Lemma ist auch bekannt als das Lemma von den zwei Polizisten und einem Kriminellen. Auf Englisch heißt es das Sandwichlemma.*

[1] Frage: Wieso diese eigenartigen ε_1 und ε_2? Antwort: Weil es damit klappt. Frage: Wieso klappt es denn mit diese Zahlen? Antwort: Weil man erst das Ende berechnet und dann im Rückwärtsgang anschaut was man dazu braucht.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N_\varepsilon^a, N_\varepsilon^c \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - \ell| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon^a$ und $|b_n - \ell| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon^b$. Für $n > \max(N_\varepsilon^a, N_\varepsilon^c)$ gilt

$$b_n - \ell \geq a_n - \ell \geq -|a_n - \ell| > -\varepsilon \text{ und } b_n - \ell \leq c_n - \ell \leq |c_n - \ell| < \varepsilon,$$

also $|b_n - \ell| < \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon^b := \max(N_\varepsilon^a, N_\varepsilon^c)$. ∎

Lemma 6.4 *1.* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} = 0$ *wenn* $q \in \mathbb{Q}^+$*;*

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ *wenn* $x \in \mathbb{R}^+$*;*

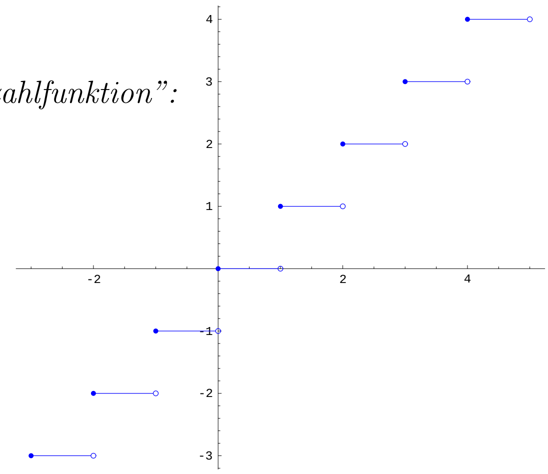
3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$*;*

4. $\lim_{n\to\infty} n^m z^n = 0$ *wenn* $m \in \mathbb{N}$ *und* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$*.*

Definition 6.5 *Die Entierfunktion oder "Ganzzahlfunktion":*

$$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$[x] = \text{die größte Zahl } n \in \mathbb{Z}, \text{ so dass } n \leq x.$$

Der Graph zu der Entierfunktion:



Bemerkung 6.5.1 *Es folgt, dass*

$$[x] \leq x < [x] + 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis von Lemma 6.4. Sei $\varepsilon > 0$. 1. Man nehme $N_\varepsilon = \left[\varepsilon^{-1/q}\right] + 1$:

$$\left|\frac{1}{n^q} - 0\right| = n^{-q} \leq \left(\left[\varepsilon^{-1/q}\right] + 1\right)^{-q} < \left(\varepsilon^{-1/q}\right)^{-q} = \varepsilon.$$

2. Man nehme $N_\varepsilon = \left[\frac{x-1}{n}\right] + 1$. Die Bernoullische Ungleichung besagt, dass

$$(1+y)^n \geq 1 + ny \text{ für } y > -1.$$

Nimmt man $y = \frac{1}{n}(x-1)$, dann findet man $\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n \geq x$ und daraus folgt

$$1 + \frac{x-1}{n} \geq \sqrt[n]{x}.$$

Für $x \geq 1$ gilt also

$$\left|\sqrt[n]{x} - 1\right| = \sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n}.$$

Wenn wir also $N = \left[\frac{x-1}{\varepsilon}\right] + 1$ nehmen, folgt für $n > N$, dass

$$\left|\sqrt[n]{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Für $0 < x < 1$ benutzen wir, dass $x^{-1} > 1$, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{-1}} = 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^{-1}}}.$$

3. Statt der Bernoullischen Ungleichung hat man auch für $n \geq 2$ und $y \geq 0$

$$(1+y)^n \geq 1 + \binom{n}{1} y + \binom{n}{2} y^2 \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} y^2.$$

Man benutze dazu die Binomialformel. Nimmt man $y = \sqrt[n]{n} - 1$, bekommt man

$$n - 1 = \left(1 + \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)\right)^n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2$$

und es folgt

$$\sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Weil

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

folgt das Ergebnis aus Lemma 6.2, 1., und das Einschließungslemma.

4. Wenn $m = 0$, hat man mit der Bernoullische Ungleichung

$$|z|^n = \frac{1}{\left(1 + |z|^{-1} - 1\right)^n} \leq \frac{1}{1 + n\left(|z|^{-1} - 1\right)} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{|z|^{-1} - 1} = \frac{1}{n} \frac{|z|}{1 - |z|}. \tag{6.1}$$

Weil $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{|z|}{1-|z|} = 0$, gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} |z|^n = 0$.

Wenn $m \geq 1$ hat man

$$|n^m z^n| = \left| \sqrt[n]{n} \; |z|^{\frac{1}{m}} \right|^{mn} \leq \left| \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) |z|^{\frac{1}{m}} \right|^{mn}.$$

Weil $|z| < 1$ gilt, und weil $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) = 1$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ und $0 < \theta < 1$, so dass

$$\left| \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right) |z|^{\frac{1}{m}} \right| \leq \theta.$$

Wie in (6.1) hat man

$$\theta^n = \frac{1}{\left(1 + \left(\theta^{-1} - 1\right)\right)^n} \leq \frac{1}{1 + n\left(\theta^{-1} - 1\right)} \leq \frac{1}{n\left(\theta^{-1} - 1\right)} = \frac{1}{n} \frac{\theta}{1 - \theta},$$

und mit

$$|n^m z^n| \leq \frac{1}{n^m} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^m \leq \frac{1}{n} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^m,$$

folgt $\lim\limits_{n\to\infty} n^m z^n = 0$ ■

6.2 Wie man ohne Taschenrechner $\sqrt[3]{5}$ berechnet.

Algorithmus 6.1 Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $w \in \mathbb{R}^+$. Wir definieren:

$$\begin{aligned} a_0 &= w + 1, \\ a_{n+1} &= \left(1 - \frac{1}{m}\right) a_n + \frac{w}{m a_n^{m-1}} \quad \texttt{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Bemerkung 6.5.2 *Wir werden zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[m]{w}$. Auf diese Art haben wir eine Möglichkeit gefunden, durch eine rationale Funktion eine Wurzel $\sqrt[n]{w}$ zu approximieren. Ein Taschenrechner oder PC macht genau dasselbe. Mehr als wiederholtes Addieren und Subtrahieren schafft er leider nicht und wenn der Verkäufer Ihnen erzählt hat, dass das Gerät $\sqrt[3]{5}$ exakt berechnen kann, dann stimmt das leider nicht. Da wird auch bloss mit so einer algebraischen Funktion approximiert bis man genügend richtige Ziffern hat. Der Algorithmus konvergiert übrigens sehr schnell. Hier die ersten 12 Zwischenergebnisse für $\sqrt[3]{5}$:*

```
6
4.0462962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962962
2.7993274908751591703624057915417595086372043190514600359479196707577579167557994837116928486033768
2.0789055161910019112094675663932928614164724951340265204151217969453887091577713899001238167699734
1.7715744998156100817161027536799547399587805079010651721168735427293262233193090928807418708239413
1.7120929359518477257669396726534003932117293068780213134883620269893886778181967594401577926524688
1.7099785632381726163824235897841792566237277792297540454448592445786949679146346251789445785300990
1.7099759466807007766583233241323163689104106108151309625305176214739705069907146931137725297381644
1.7099759466766969893531182471276468005156763849568810139677863400061010906849308111946964029994281
1.7099759466766969893531088725438601098680551105944491099820694702859579820632400960096926316743885
1.7099759466766969893531088725438601098680551105430549243828617074442959205041732162571870100217336
1.7099759466766969893531088725438601098680551105430549243828617074442959205041732162571870100201890
```

Später werden wir noch mal zeigen, dass diese 'Parabel' als Begrenzung der richtigen Ziffern nicht nur zufälligerweise da ist.

Lemma 6.6 *Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $w \in \mathbb{R}^+$ und die Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definiert als in (6.2). Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt[m]{w}$.*

Beweis. Erstens beweisen wir, dass für die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{m}\right) x + \frac{w}{m x^{m-1}}$$

gilt, dass $f(x) \geq \sqrt[n]{w}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Wir haben für $x > 0$ die folgenden gleichwertigen Aussagen:

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{m}\right) x + \frac{w}{m x^{m-1}} \geq \sqrt[m]{w} \Leftrightarrow (m-1)\, x + \frac{w}{x^{m-1}} \geq m \sqrt[m]{w} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & m - 1 + \frac{w}{x^m} \geq m \frac{\sqrt[m]{w}}{x} \Leftrightarrow \frac{w}{x^m} \geq 1 + m \left(\frac{\sqrt[m]{w}}{x} - 1\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{\sqrt[m]{w}}{x}\right)^m \geq 1 + m \left(\frac{\sqrt[m]{w}}{x} - 1\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & \left(1 + \left(\frac{\sqrt[m]{w}}{x} - 1\right)\right)^m \geq 1 + m \left(\frac{\sqrt[m]{w}}{x} - 1\right). \end{aligned}$$

Setzt man $y = \frac{\sqrt[m]{w}}{x} - 1$, dann erkennt man, dass die letzte Ungleichung stimmt wegen der Bernoullischen Ungleichung (Lemma 1.4):

$$(1+y)^m \geq 1 + my \text{ für } y \geq -1.$$

Damit hat man auch

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right) x + \frac{w}{mx^{m-1}} \geq \sqrt[m]{w}.$$

Angenommen dass $a_n \in \mathbb{R}^+$, finden wir $f(a_{n+1}) \geq \sqrt[m]{w}$. Weil $a_0 > 0$ gilt, kann man zeigen, dass $a_n \geq \sqrt[m]{w}$ für $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Für $a_n \geq \sqrt[m]{w}$ finden wir

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) a_n + \frac{w}{ma_n^{m-1}} = a_n - \frac{a_n^m - w}{ma_n^{m-1}} \leq a_n.$$

So haben wir eine monoton fallende Folge bekommen, die von unten beschränkt ist. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besagt, dass $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ einen Grenzwert a hat. Und weil $a_n \geq \sqrt[m]{w}$ gilt auch $a \geq \sqrt[m]{w}$.

Jetzt, nachdem wir die Existenz des Limes gezeigt haben, können wir damit rechnen:

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right) a_n + \frac{w}{ma_n^{m-1}} \right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right) a_n \right) + \lim_{n\to\infty} \frac{w}{ma_n^{m-1}} = \\
&= \left(1 - \frac{1}{m}\right) \lim_{n\to\infty} a_n + \frac{w}{m} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^{m-1}} = \\
&= \left(1 - \frac{1}{m}\right) \lim_{n\to\infty} a_n + \frac{w}{m} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n^{m-1}} = \\
&= \left(1 - \frac{1}{m}\right) \lim_{n\to\infty} a_n + \frac{w}{m} \frac{1}{(\lim_{n\to\infty} a_n)^{m-1}} = \\
&= \left(1 - \frac{1}{m}\right) a + \frac{w}{m} \frac{1}{a^{m-1}}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\frac{1}{m} a = \frac{w}{m} \frac{1}{a^{m-1}},$$

und daraus, dass $a^m = w$. ■

6.3 Analytische Fundamente

Wir erinnern uns noch mal an obere und untere Schranken. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ hat eine obere Schranke $s_o \in \mathbb{R}$, wenn für jede $a \in A$ gilt $a \leq s_o$; A hat eine untere Schranke $s_u \in \mathbb{R}$, wenn für jede $a \in A$ gilt $s_u \leq a$.

Definition 6.7 *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

1. *Das **Supremum** von A ist definiert durch*

$$\sup A = \textit{die kleinste obere Schranke für } A.$$

Wenn A nicht nach oben beschränkt ist, dann $\sup A = \infty$ *(also* $\sup A$ *existiert nicht als eine reelle Zahl und nur, wie man sagt, im uneigentlichen Sinne).*
Wenn $A = \emptyset$, dann $\sup A = -\infty$.

2. *Das* ***Infimum*** *von A ist definiert durch*

$$\inf A = \textit{die größte untere Schranke für } A.$$

Beispiel 6.8 *Für $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$ gilt $\sup A = \sqrt{2}$ und $\inf A = -\sqrt{2}$.*
Für $B = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^+\right\}$ gilt $\sup B = 1$ und $\inf B = 0$.

Bemerkung 6.8.1 *Man sieht, dass wenn A ein Maximum hat, dann gilt $\sup A = \max A$. Nicht jede beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ hat aber ein Maximum. Zum Beispiel die Menge $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$ hat kein Maximum: $\sqrt{2} \notin A$. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ impliziert aber, dass jede beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ein Supremum und ein Infimum hat.*

Bemerkung 6.8.2 *Übrigens heißt eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) beschränkt, wenn es $R \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt $|a| < R$.*

6.3.1 Limes superior und Limes inferior

Definition 6.9 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge.*

1. *Der* ***Limes Superior*** *von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist definiert durch*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\ge n} a_k \right).$$

2. *Der* ***Limes Inferior*** *von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist definiert durch*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\ge} a_k \right).$$

Bemerkung 6.9.1 *Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nicht nach oben beschränkt ist, sagt man*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$$

im uneigentlichen Sinne. Das heißt, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht als Zahl.
Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, dann sagt man auch $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ im uneigentlichen Sinne.
Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nicht nach unten beschränkt ist, sagt man $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ im uneigentlichen Sinne.
Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, dann sagt man auch $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ im uneigentlichen Sinne.

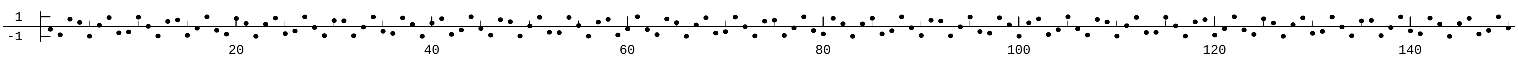
Beispiel 6.10 *Für $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 \textit{ und } \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

Wir können vermuten, dass auch für $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $b_n = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^{2n}\right)$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = 1 \textit{ und } \liminf_{n\to\infty} b_n = -1.$$

Hier steht eine Skizze von $\{(n, b_n)\,;n \in \mathbb{N}\}$:



Die Notation verführt dazu, mit dem Limes Superior und dem Limes Inferior zu rechnen wie mit dem Limes. Leider ist eine solche Annahme falsch. Einige Regeln, die gelten, stehen im folgenden Lemma.

Lemma 6.11 *Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ reelle Folgen sind mit $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n, \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \in \mathbb{R}$, dann gilt:*

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$;
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus

$$\sup_{k\geq n} (a_k + b_k) \leq \sup_{k\geq n} \left(a_k + \sup_{\ell\geq n} b_\ell \right) = \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{\ell\geq n} b_\ell$$

und die zweite aus

$$\sup_{k\geq n} (a_k + b_k) \geq \sup_{k\geq n} (a_k + b_\ell) = \sup_{k\geq n} a_k + \inf_{\ell\geq n} b_\ell.$$

Es soll noch bemerkt werden, dass hier möglicherweise Ungleichungen im uneigentlichem Sinne erscheinen könnten, dass heisst, Ungleichungen wie $-\infty \leq 5$. ■

Beispiel 6.12 *Diese Ungleichungen in Lemma 6.11 können streng sein. Betrachte die Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, definiert durch $a_n = ((-1)^n - 1)\, n$ und $b_n = \left((-1)^{n+1} - 1\right) n$. Die ersten Terme sind wie folgt:*

$$\begin{array}{rlllllllllll} a_n: & 0, & -2, & 0, & -6, & 0, & -10, & 0, & -14, & 0, & \dots \\ b_n: & 0, & 0, & -4, & 0, & -8, & 0, & -12, & 0, & -16, & \dots \\ a_n + b_n: & 0, & -2, & -4, & -6, & -8, & -10, & -12, & -14, & -16, & \dots \end{array}$$

Dann hat man

$$-\infty = \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0.$$

Ein Beispiel bei dem die zweite Ungleichung streng ist, darf man selber zusammen basteln.

6.3.2 Bolzano-Weierstrass

Definition 6.13 *Eine Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißt eine* ***Teilfolge*** *von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, wenn es eine streng wachsende Funktion*

$$(k \mapsto n_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

gibt, so dass $b_k = a_{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 6.14 *Die Folge $\left\{\frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=0}^{\infty}$ ist eine Teilfolge von $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$:*

$$\begin{aligned} \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty} &= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots\right\}, \\ \left\{\frac{1}{(n+1)^2}\right\}_{n=0}^{\infty} &= \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right\}. \end{aligned}$$

Die Folge $\left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *ist eine Teilfolge von* $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$*:*

$$\left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots\right\}.$$

Die Folge $\left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *ist keine Teilfolge von* $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$*:*

$$\left\{\frac{1}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \dots\right\},$$

denn 1 *erscheint einmal zuviel.*

Definition 6.15 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine Folge. Dann heißt* h ***Häufungswert*** *für diese Folge, wenn es eine Teilfolge* $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ *gibt mit* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = h$*.*

Satz 6.16 (Bolzano-Weierstrass)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ *(in* $\mathbb{C}$*) hat einen Häufungswert in* $\mathbb{R}$ *(in* $\mathbb{C}$*).*

Beweis. Nehmen wir also $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte komplexe Folge. Dann gibt es $M \in \mathbb{R}^+$ so, dass $|a_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und also auch $|\operatorname{Re} a_n| < M$ und $|\operatorname{Im} a_n| < M$. Wenn unendlich viele Zahlen $\{a_n\}$ in dem Quadrat

$$Q_0 = [-M, M] + i\,[-M, M] = \{z \in \mathbb{C};\ -M \leq \operatorname{Re} z \leq M \text{ und } -M \leq \operatorname{Im} z \leq M\}$$

liegen, dann liegen auch unendlich viele Zahlen $\{a_n\}$ in einem der vier Teilquadrate mit halb so großen Längen. Nenne dieses Teilquadrat, das auch unendlich viele Zahlen $\{a_n\}$ enthält, Q_1. Es könnte zum Beispiel $Q_1 = [0, M] + i\,[-M, 0]$ sein. Wir wiederholen diese Aufteilung und finden eine Folge von Quadraten:

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \dots\ .$$

Nehme $a_{n_0} = a_0 \in Q_0$. Dann gibt es $a_{n_1} \in Q_1$ mit $n_1 > 0$, $a_{n_2} \in Q_2$ mit $n_2 > n_1$, $a_{n_3} \in Q_3$ mit $n_3 > n_2$ usw. Wir bekommen eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ mit $a_{n_k} \in Q_k$. Weil $a_{n_k}, a_{n_\ell} \in Q_{\min(k,\ell)}$ gilt, hat man

$$|a_{n_k} - a_{n_\ell}| \leq |\operatorname{Re}(a_{n_k} - a_{n_\ell})| + |\operatorname{Im}(a_{n_k} - a_{n_\ell})| \leq 4M \left(\frac{1}{2}\right)^{\min(k,\ell)}.$$

So ist die Folge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge und Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$ sind konvergent. Der Limes, der zu dieser Folge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ gehört, ist ein Häufungswert für $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. ∎

Lemma 6.17 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine reelle Folge. Dann ist* $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$*, wenn er existiert in* $\mathbb{R}$*, der größte Häufungswert und* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$*, wenn er existiert in* $\mathbb{R}$*, der kleinste Häufungswert von* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$*.*

Beweis. Selber machen. ∎

Lemma 6.18 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine reelle Folge. Dann gibt es eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ unbeschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{n_k=0}^{\infty}$, so dass entweder $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$ oder $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$. Wenn $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$, dann kann man wiederum eine Teilfolge davon nehmen, so dass $\left\{a_{n_{k_\ell}}\right\}_{\ell=0}^{\infty}$ monoton wachsend ist: $k_0 = 0$ und k_1 wählt man als die kleinste natürliche Zahl größer k_0 und wobei $a_{n_k} > a_{n_0}$; k_2 wählt man als die kleinste natürliche Zahl größer k_1 und wobei $a_{n_k} > a_{n_{k_1}}$ usw.

Ähnliches ist möglich wenn $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$.

Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ beschränkt ist, hat diese Folge einen Häufungswert, sage a. Das heißt, es gibt eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Dann gibt es entweder unendlich viele Terme mit $a_{n_k} > a$, mit $a_{n_k} = a$ oder mit $a_{n_k} < a$. Wenn der erste Fall zutrifft, läßt sich eine monoton fallende Teilfolge nehmen. Das sieht man wie folgt. Wir nehmen also an, es gibt eine Teilfolge $\left\{a_{n_{k_\ell}}\right\}_{\ell=0}^{\infty}$ mit $\lim_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}} = a$ und $a_{n_{k_\ell}} > a$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Dann nimmt man $\ell_0 = 0$ und ℓ_1 wählt man als die kleinste natürliche Zahl größer ℓ_0, wobei $a_{n_{k_\ell}} < a_{n_{k_0}}$ gilt. Man wählt ℓ_2 als die kleinste natürliche Zahl größer ℓ_1, wobei $a_{n_{k_\ell}} < a_{n_{k_{\ell_1}}}$ gilt, usw. ■

Analysis 1, Woche 7

Reihen I

7.1 Folgen aus Folgen

Wenn $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle oder komplexe Folge ist, kann man daraus eine neue Folge $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ konstruieren durch

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

oder netter geschrieben

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Die Folge $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n=0}^{\infty}$ nennt man **eine Reihe**, die Zahlen a_n **die Glieder** dieser Reihe und s_n **die Partialsummen**.

Die Hauptfrage, die man zu Reihen stellt, ist:

Kann man Bedingungen für $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ angeben, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ existiert?

Die zweite Frage, nämlich welche Zahl findet man durch $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$, ist meistens viel schwieriger.

Oft benutzt man für $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n=0}^{\infty}$ auch kurzerhand $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Weil man aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ abkürzt durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, muss oft aus dem Kontext deutlich werden, was genau gemeint ist.

Beispiel 7.1 *Die **geometrische Reihe** für $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als $\{\sum_{k=0}^{n} z^n\}_{n=0}^{\infty}$. Sie konvergiert nur dann, wenn $|z| < 1$.*

Das sieht man wie folgt. Für $z \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \\ = \quad &\frac{(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1-z)}{(1-z)} = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}, \end{aligned}$$

und man bekommt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} z^{n+1}}{1-z} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & \textit{wenn } |z| < 1, \\ \textit{divergent} & \textit{wenn } |z| \geq 1. \end{cases}$$

Wenn $z = 1$ *hat man*

$$\sum_{k=0}^{n} z^n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1,$$

und folgt auch hier Divergenz.

Beispiel 7.2 *Die harmonische Reihe ist definiert als* $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$*:*

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Sie ist nicht konvergent:

$$s_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$

mit $k \in \mathbb{N}$ *die größte Zahl, so dass* $2^k \leq n$*. Man findet* $s_n \geq (k+1)\frac{1}{2}$ *und zeigt so, dass* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *unbeschränkt ist.*

Bemerkung 7.2.1 *Eine notwendige Bedingung damit* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ *existiert, ist* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*. Das heißt:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ existiert } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Denn nennt man $s = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$*, dann sieht man sofort, dass*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = s - s = 0$$

Die harmonische Reihe ist ein Beispiel, das besagt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *keine hinreichende Bedingung ist für Konvergenz von* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$*:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \text{ existiert.}$$

7.2 Konvergenz für Reihen mit positiven Gliedern

Lemma 7.3 *Set* $q \in \mathbb{Q}^+$*. Die Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^q}$ *konvergiert nur dann, wenn* $q > 1$*.*

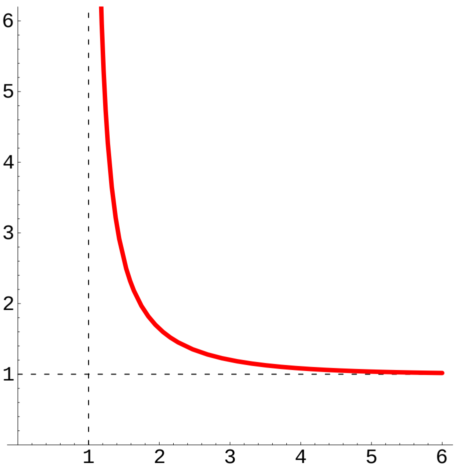
Bemerkung 7.3.1 *Anders gesagt: die Folge* $\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^q}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert nur dann, wenn* $q > 1$*. Oder nochmals anders gesagt:* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^q}$ *existiert nur dann, wenn* $q > 1$*.*

Bemerkung 7.3.2 *Die Funktion*

$$\left(q \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} \right) : (1, \infty) \to \mathbb{R}$$

heißt die Riemann-Zeta-Funktion. Sie wird oft mit ζ *notiert. Man kann zeigen, dass:*

$$\zeta(2) = \tfrac{1}{6}\pi^2,$$
$$\zeta(4) = \tfrac{1}{90}\pi^4,$$
$$\zeta(6) = \tfrac{1}{945}\pi^6,$$
$$\zeta(8) = \tfrac{1}{9450}\pi^8.$$



Die Riemann-Zeta-Funktion ist hier definiert auf dem Intervall $(0,\infty)$. *Später werden wir sehen, dass diese Funktion sich sogar vernünftig definieren lässt auf* $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Beweis. Für $q>1$ gilt

$$\begin{aligned} s_n &= 1+\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^q}+\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^q}+\frac{1}{6^q}+\frac{1}{7^q}+\frac{1}{8^q}+\dots+\frac{1}{n^q}\le \\ &\le 1+\frac{1}{2^q}+\frac{1}{2^q}+\frac{1}{4^q}+\frac{1}{4^q}+\frac{1}{4^q}+\frac{1}{4^q}+\frac{1}{8^q}+\dots+\frac{1}{2^{kq}} \end{aligned}$$

wiederum mit $k\in\mathbb{N}$ die kleinste Zahl so, dass $2^k\ge n$. Man findet

$$\begin{aligned} s_n &\le 1+\frac{2}{2^q}+\frac{4}{4^q}+\dots+\frac{2^k}{2^{kq}}= \\ &= 1+\frac{1}{2^{q-1}}+\frac{1}{2^{2(q-1)}}+\dots+\frac{1}{2^{k(q-1)}}= \\ &= \sum_{\ell=0}^{k}\left(\frac{1}{2^{q-1}}\right)^{\ell}\le\frac{1}{1-\frac{1}{2^{q-1}}} \end{aligned}$$

weil $\frac{1}{2^{q-1}}<1$ für $q>1$. Also ist $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine monotone und beschränkte Folge und deshalb konvergent.

Für $q\le 1$ gilt

$$\begin{aligned} s_n &= 1+\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^q}+\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^q}+\dots+\frac{1}{n^q}\ge \\ &\ge 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots \end{aligned}$$

und $s_n\to\infty$ für $n\to\infty$. ■

Ein wichtiges Werkzeug haben wir im Beweis soeben gesehen, nämlich ein Vergleichskriterium.

Lemma 7.4 (Majorantenkriterium) *Seien* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *und* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *reelle Folgen mit* $0\le a_n\le b_n$.

1. *Wenn die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergiert, dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
2. *Wenn die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergiert, dann divergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Beweis. Weil die zweite Aussage die logische Umkehrung[1] der ersten Aussage ist, brauchen wir nur eine zu beweisen.

[1]Aus der Logik:

Wenn A und B zwei Aussagen sind, dann ist die Behauptung $A\Rightarrow B$ gleichwertig zu $\neg B\Rightarrow\neg A$.

"Wenn es ein normales Fahrrad ist, dann hat es zwei Räder" ist gleichwertig zu *"Wenn es keine zwei Räder hat, ist es kein normales Fahrrad"*.

"Wenn es zwei Räder hat, ist es ein normales Fahrrad" ist eine ganz andere Aussage.

Wir nehmen an, die Folge $\left\{\sum_{n=0}^{k} b_n\right\}_{k=0}^{\infty}$ ist konvergent, dass heißt, $\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} b_n = s \in \mathbb{R}$. Weil $a_n \leq b_n$ findet man, dass die Folge $\left\{\sum_{n=0}^{k} a_n\right\}_{k=0}^{\infty}$ nach oben beschränkt ist durch s. Und weil $a_n \geq 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $\left\{\sum_{n=0}^{k} a_n\right\}_{k=0}^{\infty}$ monoton wachsend. Eine beschränkte monoton wachsende Folge hat einen Limes. ■

7.3 Konvergenz für Reihen mit beliebigen Gliedern

Betrachten wir zunächst als Beispiel die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1}$, dass heißt, die Folge der Partialsummen von den Gliedern $\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \dots\right\}$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots .$$

Wenn wir wie folgt verfahren

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \\ = \; & 1 + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - 2\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - 2\frac{1}{8} + \dots \\ = \; & 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \dots \end{aligned}$$

dann sieht man, dass die Glieder sich kürzen und so 0 als Limes liefern. Andererseits hat man auch

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \\ = \; & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots = \\ = \; & \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \dots \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen, dass

$$0 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n+1} \geq \frac{1}{2}.$$

Oder doch nicht?

In dem komischen 'Beweis' haben wir umgeordnet beim Addieren und das ist im Allgemeinen leider nur erlaubt bei endlich vielen Änderungen. Die Kommutativität besagt, dass $a + b = b + a$ und wenn man diese Regel (und die Assoziativität) 4 mal benutzt, hat man auch

$$a + b + c + d + e = e + d + c + b + a.$$

Dass man diese Regel auch unendlich oft Benutzen darf, ist nie gesagt worden.

Definition 7.5 *Die Folge* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *heißt eine* ***Umordnung*** *von* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$*, wenn es eine bijektive Abbildung* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gibt, so dass* $b_n = a_{\sigma(n)}$.

Definition 7.6 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine komplexe Folge.*

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt* ***unbedingt konvergent****, wenn es* $\ell \in \mathbb{C}$ *gibt, so dass*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_{\sigma(k)} = \ell$$

für jede Umordnung $\left\{a_{\sigma(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *von* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt* ***absolut konvergent****, wenn* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *konvergent ist.*

Bemerkung 7.6.1 *Wenn eine Reihe konvergent, aber nicht unbedingt konvergent ist, heißt sie* ***bedingt konvergent****.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ *ist also bedingt konvergent.*

Lemma 7.7 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine komplexe (oder reelle) Folge.*
Wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent ist, ist sie auch konvergent.*

Beweis. Weil $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist, folgt $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k| \to 0$ für $n \to \infty$. Setzen wir $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Dann folgt für $m > n$, dass

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\,.$$

Weil $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |a_k| \to 0$ für $n \to \infty$ gibt es für jede $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Damit findet man, dass $|s_n - s_m| < \varepsilon$ wenn $n, m > N_\varepsilon$, und dass $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge ist in $\mathbb{C}$ und deshalb konvergent. ■

Lemma 7.8 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine komplexe (oder reelle) Folge.*
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *ist unbedingt konvergent* $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *ist absolut konvergent.*

Bemerkung 7.8.1 *Sei* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine reelle Folge mit* $a_n \ge 0$*. Wenn* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent ist, ist sie sogar unbedingt konvergent.*

Beweis. Der Beweis geht in mehreren Schritten:

1. Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Folge. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist unbedingt konvergent}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n \text{ sind unbedingt konvergent.}$$

2. Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Folge. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n \text{ sind absolut konvergent.}$$

3. Setze
$$v^+ = \max(0, v) \text{ und } v^- = \max(0, -v) \text{ für } v \in \mathbb{R}.$$
Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist unbedingt konvergent}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^+ \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^- \text{ sind konvergent.}$$

4. Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^+ \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^- \text{ sind konvergent.}$$

Zu 1. Da wird benutzt, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = b \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} b_n = \operatorname{Re} b$ und $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} b_n = \operatorname{Im} b$.

Zu 2. Da wird benutzt, dass $|a_n| \leq |\operatorname{Re} a_n| + |\operatorname{Im} a_n| \leq 2\,|a_n|$ und dass das Majorantenkriterium gilt.

Zu 3. ($\Rightarrow$) Beweis durch Widerspruch. Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^+ = \infty$. Weil die Glieder $(a_n)^+$ alle nicht negativ sind, ist so eine Reihe entweder konvergent oder ∞ (im uneigentlichen Sinne). Setze $\ell = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$. Es gibt $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=0}^{N_1} (a_n)^+ > \ell+1$. Setze
$$\{a_n; a_n \geq 0 \text{ und } n \leq N_1\}.$$
Wir nehmen die ersten b_i aus dieser Menge bis sie erschöpft ist. Anschließend nehmen wir für das nächste b_i das erste a_n mit $a_n < 0$.

Weil $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^+ = \infty$ gilt auch $\sum_{n=N_1+1}^{\infty} (a_n)^+ = \infty$. Dann gibt es $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=0}^{N_2} (a_n)^+ > \ell + 1$. Wir nehmen die nächsten b_i aus der Menge
$$\{a_n; a_n \geq 0 \text{ und } N_1 < n \leq N_2\}$$
bis diese erschöpft ist. Das folgende b_i wird das zweite a_n mit $a_n < 0$.

Weil $\sum_{n=N_2+1}^{\infty} (a_n)^+ = \infty$ gibt es $N_3 \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=0}^{N_3} (a_n)^+ > \ell + 1$. Wir nehmen die nächsten b_i aus der Menge
$$\{a_n; a_n \geq 0 \text{ und } N_1 < n \leq N_2\}$$
bis diese erschöpft ist. Das nächste b_i wird das dritte a_n mit $a_n < 0$, usw.

Die Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist eine Umordnung von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und weil es unendlich viele N_i hat mit $\sum\limits_{n=0}^{N_i} b_n > \ell + 1$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht "unbedingt konvergent".

($\Leftarrow$) Weil $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^+$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^-$ konvergent sind, sagen wir $\ell^+ = \lim\limits_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(a_n)^+$ und $\ell^- = \lim\limits_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(a_n)^-$, gibt es für jede $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \le \sum_{n=k}^{\infty}(a_n)^+ < \varepsilon \text{ und } 0 \le \sum_{n=k}^{\infty}(a_n)^- < \varepsilon \text{ für alle } k \ge N_\varepsilon.$$

Sei $\left\{a_{\sigma(n)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ eine Umordnung und setze

$$N_\varepsilon^\sigma = \max\left\{\sigma(k); 0 \le k \le N_\varepsilon\right\}.$$

Wir finden

$$0 \le \sum_{n=k}^{\infty}\left(a_{\sigma(n)}\right)^+ \le \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty}(a_n)^+ \text{ und } 0 \le \sum_{n=k}^{\infty}\left(a_{\sigma(n)}\right)^- < \sum_{n=N_\varepsilon}^{\infty}(a_n)^- \text{ für alle } k \ge N_\varepsilon^\sigma.$$

Setzen wir $\ell = \ell^+ - \ell^-$, dann folgt für alle $k \ge N_\varepsilon^\sigma$, dass

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{k}a_{\sigma(n)}\right) - \ell &= \sum_{n=0}^{k}a_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{\sigma(n)}\right)^+ + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{\sigma(n)}\right)^- \le \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(a_{\sigma(n)}\right)^- < \varepsilon,\\ \left(\sum_{n=0}^{k}a_{\sigma(n)}\right) - \ell &= \sum_{n=0}^{k}a_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{\sigma(n)}\right)^+ + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{\sigma(n)}\right)^- \ge -\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(a_{\sigma(n)}\right)^+ > -\varepsilon.\end{aligned}$$

Zu 4. ($\Rightarrow$) Benutze das Majorantenkriterium, $0 \le (a_n)^+ \le |a_n|$ und $0 \le (a_n)^- \le |a_n|$. ($\Leftarrow$) Wenn $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^+$ und $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^-$ konvergieren, folgt, dass auch

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}|a_n| = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(a_n)^+ + \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(a_n)^-$$

konvergiert. ■

Lemma 7.9 (Quotientkriterium) *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Folge, so dass $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r \in \mathbb{R}$ existiert.*

- *Wenn $r < 1$, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ absolut konvergent.*
- *Wenn $r > 1$, dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ divergent.*

Beweis. Nehme $\varepsilon = \frac{1}{2}|1-r|$. Für $r \ne 1$ ist $\varepsilon > 0$ und gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - r\right| < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Wenn $r < 1$ folgt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - r + r < \varepsilon + r = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}r \text{ für } n > N_\varepsilon$$

und

$$|a_n| \leq \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}r\right)^{n-N_\varepsilon} |a_{N_\varepsilon}| \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Weil $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r < 1$ gilt, ist $\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r\right)^{n-N_\varepsilon} |a_{N_\varepsilon}|$ eine konvergente geometrische Reihe. Mit dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_n|$ und so auch $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n|$.

Wenn $r > 1$ folgt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - r + r > -\varepsilon + r = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}r > 1 \text{ für } n > N_\varepsilon$$

und

$$|a_n| \geq |a_{N_\varepsilon}| > 0 \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Also entweder $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht, oder $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Weil $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ eine notwendige Bedingung ist für Konvergenz, ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent. ■

Lemma 7.10 (Wurzelkriterium) *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine komplexe Folge. Setze $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r \in [0,\infty]$.*

- *Wenn $r < 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*
- *Wenn $r > 1$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.*
- *Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent ist, dann gilt $r = 1$.*

Beweis. Wenn $r < 1$ gilt und wir $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-r)$ nehmen, gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \sqrt[n]{|a_n|} - r \right| < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon.$$

Wenn $\sqrt[n]{|a_n|} < r + \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r$ folgt

$$|a_n| < \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}r\right)^n \text{ für } n > N_\varepsilon$$

und können wir fortfahren wie beim Quotientenkriterium.

Wenn $r > 1$ dann gibt es eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$, so dass $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$ und also auch $|a_{n_k}| > 1$. Das heißt, entweder $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht, oder $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Weil $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ eine notwendige Bedingung ist für Konvergenz, ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Wenn man $r \neq 1$ hat, dann ist die Reihe entweder divergent (wenn $r > 1$) oder absolut konvergent (wenn $r < 1$). Damit ist bedingter Konvergenz ausgeschlossen. ■

7.4 Konvergenz bei alternierenden Gliedern

Wir haben nicht umsonst uns erst mal beschränkt auf Reihen mit positiven Gliedern. Wenn so eine Reihe konvergent ist dann ist sie auch absolut konvergent und man muss sich keine Sorgen machen wie in welcher Folge man die Glieder addiert. Für Reihen mit Vorzeichenwechsel und auch für Reihen mit komplexen Gliedern ist Konvergenz eine kompliziertere Sache. Es kann sein, dass eine Umordnung konvergiert und eine andere divergiert. Einige Spezialfälle kann man aber trotzdem angehen. Insbesondere bei Reihen mit alternierenden Gliedern kann man oft relativ einfach Konvergenz beweisen.

Man nennt ein reelle Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ alternierend, wenn $b_n b_{n+1} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt, das Vorzeichen zweier aufeinanderfolgender Termen ist negativ. Ein Beispiel ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Um dieses Kriterium so einfach wie möglich hin zu schreiben, betrachten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ mit } a_n > 0$$

statt

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ mit } b_n > 0 \text{ für } n \text{ gerade und } b_n < 0 \text{ für } n \text{ ungerade.}$$

Lemma 7.11 (Kriterium von Leibniz) *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge mit folgenden Eigenschaften:*

1. $a_n > 0$ *für* $n \in \mathbb{N}$;
2. $a_{n+1} \le a_n$ *für* $n \in \mathbb{N}$;
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ist konvergent.

Beweis. Setzen wir

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n a_n$$

und betrachten wir zusätzlich die Folgen $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$ und $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ mit

$$\beta_k = \sum_{n=0}^{2\left[\frac{1}{2}k\right]} (-1)^n a_n \text{ und } \gamma_k = \sum_{n=0}^{2\left[\frac{1}{2}k\right]+1} (-1)^n a_n.$$

Die ersten Termen sind:

$$\begin{array}{llllll}
\beta_k: & \{a_0, & a_0, & a_0 - a_1 + a_2, & a_0 - a_1 + a_2, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4, & \ldots\}, \\
\alpha_k: & \{a_0, & a_0 - a_1, & a_0 - a_1 + a_2, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4, & \ldots\}, \\
\gamma_k: & \{a_0 - a_1, & a_0 - a_1, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3, & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5, & \ldots\}.
\end{array}$$

Man findet, dass $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge und $\{\gamma_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine monoton wachsende Folge ist. Weil beide Folgen beschränkt sind, haben sie einen Grenzwert, sagen wir ℓ_γ und ℓ_β. Weil

$$\beta_k - \gamma_k = a_{2\left[\frac{1}{2}k\right]+1}$$

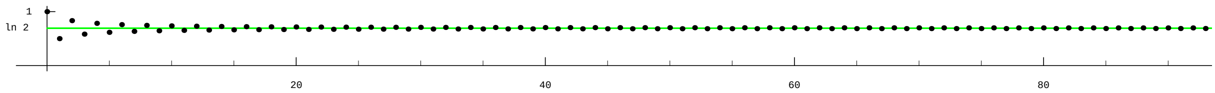
und $\lim_{k\to\infty} a_{2\left[\frac{1}{2}k\right]+1} = 0$ hat man $\ell_\beta = \ell_\gamma$. Ausserdem hat man

$$\gamma_k \leq \alpha_k \leq \beta_k$$

und das Sandwichlemma liefert $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \ell_\beta$. ■

Mit Hilfe dieses Kriteriums finden wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ konvergent ist. Wir werden noch mal zeigen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \log 2.$$



Beispiel 7.12 *Betrachten wir* $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$.
Wir gehen davon aus, dass man aus der Schule folgende Kenntnisse hat mitgebracht:

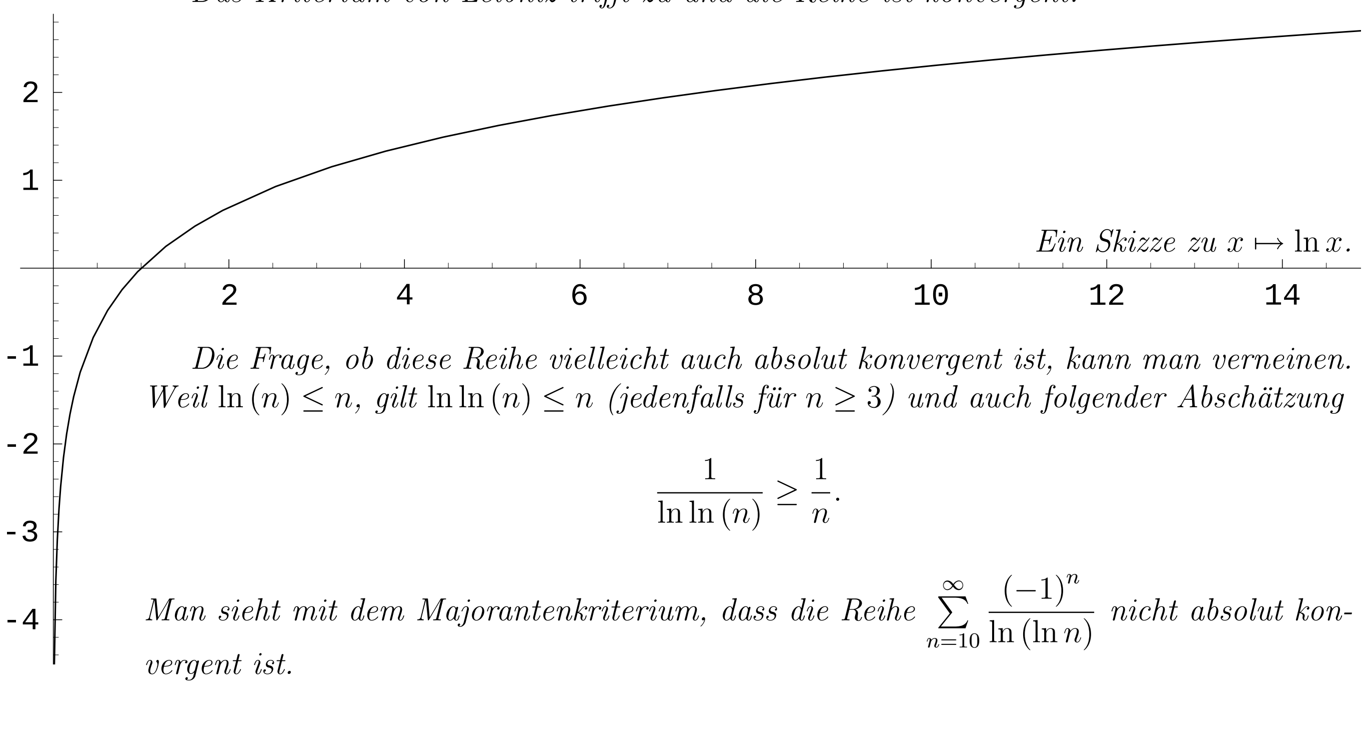
1. $\ln x > 0$ *für* $x > 1$ *und* $\ln x > 1$ *für* $x > 3$.

2. $\ln x \to \infty$ *wenn* $x \to \infty$.

3. $\ln x > \ln y$ *wenn* $x > y$.

Weil $\ln x > 0$ *für* $x > 1$ *und* $\ln x > 1$ *für* $x > 3$ *haben wir* $\frac{1}{\ln(\ln n)} > 0$ *für* $n \geq 10$.
Weil $x \mapsto \ln x$ *monoton wachsend ist, gilt* $\left\{\frac{1}{\ln(\ln n)}\right\}_{n=10}^{\infty}$ *ist eine monoton fallende Folge.*
Weil $\ln x \to \infty$ *wenn* $x \to \infty$ *folgt* $\frac{1}{\ln(\ln n)} \to 0$ *für* $n \to \infty$.

Das Kriterium von Leibniz trifft zu und die Reihe ist konvergent.



Ein Skizze zu $x \mapsto \ln x$.

Die Frage, ob diese Reihe vielleicht auch absolut konvergent ist, kann man verneinen. Weil $\ln(n) \leq n$, *gilt* $\ln\ln(n) \leq n$ *(jedenfalls für* $n \geq 3$*) und auch folgender Abschätzung*

$$\frac{1}{\ln\ln(n)} \geq \frac{1}{n}.$$

Man sieht mit dem Majorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$ *nicht absolut konvergent ist.*

7.5 Rezeptur

Wie geht man auf vernünftige Art die Frage an, ob eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert?

$\boxed{1}$ `Frage:` $b_n \to 0$?

`Antwort:` $\begin{cases} \text{Ja} & \rightsquigarrow \quad \texttt{Frage } \boxed{2}. \\ \text{Nein} & \rightsquigarrow \quad \texttt{Reihe divergent.} \end{cases}$

$\boxed{2}$ `Frage:` absolut konvergent? $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ vergleichen mit bekannter Reihe.

(a) Polynomialer Typ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^q}$.

`Antwort:` $\begin{cases} q \leq 1 & \rightsquigarrow \quad \texttt{Reihe divergent.} \\ q > 1 & \rightsquigarrow \quad \texttt{Reihe konvergent.} \end{cases}$

(b) Potenztyp: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$. Berechne r vom (Quotiënten- oder) Wurzelkriterium.

`Antwort:` $\begin{cases} r < 1 & \rightsquigarrow \quad \texttt{Reihe konvergent.} \\ r = 1 & \rightsquigarrow \quad \texttt{Frage } \boxed{3}. \\ r > 1 & \rightsquigarrow \quad \texttt{Reihe divergent.} \end{cases}$

(c) Anderer Typ:

`Antwort:` $\rightsquigarrow$ Frage $\boxed{3}$.

$\boxed{3}$ `Frage:` Glieder alternierend und Leibniz trifft zu?

`Antwort:` $\begin{cases} \text{Ja} & \rightsquigarrow \quad \texttt{Reihe konvergent.} \\ \text{Nein} & \rightsquigarrow \quad \boxed{4}. \end{cases}$

$\boxed{4}$ Eigene Kreativität gefragt.

Analysis 1, Woche 8

Reihen II

8.1 Summen und Produkte von Reihen

Wenn wir zwei Reihen haben die konvergieren, dann folgt aus "Grenzwert der Summe ist Summe der Grenzwerte", dass man die zwei Reihen addieren kann und dass der Limes so ist wie man vielleicht naiv erwartet.

Lemma 8.1 *Seien $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ zwei (komplexe) Folgen und sei $A, B \in \mathbb{C}$. Wenn $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = A$ und $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k = B$, dann gilt*

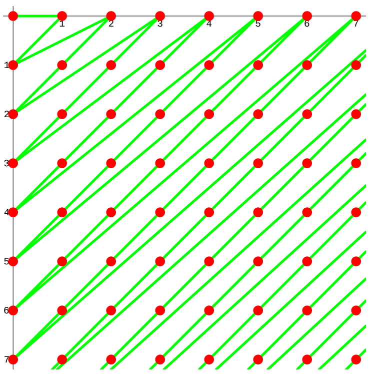
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = A + B.$$

Bemerkung 8.1.1 *Obwohl hier umgeordnet wird, ist es so, dass man bei dieser bestimmter Umordnung sich keine Sorgen zur Konvergenz machen muss.*

Beweis. Schreibe $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, dann folgt das Ergebnis aus

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n.$$

■



Lemma 8.2 *Seien $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ zwei (komplexe) Folgen. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent sind, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m} \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \right) \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \right).$$

Bemerkung 8.2.1 *In der Skizze sollen die roten Punkte die $a_i b_j$ vorstellen, und die grüne Kurve die Umordnung in $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}$.*

Beweis. Man bemerke, dass

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}|a_m b_{k-m}| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}|a_m b_k| = \left(\sum_{m=0}^{n}|a_m|\right)\left(\sum_{k=0}^{n}|b_k|\right)$$

und dass also diese Umordnung absolut konvergent ist, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_m$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ es sind. ∎

8.2 Potenzreihen

Definition 8.3 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine (komplexe) Folge und $z \in \mathbb{C}$. Dann nennt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe in z.*

Man findet für die $z \in \mathbb{C}$ wo $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert, eine Funktion $\left(z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)$: $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Naiv könnte man sagen, dass so eine Potenzreihe ein Polynom von Grad ∞ wäre. Das ist aber nicht üblich. Den Namen "Polynom" reservieren wir für Funktionen von der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k.$$

Lemma 8.4 *Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine (komplexe) Folge und sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe in z. Dann gibt es $R_a \in [0,\infty]$, so dass:*

1. *wenn $|z| < R_a$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut konvergent;*

2. *wenn $|z| > R_a$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ divergent.*

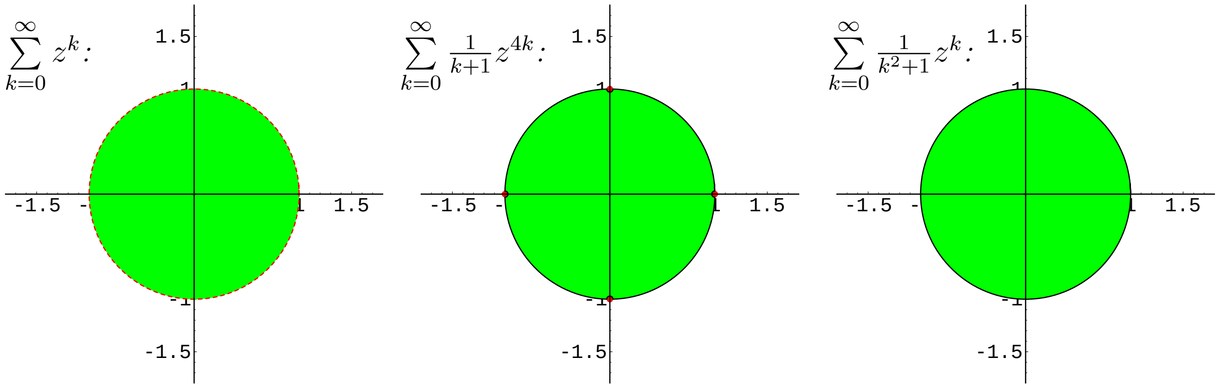
Bemerkung 8.4.1 *Diese R_a heißt der Konvergenzradius zu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Man kann ihn berechnen auf folgende Weise. Setze*

$$\ell_a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dieser Limes ℓ_a existiert in $[0,\infty]$. Das heisst, entweder $\ell_a \in [0,\infty)$ ist eine reelle Zahl, oder das Symbol ∞. Es gilt

$$R_a = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \ell_a = \infty, \\ \ell_a^{-1} & \text{wenn } \ell_a \in \mathbb{R}^+, \\ \infty & \text{wenn } \ell_a = 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Bemerkung 8.4.2 *Für $|z| = R_a$ kann nicht ohne weiteres eine Aussage machen ob die Potenzreihe konvergent oder divergent ist. Wir geben drei Beispiele mit gleichem Konvergenzradius aber unterschiedlichen Konvergenzgebieten:*



Beweis. Man benutze das Wurzelkriterium. Für die Potenzreihe gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ konvergent,}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ divergent.}$$

Das Ergebnis folgt, indem man bemerkt, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell_a |z| \,.$$

Die genügende Bedingungen für Konvergenz, respektive Divergenz, nämlich $\ell_a |z| < 1$ und $\ell_a |z| > 1$, lassen sich mit R_a in (8.1) übersetzen in respektive $|z| < R_a$ und $|z| > R_a$. ■

8.2.1 Exponentialreihe

Definition 8.5 *Die Exponentialreihe in $z \in \mathbb{C}$ setzt man*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Weil für $n \in \mathbb{N}$ (und gerade) gilt, dass

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} &= \sqrt[n]{\frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n/2)\,(n/2-1)\ldots 3.2.1}} \leq \\ &\leq \sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}n\right)\left(\frac{1}{2}n\right)\ldots\left(\frac{1}{2}n\right).1\ldots 1.1.1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}n\right)^{\left(\frac{1}{2}n\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}n}}, \end{aligned}$$

(und eine ähnliche Abschätzung für ungerade n) findet man

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|} = 0.$$

Es folgt, dass:

Lemma 8.6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ *hat den Konvergenzradius $R = \infty$.*

Das hat wiederum als Folge, dass $(z \mapsto \exp(z)) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wohl definiert ist.

Lemma 8.7 *Für alle $w, z \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z).$$

Beweis. Weil die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ absolut konvergent ist für alle $z \in \mathbb{C}$, können wir aus Lemma 8.2 schließen, dass

$$\begin{aligned}
&\exp(w)\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} w^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m+k=n} \frac{1}{k!} w^k \frac{1}{m!} z^m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} w^k z^{n-k} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} w^k z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w^k z^{n-k} \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (w+z)^n = \exp(w+z).
\end{aligned}$$

■

8.2.2 Binomialreihe

Definition 8.8 *Die Binomialreihe für $s \in \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C}$ setzt man*

$$\operatorname{bin}(s;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n.$$

Wir erinnern noch mal daran, dass für $s \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{s}{n} = \frac{s\,(s-1)\,(s-2)\ldots(s-n+2)\,(s-n+1)}{n\,(n-1)\,(n-2)\quad\ldots\quad 2 \qquad\qquad 1} = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{s-m}{n-m}.$$

Für $n > s \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{s}{n} = 0$ und folgt

$$\operatorname{bin}(s;z) = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} z^n,$$

das heißt, $\operatorname{bin}(s;z)$ für $s \in \mathbb{N}$ ist ein Polynom.

Lemma 8.9 *Für $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}$ hat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n$ den Konvergenzradius $R = 1$.*

Beweis. Wir machen erstens eine Abschätzung für $\binom{s}{n}$. Man kann $\binom{s}{n}$ auch schreiben als

$$\binom{s}{n} = \prod_{m=1}^{n} \frac{m-s-1}{m} = \prod_{m=1}^{n} \left(1 - \frac{s+1}{m}\right).$$

Sei $|z| = r < 1$. Dann nehmen wir $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-r)$ und anschließend N so, dass für $m > N$ gilt

$$\left|\frac{s+1}{m}\right| < \varepsilon.$$

Wir haben dann, dass für $n > N$

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\left|\binom{s}{n} z^n\right|} &= \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}\ |z| \leq \\
&\leq \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|\left|\prod_{m=N+1}^{n}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}\ |z| \leq \\
&\leq \sqrt[n]{\left(1+|s+1|\right)^N (1+\varepsilon)^{n-N}}\ |z| = \\
&= \sqrt[n]{\left(\tfrac{1+|s+1|}{1+\varepsilon}\right)^N}\ (1+\varepsilon)\,|z|\,.
\end{aligned}$$

Weil $(1+\varepsilon)\,|z| = (1+\varepsilon)(1-2\varepsilon) = 1-\varepsilon-2\varepsilon^2 < 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1+|s+1|}{1+\varepsilon}\right)^N} = 1$$

gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\binom{s}{n} z^n\right|} < 1$$

und die Reihe ist konvergent.

Wenn $|z| = r > 1$ dann nehmen wir $\varepsilon = \min\left(\frac{1}{2}(r-1), \frac{1}{4}\right)$ und anschließend N so, dass für $m > N$ gilt

$$\left|\frac{s+1}{m}\right| < \varepsilon.$$

Es folgt, dass

$$\left|\prod_{m=N+1}^{n}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right| > (1-\varepsilon)^{n-N}.$$

Weil $s \notin \mathbb{N}$, hat man

$$c_N := \left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right| \neq 0.$$

Wie oben findet man für $n > N$

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\left|\binom{s}{n} z^n\right|} &= \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}\ |z| \geq \\
&\geq \sqrt[n]{\left|\prod_{m=1}^{N}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|\left|\prod_{m=N+1}^{n}\left(1-\frac{s+1}{m}\right)\right|}\ |z| \geq \\
&\geq \sqrt[n]{c_N (1-\varepsilon)^{n-N}}\ |z| = \sqrt[n]{\tfrac{c_N}{(1-\varepsilon)^N}}\,(1-\varepsilon)\ |z|\,.
\end{aligned}$$

Weil $(1-\varepsilon)\,|z| \geq (1-\varepsilon)(1+2\varepsilon) = 1+\varepsilon-2\varepsilon^2 = 1+\frac{1}{2}\varepsilon + 2\varepsilon\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right) \geq 1+\frac{1}{2}\varepsilon$, und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{c_N}{(1-\varepsilon)^N}} = 1,$$

hat man

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\binom{s}{n} z^n\right|} > 1$$

und die Reihe ist divergent. ■

Lemma 8.10 *Für alle $t, s \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt:*

$$\operatorname{bin}(t; z) \operatorname{bin}(s; z) = \operatorname{bin}(s + t; z).$$

Beweis. Weil $R = 1$ der Konvergenzradius ist, dürfen wir wegen Lemma 8.2 für $|z| < 1$ die Umordnung durchführen:

$$\begin{aligned}
\operatorname{bin}(t; z) \operatorname{bin}(s; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{t}{k} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{s}{m} z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+m=n} \binom{t}{k} z^k \binom{s}{m} z^m \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+m=n} \binom{t}{k} \binom{s}{m} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{s}{n-k} \right) z^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t+s}{n} z^n.
\end{aligned}$$

Die letzte Identität benutzt das folgende Ergebnis. ■

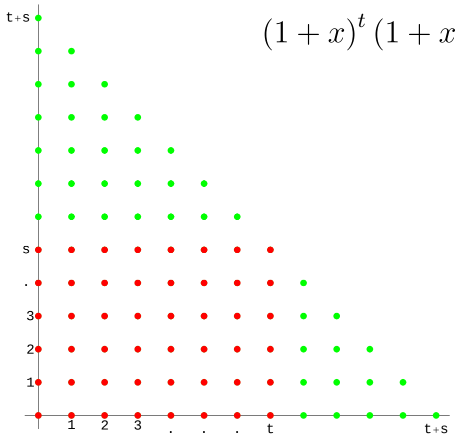
Lemma 8.11 *Sei $t, s \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{t+s}{n}. \tag{8.2}$$

Beweis. Für $t, s \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + x)^{t+s} = \sum_{n=0}^{t+s} \binom{t+s}{n} x^n. \tag{8.3}$$

Wenn wir $(1 + x)^{t+s}$ wie folgt schreiben, finden wir



$$\begin{aligned}
(1 + x)^t (1 + x)^s &= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} x^k \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} x^m = \\
&= \sum_{k=0}^{t} \sum_{m=0}^{s} \binom{t}{k} \binom{s}{m} x^{k+m} = \\
&= \sum_{n=0}^{t+s} \sum_{m+k=n} \binom{t}{k} \binom{s}{m} x^{k+m} = \\
&= \sum_{n=0}^{t+s} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{s}{n-k} \right) x^n. \qquad (8.4)
\end{aligned}$$

Man soll bemerken, dass die letzten zwei Summen über eine größere Menge summieren. Weil aber $\binom{t}{k} = 0$ für $k > t \in \mathbb{N}$ und $\binom{s}{m} = 0$ für $m > s \in \mathbb{N}$, bleibt die Summe gleich.

Weil die beiden Polynome in (8.3) und (8.4) identisch sind, sind die Koeffizienten identisch und es folgt (8.2).

Für $s \in \mathbb{N}$ fest gewählt betrachten wir

$$p_1(t) = \binom{t+s}{n} \text{ und } p_2(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{s}{n-k}.$$

Sowohl p_1 als auch p_2 ist ein Polynom von Grad n. Das Besondere ist, dass $p_1(t) = p_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{N}$. Zwei Polynome von Grad n die in $n+1$ verschiedenen Stellen gleich sind, sind identisch.

Das heißt, wir haben jetzt bewiesen, dass (8.2) gilt für alle $t \in \mathbb{C}$ und $s \in \mathbb{N}$. Weil die Gleichung in (8.2) symmetrisch bezüglich s und t ist, haben wir auch, dass (8.2) stimmt für alle $t \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{C}$.

Diesen Trick können wir nochmals benutzen, jetzt aber für jeden $s \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Wir bekommen, dass (8.2) gilt für alle $s, t \in \mathbb{C}$. ■

Wieso all dieses Getue um die Binomialreihe?

- Für $s \in \mathbb{N}$ hat man $\binom{s}{n} = 0$ wenn $n > s$ und bekommt man

$$\text{bin}(s; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} z^n = (1+z)^n.$$

- Für $s \in \mathbb{Q}^+$, sagen wir $s = \frac{k}{m}$ mit $k, m \in \mathbb{N}^+$, bekommt man

$$(\text{bin}(s; z))^m = \text{bin}(ms; z) = \text{bin}(k; z) = (1+z)^k.$$

  Weil für $x \in (-1, 1)$ gilt, dass $\text{bin}(s; x) \in \mathbb{R}$, hat man für ungerade m

$$\text{bin}(s; x) = (1+x)^s. \tag{8.5}$$

  Für gerade m findet man $\text{bin}(s; z) = \pm (1+z)^s$. Weil aber $\text{bin}(s; 0) = 1$ gilt, erwartet man auch da (8.5). Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, dass $z \mapsto \text{bin}(s; z)$ stetig ist auf $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Aus Stetigkeit und $\text{bin}(s; 0) = 1$ folgt (8.5) auch für m gerade.

- Für $s \in \mathbb{Q}^-$, benutzt man $\text{bin}(s; x) \, \text{bin}(-s; x) = \text{bin}(0; x) = 1$ und damit folgt aus (8.5) für $s \in \mathbb{Q}^+$ die Gültigkeit der Formel auch für $s \in \mathbb{Q}^-$.

- Die Formel in (8.5) kann man benutzen um x^s zu definieren für $x \in \mathbb{R}^+$ und $s \in \mathbb{C}$! Nähmlich für $x \in (0, 2)$ und $s \in \mathbb{C}$:

$$x^s = \text{bin}(s; x-1),$$

  für $x \in [2, 4)$ und $s \in \mathbb{C}$:

$$x^s = \text{bin}(2s; x^{\frac{1}{2}} - 1),$$

  für $x \in [4, 8)$ und $s \in \mathbb{C}$:

$$x^s = \text{bin}(3s; x^{\frac{1}{3}} - 1),$$

  usw.

Analysis 1, Woche 9

Stetigkeit I

9.1 Grenzwerte bei Funktionen

9.1.1 Der einfachste Fall

Wir erinnern noch mal an den Grenzwert bei einer Folge. Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle (oder komplexe) Folge. Dann heißt ℓ der Limes von dieser Folge, notiert als

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell,$$

wenn

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ n > N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Um zu zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$, muss man also für jede $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ geben, so dass a_n weniger als ε von ℓ liegt, wenn n größer N ist.

Eine ähnliche Struktur möchte man beim Limes einer Funktion haben.

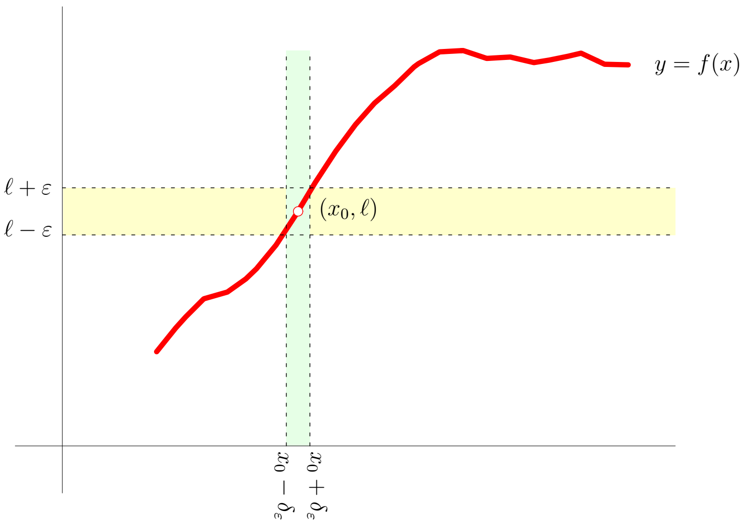
Definition 9.1 *Sei die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man ℓ ist der Limes von f für x nach x_0, notiert als*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{9.1}$$

Bemerkung 9.1.1 *Wie vorhin "$N = N_\varepsilon$" gilt auch hier "$\delta = \delta_\varepsilon$".*



Um zu zeigen, dass

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell,$$

muss man also für jede $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ geben so, dass wenn x weniger als δ_ε von x_0 liegt, $f(x)$ weniger als ε von ℓ liegt.

Beispiel 9.2 *Für die Funktion* $f : \mathbb{R}\backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x}$ *gilt* $\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$

Sei $\varepsilon > 0$. *Wir nehmen* $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\varepsilon\right)$. *Dann folgt für* $0 < |x-0| < \delta$, *dass*

$$\begin{aligned} |f(x)-1| &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x} - 1\right| = \left|\frac{x+1}{x^2+x} - \frac{1}{x^2+x} - \frac{x^2+x}{x^2+x}\right| = \\ &= \left|\frac{x^2}{x^2+x}\right| = \left|\frac{x}{x+1}\right| = \frac{1}{|x+1|}\,|x| \leq 2\,|x| < 2\delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung verwendet, dass für $|x-0| < \delta \leq \frac{1}{2}$ *gilt*

$$\frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{\left|-\frac{1}{2}+1\right|} = 2.$$

9.1.2 Wenn mehr als ein Punkt fehlt

Was machen wir, wenn statt einem Punkt im Definitionsgebiet von f noch viel mehr fehlt? Oder wenn wir uns absichtlich der Stelle nur von einer Seite annähern möchten? Zum Beispiel wollen wir auch den Grenzwert von $\sqrt{x}$ für $x \to 0$ nehmen können. Weil die Wurzel aber nur für nicht-negative Zahlen definiert ist, kann man nur von oben zu 0 kommen. Oder wir wollen nur für x von rechts nach 1 den Limes von $\frac{|x-1|}{x^2-1}$ berechnen.

Definition 9.3 *Sei die Funktion* $f : (x_0, \infty) \to \mathbb{R}$ *gegeben. Dann sagt man* ℓ *ist der Limes von* f *für* x *von oben nach* x_0, *notiert als*

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Selbstverständlich gibt es auch Grenzwerte bei einer Annäherung von unten:

Definition 9.4 *Sei die Funktion* $f : (-\infty, x_0) \to \mathbb{R}$ *gegeben. Dann sagt man* ℓ *ist der Limes von* f *für* x *von unten nach* x_0, *notiert als*

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Wenn wir Grenzwerte für Funktionen in $\mathbb{C}$ nehmen wollen, dann können wir nicht nur von unten, sondern auch von der positiven imaginären Seite oder sogar noch auf eine andere Art dahingehen (zum Beispiel über eine Spirale). Um all diese Möglichkeiten zusammen zu fassen, braucht es den Begriff **punktierter r-Umgebung:**

- Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}$. Die Menge $(a-r, a+r)$ heißt die r-Umgebung von a in $\mathbb{R}$.
- Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{R}$. Die Menge $(a-r, a) \cup (a, a+r)$ heißt die punktierte r-Umgebung von a in $\mathbb{R}$.

Bemerkung 9.4.1 *Auch in* $\mathbb{C}$ *werden (punktierte) Umgebungen benutzt. Statt Intervalle in* $\mathbb{R}$ *benutzt man kreisförmige Umgebungen:*

- *Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{C}$. Die Menge $B_r(a) := \{x \in \mathbb{C}; |x-a| < r\}$ heißt die r-Umgebung von a in $\mathbb{C}$.*
- *Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in \mathbb{C}$. Die Menge $B_r(a)^* := \{x \in \mathbb{C}; 0 < |x-a| < r\}$ heißt die punktierte r-Umgebung von a in $\mathbb{C}$.*

Die Notation $B_r(a)$ und $B_r(a)^*$ werden wir auch benutzen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$.

Definition 9.5 *Jede Menge U die derart ist, dass es $r > 0$ gibt mit $B_r(a) \subset U$, heißt eine **Umgebung** von a.*

Definition 9.6 *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) eine Funktion. Wenn $B_r(x_0)^* \cap A$ nicht leer ist für alle $r > 0$, dann sagt man ℓ ist der Limes von f für x nach x_0 innerhalb A, notiert als*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (x \in A \text{ und } 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{9.2}$$

Um zu zeigen, dass für eine Funktion gilt, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, muss man für jede $\varepsilon > 0$ eine $\delta_\varepsilon > 0$ finden so, dass (9.1) oder sogar (9.2) erfüllt ist. So etwas kann schwierig sein aber ist doch konstruktiv.

9.1.3 Wenn der Limes nicht existiert

Was soll man machen wenn man vermutet und beweisen möchte, dass eine Funktion f in a keinen Limes hat?

Wir gehen mal direkt von der Definition aus. Angenommen, es gilt nicht $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, also entweder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert nicht, oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert, ist aber ungleich $f(x_0)$. Schreiben wir (9.1) wie folgt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - \ell| < \varepsilon, \tag{9.3}$$

dann wird die Verneinung

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - \ell| \geq \varepsilon,$$

so wie die Verneinung von “es gibt ein rotes Fahrrad” ist “alle Fahrräder sind nicht rot”.

Das heißt, man muss eine $\varepsilon > 0$ finden so, dass es willkürlich nahe bei x_0 es ein x gibt mit $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$. Das heißt, es reicht aus um bei diesem $\varepsilon > 0$ eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ zu finden mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$ und $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$.

Lemma 9.7 *Sei $f : \mathbb{R} \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\ell \in \mathbb{R}$. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

- *Der Limes $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.*
- *Für alle Folgen $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ mit $a_n \neq a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$.*

Bemerkung 9.7.1 *Die negative Fassung kann sehr nützlich sein:*

Die folgende Aussagen sind gleichwertig:

- *$f(x) \not\to \ell$ für $x \to a$.*
- *Es gibt eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \neq a$ und $a_n \to a$ und $f(a_n) \not\to \ell$ für $n \to \infty$.*

Wenn man zeigen möchte, dass der Limes nicht gleich ℓ ist, reicht es also eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zu finden, die nach a geht aber wobei $\{f(a_n)\}_{n=0}^{\infty}$ nicht nach ℓ geht.

Beweis. ($\Rightarrow$) Wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, dann gibt es für jede $\varepsilon > 0$ eine $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass für $x \in B_{\delta_\varepsilon}(a)^*$ gilt $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Sei $\varepsilon > 0$ und sei δ_ε passend.

Nehmen wir $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n \neq a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann gibt es $N = N_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| < \delta_\varepsilon$ für $n > N$. Weil $a_n \in B_{\delta_\varepsilon}(a)^*$ folgt $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq \ell$, dann wie oben bemerkt, gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$, also auch für $\delta = \frac{1}{n}$, mindestens ein $x \in B_\delta(a)^*$ mit $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$. Nennen wir a_n eine solche zu $\delta = \frac{1}{n}$ passende x. Dann gilt $a_n \neq a$, $a_n \in B_{\delta_\varepsilon}(a)^*$ und weil $|a - a_n| < \frac{1}{n}$, auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Weil $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$ gilt nicht $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. ∎

Bis jetzt haben wir immer einen Kandidaten für ℓ bereit gehalten. Wenn der Kandidat unbekannt ist, kann man folgendes benutzen.

Lemma 9.8 *Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Limes $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert nicht, dann und nur dann, wenn es entweder*

1. *eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ gibt mit $a_n \to x_0$ und $|f(a_n)| \to \infty$ für $n \to \infty$, oder es*
2. *zwei Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ gibt, mit $x_0 \neq a_n \to x_0$ und $x_0 \neq b_n \to x_0$, so dass*
$$f(a_n) \to \ell_a \text{ und } f(b_n) \to \ell_b \neq \ell_a \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis. ($\Rightarrow$) Wenn es eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ gibt mit $a_n \to x_0$ und $f(a_n) \to \ell$ für $n \to \infty$, und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert nicht, dann gibt es $\varepsilon > 0$ und für jede $n \in \mathbb{N}^+$ mindestens eine b_n mit $|b_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(b_n) - \ell| > \varepsilon$. Wir können eine Teilfolge wählen derart, dass $\{f(b_{n_k})\}_{k=0}^{\infty}$ monoton ist. Für monotone Folgen gibt es zwei Möglichkeiten: $|f(b_{n_k})| \to \infty$ oder $f(b_{n_k}) \to \ell_b \in \mathbb{R}$. Wenn es ℓ_b gibt, dann folgt $\ell \neq \ell_b$ weil $|\ell - \ell_b| \geq \varepsilon$.

Wenn es keine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ gibt mit $a_n \to x_0$, so dass $f(a_n) \to \ell$ für $n \to \infty$, dann konvergiert auch $\left\{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ nicht. Jede Folge hat eine monotone Teilfolge. Weil beschränkt und monoton in $\mathbb{R}$ konvergent bedeutet, muss $\left\{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ unbeschränkt sein, anders gesagt, $\left|f\left(x_0 + \frac{1}{n_k}\right)\right| \to \infty$ für eine Teilfolge (sogar für die Folge).

($\Leftarrow$) Man nehme $\varepsilon = 1$ für Fall 1, beziehungsweise $\varepsilon = \frac{1}{4}|\ell_a - \ell_b|$ für Fall 2. Wenn ℓ der Limes wäre, dann gibt es keine $\delta > 0$, so dass für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Für den ersten Fall gibt es nämlich $a_n \in B_\delta(x_0)$ mit $|f(a_n)| > \ell + 1$. Für den zweiten Fall gilt entweder $|\ell - \ell_a| \geq 2\varepsilon$ oder $|\ell - \ell_b| \geq 2\varepsilon$. Nehmen wir an $|\ell - \ell_a| \geq 2\varepsilon$, dann gibt es $a_n \in B_\delta(x_0)$ mit $|f(a_n) - \ell_a| < \varepsilon$ und

$$|f(a_n) - \ell| \geq |\ell_a - \ell| - |f(a_n) - \ell_a| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

∎

Beispiel 9.9 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ *existiert nicht. Nehmen Sie* $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$*:*

$$\frac{1}{\frac{1}{n}} = n \to \infty \text{ für } n \to \infty.$$

Beispiel 9.10 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\frac{1}{x})$ *existiert nicht. Nehmen Sie* $\left\{\frac{1}{\pi n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *und* $\left\{\frac{2}{\pi(4n+1)}\right\}_{n=0}^{\infty}$*:*

$$\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi n}}\right) = \sin(\pi n) = 0 \to 0 \text{ und } \sin\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi(4n+1)}}\right) = \sin\left(2n\pi + \tfrac{1}{2}\pi\right) = 1 \to 1.$$

9.2 Stetigkeit

Definition 9.11 *Die Funktion* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *(oder* $\mathbb{C}$*) ist stetig in* $a\in\mathbb{R}$*, wenn*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Bemerkung 9.11.1 *Benutzt man die Definition vom Grenzwert, dann sieht man, dass stetig in a heißt:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{9.4}$$

Weil für $x = a$ *da eine Trivialität steht:* $|f(a) - f(a)| < \varepsilon$*, kann man bei Stetigkeit die Bedingung* $0 < |x-a|$ *weglassen.*

Selbstverständlich passt man die Definition an, wenn f nur auf einem Teilgebiet definiert ist:

Definition 9.12 *Die Funktion* $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ist stetig in* $a\in A$*, wenn* $A\cap B_r(a)^* \neq \emptyset$ *für alle* $r > 0$ *und*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = f(a).$$

Definition 9.13 *Die Funktion* $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *heißt stetig, wenn sie stetig ist in jedes* $a\in A$*.*

Beispiel 9.14 *Die Funktion* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *mit* $f(x) = x^3$ *ist stetig. Sei* $a\in\mathbb{R}$*. Um Stetigkeit in a zu beweisen, muss man für jede* $\varepsilon > 0$ *ein* δ_ε *geben, so dass die Implikation in (9.4) gilt. Hinten angefangen heißt das: man muss dafür sorgen, dass* $|x^3 - a^3| < \varepsilon$*. Weil für* $|x-a| < 1$ *gilt* $|x| \le |a| + 1$*, bekommen wir folgende Abschätzung*

$$\left|x^3 - a^3\right| = \left|x^2 + ax + a^2\right| |x-a| \le 3\left(|a|+1\right)^2 |x-a|.$$

Jetzt kann man raten, welche $\delta_\varepsilon > 0$ *man nehmen kann:*

$$\delta_\varepsilon = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{3\left(|a|+1\right)^2}\right). \tag{9.5}$$

Man bekommt für $|x-a| < \delta_\varepsilon$*, dass* $|x-a| < 1$ *und dann auch*

$$\left|x^3 - a^3\right| \le 3\left(|a|+1\right)^2 |x-a|,$$

und nächstens

$$3\left(|a|+1\right)^2 |x-a| < 3\left(|a|+1\right)^2 \frac{\varepsilon}{3\left(|a|+1\right)^2} = \varepsilon.$$

Kurzgefasst: für δ_ε *als in (9.5) folgt*

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|x^3 - a^3\right| < \varepsilon.$$

Beispiel 9.15 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ist stetig. Sei $a \in \mathbb{R}$. Um Stetigkeit in a zu beweisen, müssen wir x genügend (δ_ε) nah an a nehmen, um*

$$\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| < \varepsilon$$

zu haben für $\varepsilon > 0$ die uns gegeben wird. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Für $a = 0$ nehmen wir $\delta_\varepsilon = \varepsilon^3$. Dann gilt:

$$\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| = \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}\right| = \sqrt[3]{|x|} < \sqrt[3]{\delta_\varepsilon} = \sqrt[3]{\varepsilon^3} = \varepsilon.$$

Für $a \neq 0$ nehmen wir $\delta_\varepsilon = \min\left(\frac{1}{2}|a|, \varepsilon\sqrt[3]{a}^2\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| &= \left|\frac{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2}\right| \left|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right| = \\
&= \left|\frac{\left(\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2\right)\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right)}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2}\right| = \\
&= \frac{|x-a|}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2} \leq \text{(wird unten erklärt)} \\
&\leq \frac{|x-a|}{\sqrt[3]{a}^2} < \frac{1}{\sqrt[3]{a}^2}\delta_\varepsilon \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Weil $|x-a| < \frac{1}{2}|a|$ gilt, haben x und a das gleiche Vorzeichen, und folgt

$$\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2 \geq \sqrt[3]{a}^2 > 0$$

und

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}^2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{a}^2}.$$

Beispiel 9.16 *Die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist stetig.*

Beispiel 9.17 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \textit{wenn } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist nirgendwo stetig.

Beispiel 9.18 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

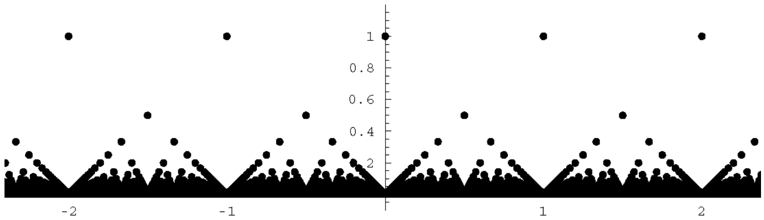
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \textit{wenn } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist nur in 0 stetig.

Beispiel 9.19 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \textit{wenn } x = \frac{n}{m} \textit{ mit } n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}^+ \textit{ und } \operatorname{ggT}(|n|, m) = 1, \\ 0 & \textit{wenn } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist stetig in jede $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ und nicht stetig in jede $a \in \mathbb{Q}$. Die Bedingung $\operatorname{ggT}(|n|, m) = 1$ (der größte gemeinschaftliche Teiler) sorgt dafür, dass $x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ auf die einfachste (mit kleinstem Nenner) Art geschrieben wird. Wir nehmen übrigens $\operatorname{ggT}(0, m) = 1$ für $m \in \mathbb{N}^+$. Hier steht eine Skizze zu dieser Funktion:



9.2.1 Folgenstetig

Bei dem Limes haben wir schon gesehen, dass es vernünftig sein kann, zurückzugreifen auf Grenzwerte von Folgen. Auch für Stetigkeit kann so etwas nützlich sein.

Lemma 9.20 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

1. *f ist stetig in a.*
2. *Für jede Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to f(a)$ für $n \to \infty$.*

Bemerkung 9.20.1 *Wir formulieren getrennt nochmals die negative Version. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

1. *f ist nicht stetig in a.*
2. *Es gibt eine Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \to a$ und $f(a_n) \not\to f(a)$ für $n \to \infty$*

Bemerkung 9.20.2 *Wenn für jede Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt, dass $f(a_n) \to f(a)$ für $n \to \infty$, dann nennt man f folgenstetig in a. Das Lemma kann man dann auch formulieren als:*

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und folgenstetig identisch.

Bemerkung 9.20.3 *Wir haben hier*

$$\text{“}a_n \to a \text{ für } n \to \infty\text{” statt “}\lim_{n\to\infty} a_n = a\text{”}$$

und

$$\text{“}f(a_n) \to f(a) \text{ für } n \to \infty\text{” statt } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)\text{”}$$

geschrieben. Die Bedeutung ist gleich. Der Grund, dass wir $f(a_n) \not\to f(a)$ für $n \to \infty$ schreiben, ist, dass die Verneinung von “$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$” genau gesagt, nicht “$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(a)$” ist, sondern

$$\text{“entweder } \lim_{n\to\infty} f(a_n) \text{ existiert nicht, oder } \lim_{n\to\infty} f(a_n) \text{ existiert, ist aber ungleich } f(a)\text{”.} \tag{9.6}$$

Die Aussage in (9.6) fasst man zusammen in “$f(a_n) \not\to f(a)$ für $n \to \infty$”.

Beweis von Lemma 9.20. Benutze die Ergebnisse in Lemma 9.7.

($\Rightarrow$) “f ist stetig in a” kann man schreiben als: es gibt $\ell \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ und $f(a) = \ell$. Aus $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ folgt “für jede Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \neq a$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to \ell$ für $n \to \infty$”. Weil $f(a) = \ell$ können wir die Bedingung $a_n \neq a$ weglassen und auch ℓ ersetzen durch $f(a)$.

($\Leftarrow$) Wenn “für jede Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to \ell$ für $n \to \infty$” dann hat man auch “für jede Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \neq a$ und $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to \ell$ für $n \to \infty$”. ■

Alle Aussagen in diesem Kapitel kann man ähnlich auch für komplexe Funktionen machen.

Analysis 1, Woche 10

Stetigkeit II

10.1 Regeln bei Grenzwerten und Stetigkeit

In der Regel ist der Student ganz begeistert von ε-δ-Geschichten. Trotzdem wollen wir ein paar Rechenregeln angeben, die oft schneller zum Ziel führen.

Lemma 10.1 *Seien $f, g : \mathbb{R} \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_f$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell_g$. Dann gilt:*

1. $\lim\limits_{x \to a} c f(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x \to a} (f(x).g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x). \lim\limits_{x \to a} g(x)$;
4. *und wenn* $\ell_g \neq 0$, *dann* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.

Beweis. Weil wir gezeigt haben, dass die Aussage $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ gleichwertig ist zu $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = \ell$ für alle Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n \neq a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, folgen diese Behauptungen aus Lemma 6.2. Man kann auch einen direkten Beweis geben. Nehmen wir als Beispiel das Produkt. Für $\varepsilon > 0$ müssen wir einen $\delta > 0$ finden, so dass $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - \ell_f \ell_g| < \varepsilon$. Dabei darf und soll man anwenden, dass es für f und g bei jedem $\varepsilon > 0$ einen dazu gehörenden $\delta > 0$ gibt. Nennen wir sie $\delta_f(\varepsilon)$ und $\delta_g(\varepsilon)$.

Sei $\varepsilon > 0$ und man nehme

$$\delta(\varepsilon) = \min\left(\delta_f\left(\frac{1}{2(|\ell_g| + 1)}\varepsilon\right), \delta_g(1), \delta_g\left(\frac{1}{2(|\ell_f| + 1)}\varepsilon\right)\right).$$

Bemerke, dass $\delta(\varepsilon) > 0$ gilt für jede $\varepsilon > 0$.

Für $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ gilt $|g(x)| \leq |g(x) - \ell_g| + |\ell_g| < 1 + |\ell_g|$ und

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \ell_f \ell_g| &= |f(x)g(x) - \ell_f g(x) + \ell_f g(x) - \ell_f \ell_g| \leq \\
&\leq |f(x) - \ell_f||g(x)| + |\ell_f| \, |g(x) - \ell_g| < \\
&< \frac{\varepsilon}{2(|\ell_g| + 1)}(|\ell_g| + 1) + |\ell_f| \frac{\varepsilon}{2(|\ell_f| + 1)} \leq \\
&\leq \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Selbstverständlich ist diese $\delta(\varepsilon)$ rückwirkend gefunden. ■

Korollar 10.2 *Jedes Polynom ist stetig auf* $\mathbb{R}$ *(und auch auf* $\mathbb{C}$*).*

Beweis. Jedes Polynom kann man schreiben als die Summe und Produkt von endlich vielen Termen c und x. Die Funktionen $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) mit $f_0(x) = 1$ und $f_1(x) = x$ sind stetig: man nehme $\delta_0(\varepsilon) = 1$ und $\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon$. Dann folgt aus $|x - y| < \delta_i(\varepsilon)$ dass $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. Das Ergebnis folgt aus Lemma 10.1-1,2,3. ■

Korollar 10.3 *Jede rationale Funktion is stetig in alle* $a \in \mathbb{R}$ *(alle* $a \in \mathbb{C}$*) wo der Nenner ungleich null ist.*

Beweis. Eine rationale Funktion ist der Quotient zweier Polynome und Polynome sind stetig. Wenn der Nenner umgleich null ist kann man Lemma 10.1-4 anwenden. ■

Ein Lemma, welches wir bei 'Folgen' nicht gesehen haben, ist folgendes:

Lemma 10.4 *Seien* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zwei stetige Funktionen. Dann gilt:*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

Bemerkung 10.4.1 *Übrigens folgt aus* $\lim_{y \to b} f(y) = \ell$ *und* $\lim_{x \to a} g(x) = b$ *nicht, dass* $\lim_{x \to a} f(g(x)) = \ell$*. Ein Gegenbeispiel für eine solche Behauptung ist:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0; \end{cases} \\ g(x) &= x \sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Dann hat man $\lim_{y \to 0} f(y) = 0$ *und* $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ *aber auch für* $a_n = \frac{1}{n\pi}$*, dass*

$$\lim_{n \to \infty} f(g(a_n)) = \lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi)\right) = \lim_{n \to \infty} f(0) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1.$$

Beweis. Sei wiederum $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu finden ist $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass

$$|x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Dabei darf man verwenden, dass es für jede $\varepsilon > 0$ ein $\delta_g(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$|x - a| < \delta_g(\varepsilon) \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

und dass es für jede $\varepsilon > 0$ ein $\delta_f(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$|y - g(a)| < \delta_f(\varepsilon) \Rightarrow |f(y) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Man liest es hintereinander und sieht, dass $\delta(\varepsilon) = \delta_g(\delta_f(\varepsilon))$ passt:

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta_g(\delta_f(\varepsilon)) &\Rightarrow |g(x) - g(a)| < \delta_f(\varepsilon), \\ |g(x) - g(a)| < \delta_f(\varepsilon) &\Rightarrow |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

10.2 Uneigentlicher Konvergenz und Asymptoten

Uneigentlich hat immer etwas mit ∞ zu tun. Nochmals sei bemerkt, dass ∞ keine Zahl ist und ∞ nur als Symbol benutzt wird.

10.2.1 Horizontale Asymptoten

Definition 10.5 *Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man ℓ ist der Limes von f für x nach ∞, notiert als*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell,$$

wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Man sagt f hat eine horizontale Asymptote für $x \to \infty$.

Beispiel 10.6 *Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. Denn für $x > N = N_\varepsilon := \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$ hat man*

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1\right| &= \left|\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right| = \left|\frac{x^2-(1+x^2)}{x\sqrt{1+x^2}+1+x^2}\right| = \\ &= \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}+1+x^2} \le \frac{1}{x^2} < \frac{1}{N^2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

10.2.2 Vertikale Asymptoten

Definition 10.7 *Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann sagt man ∞ ist der uneigentliche Limes von f für x nach a, notiert als*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

wenn

$$\forall N \in \mathbb{N} \; \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N.$$

Man sagt f hat eine vertikale Asymptote für $x \to a$.

Bemerkung 10.7.1 *Auch kann man bloß von einer Seite kommen. Man sagt ∞ ist der uneigentlicher Limes von f für x von oben nach a, notiert als*

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = \infty,$$

wenn

$$\forall N \in \mathbb{N} \; \exists \delta > 0 : \; 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > N.$$

Auch hier sagt man f hat eine vertikale Asymptote für $x \to a$.

Beispiel 10.8 *Für die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ gilt $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$. Denn für $x \in (0, \delta_N)$ mit $\delta_N = N^{-1}$ hat man*

$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} > N.$$

10.2.3 Schiefe Asymptoten

Definition 10.9 *Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Man sagt, dass f eine schiefe Asymptote $ax + b$ hat für $x \to \infty$, wenn*

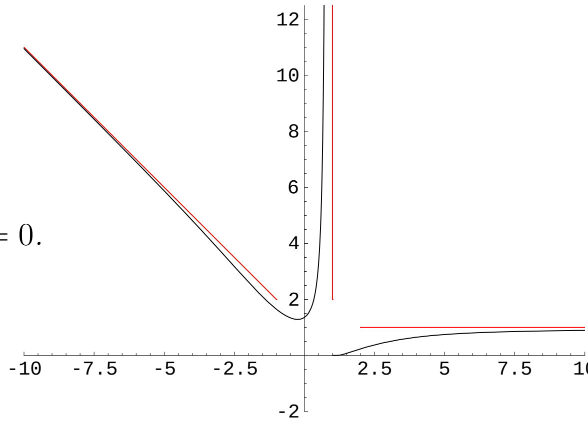
$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - (ax + b)| = 0.$$

Beispiel 10.10 *Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ hat $1 + x$ als schiefe Asymptote für $x \to \infty$. Denn für $x > N_\varepsilon := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ hat man*

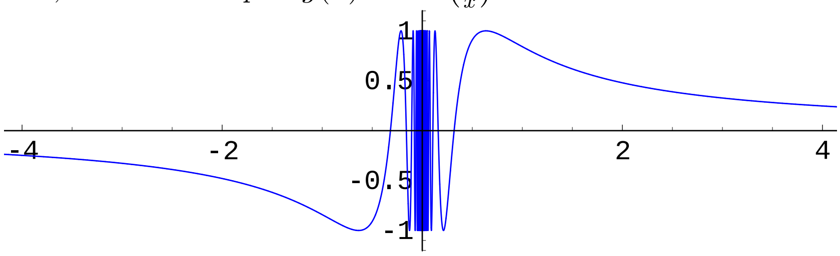
$$\left|\frac{x^2 + x + 1}{x} - (1 + x)\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

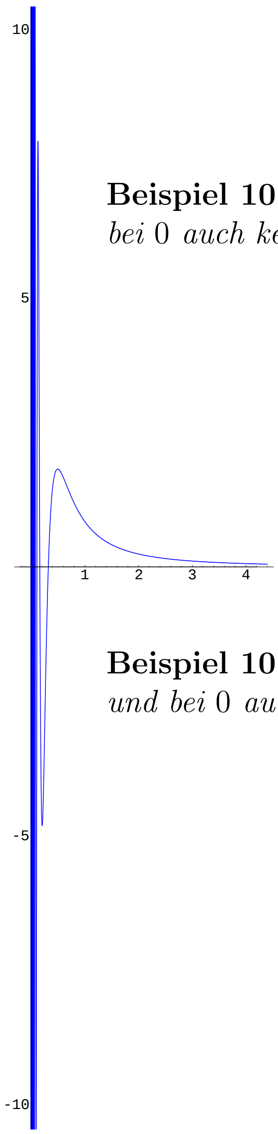
Beispiel 10.11 *Die Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\exp(x) - x}{\exp(x) + 1} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right)$ hat drei Asymptoten:*

1. *eine horizontale:* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$;
2. *eine vertikale:* $\lim\limits_{x\uparrow 1} f(x) = \infty$;
3. *eine schiefe:* $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x) - (-x + 1)| = 0$.



Beispiel 10.12 *Eine Funktion die definiert ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, kein Limes für $x \to 0$ hat und bei 0 auch keine Asymptote hat, ist zum Beispiel $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.*





Beispiel 10.13 *Eine andere Funktion die definiert ist auf $\mathbb{R}^+$, kein Limes für $x \downarrow 0$ hat und bei 0 auch keine Asymptote hat, ist $h(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.*

10.3 Zwischenwertsatz und Folgen

Satz 10.14 (Nullstellensatz) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es $x \in (a,b)$ mit $f(x) = 0$. Es gibt sogar eine erste Nullstelle $x_1 \in (a,b)$ und eine letzte Nullstelle $x_2 \in (a,b)$. Das heißt: $a < x_1 \le x_2 < b$ und $f < 0$ in $[a, x_1)$ und $f > 0$ in $(x_2, b]$.*

Beweis. Setze $A = \{x \in [a,b]\,;\, f(x) > 0\}$. Weil A nicht leer ist, $b \in A$, und A nach unten beschränkt ist, existiert $m := \inf\{x \in A\}$ in $\mathbb{R}$ wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $m > a$, $m < b$, $f(m) = 0$ und $f < 0$ in $[a, m)$, dass heißt, m ist die erste Nullstelle von f in $[a,b]$.

Weil $f(a) < 0$, gibt es zu $\varepsilon = -f(a)$ ein $\delta > 0$, derart dass für $x \in [a, a+\delta)$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Daraus folgt

$$f(x) \le |f(x) - f(a)| + f(a) < \varepsilon + f(a) = 0 \text{ für } x \in [a, a+\delta)\,.$$

Also gilt $m \ge a + \delta > a$.

Weil $f(b) > 0$, gibt es zu $\varepsilon = f(b)$ ein $\delta > 0$, derart dass für $x \in (b-\delta, b]$ gilt $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$. Daraus folgt

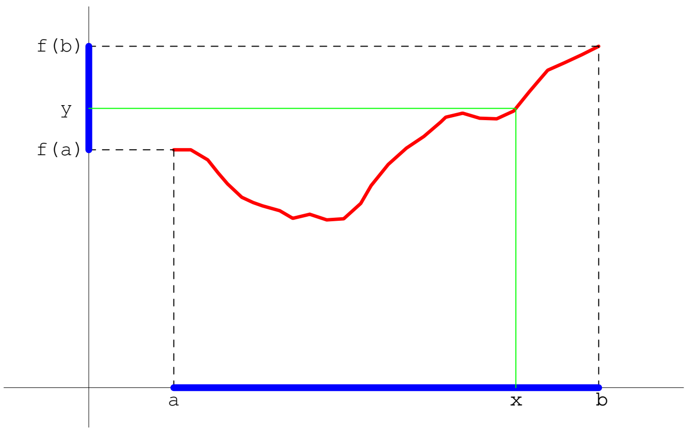
$$f(b - \tfrac{1}{2}\delta) \ge f(b) - \left| f(b - \tfrac{1}{2}\delta) - f(b) \right| > f(b) - \varepsilon = 0.$$

Also $b - \frac{1}{2}\delta \in A$ und $m \le b - \frac{1}{2}\delta < b$.

Weil $m := \inf\{x \in A\}$ gibt es $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ mit $a_n \to m$ für $n \to \infty$. Weil f stetig ist und $f(a_n) > 0$, gilt $f(m) \ge 0$. Weil $\left\{m - \frac{1}{n}\right\}_{n=0}^{\infty} \notin A$ und $m - \frac{1}{n} > a$ für n genügend groß, gilt $f(m - \frac{1}{n}) < 0$ und wegen der Stetigkeit, dass $f(m) \le 0$.

Die Definition von A liefert $f < 0$ in $[a, m)$. ■

Korollar 10.15 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es für jede y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ einen $x \in (a,b)$ mit $f(x) = y$.*



Beweis. Verwende den Nullstellensatz für $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit entweder $g(x) = f(x) - y$ oder $g(x) = y - f(x)$. ■

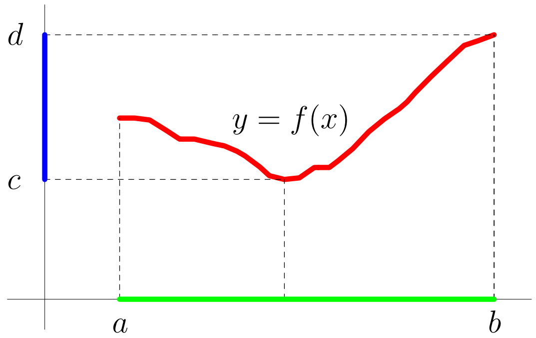
Satz 10.16 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ mit*

$$f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}) \text{ für alle } x \in [a,b]\,.$$

Anders gesagt: auf ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall nimmt eine stetige Funktion f ihr Minimum und Maximum an.

Beweis. Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $[a,b]$ mit $f(x_n) \to \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$. Wegen dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 6.16) hat $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ einen Häufungswert in $\mathbb{R}$. Das heißt, es gibt eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ und weil $[a,b]$ abgeschlossen ist, gilt $\tilde{x} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a,b]$. Weil f stetig ist, folgt $f(x_{n_k}) \to f(\tilde{x})$. Also gilt $f(\tilde{x}) = \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$ und man nehme $x_{\max} = \tilde{x}$.

Ebenso zeigt man, dass es $x_{\min}$ gibt. ■



Korollar 10.17 *Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, dann gibt es $c, d \in \mathbb{R}$ mit $[c,d] = \{f(x); x \in [a,b]\}$.*

Beweis. Man kombiniere Satz 10.16 und den Zwischenwertsatz. ■

Analysis 1, Woche 11

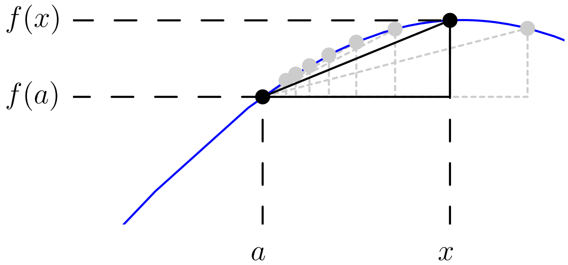
Differentialrechnung I

11.1 Ableitung einer Funktion

Definition 11.1 *Sei I ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $a \in I$, wenn*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existiert in } \mathbb{R}. \tag{11.1}$$

Man schreibt $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ und nennt $f'(a)$ die Ableitung von f in a.



Bemerkung 11.1.1 *Wenn man eine Funktion f von (Teilmengen von) $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ betrachtet, dann heißt f differenzierbar in $a \in I$ wenn $(x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))) : I \to \mathbb{R}$ und $(x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))) : I \to \mathbb{R}$ beide differenzierbar in a sind.*

Bemerkung 11.1.2 *Wenn man Funktionen von (Teilmengen von) $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ betrachtet, dann wird die Definition wie folgt. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und B eine Umgebung von α. Die Funktion $f : B \to \mathbb{C}$ heißt komplex differenzierbar in $\alpha \in B$, wenn*

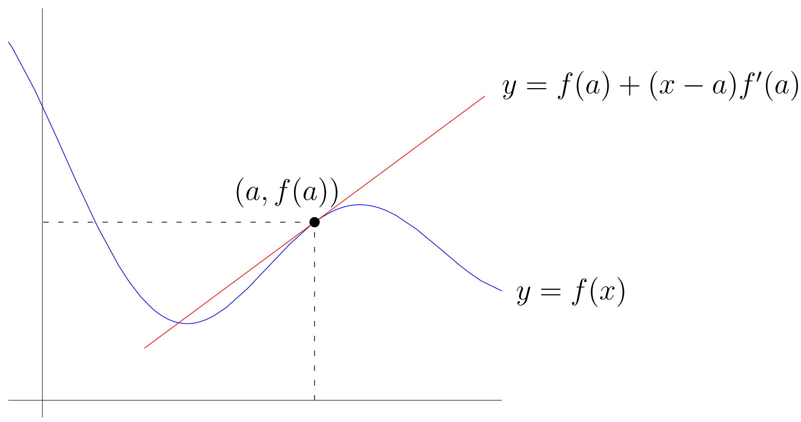
$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \text{ existiert in } \mathbb{C}.$$

Bei komplex differenzierbar muss der Limes von "alle Richtungen" genommen werden, man kann also erwarten, dass komplex differenzierbar eine "schwerere Bedingung" ist als differenzierbar. Vorläufig nur Folgendes. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, dann sind $x \mapsto \mathrm{Re}\,(f(x+iy))$ und $x \mapsto \mathrm{Im}\,(f(x+iy))$ für jede $y \in \mathbb{R}$, und $y \mapsto \mathrm{Re}\,(f(x+iy))$ und $y \mapsto \mathrm{Im}\,(f(x+iy))$ für jede $x \in \mathbb{R}$, (reell) differenzierbar. Der Weg zurück ist nicht wahr: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|^2$ ist, außer in 0, nicht komplex differenzierbar. Der genaue Unterschied wird bei 'Komplexe Funktionen' deutlich werden.

Bemerkung 11.1.3 *Nehmen wir an, dass a und I wie in Definition 11.1 sind. Dann ist (11.1) gleichwertig zu:*

$$\text{es gibt } \ell \in \mathbb{R} \text{ derart, dass } \lim_{x\to a} \frac{f(x) - (f(a) + (x-a)\,\ell)}{x-a} = 0. \tag{11.2}$$

Man sieht direkt, dass $\ell = f'(a)$ ist. Die Formel in (11.2) kann man leicht veranschaulichen. Die Funktion $x \mapsto f(a) + (x-a)\,\ell$ ist die Tangente zu f an der Stelle a. "Der Limes in (11.2) gleich null" heißt, dass wenn man die vertikale Distanz zwischen f und seine Tangente vergleicht mit der horizontalen Entfernung von a, diese Vertikale Distanz wesentlich schneller kleiner wird als die horizontale Entfernung (wenn man über die Grafik zu $(a, f(a))$ läuft).



Eine Funktion und ihre Tangente in a.

Definition 11.2 *Sei $a \in \mathbb{R}$ und I ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $[a, a+\varepsilon) \subset I$ für irgendein $\varepsilon > 0$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt rechtsdifferenzierbar in $a \in I$, wenn*

$$f'_+(a) := \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \text{ existiert in } \mathbb{R}.$$

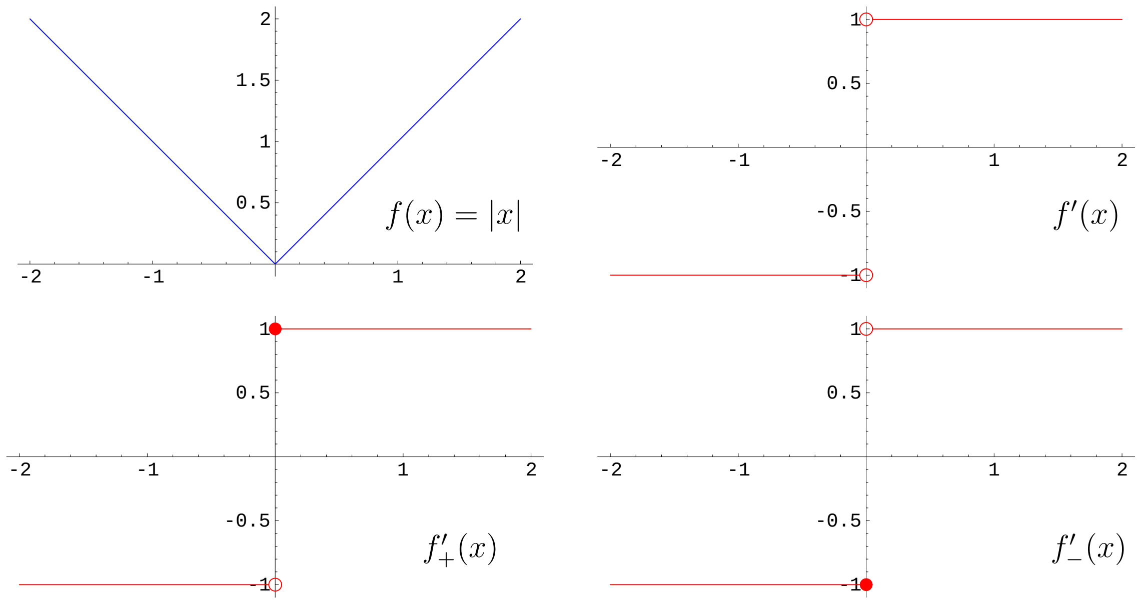
Sei $a \in \mathbb{R}$ und I ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit $(a-\varepsilon, a] \subset I$ für irgendein $\varepsilon > 0$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt rechtsdifferenzierbar in $a \in I$, wenn

$$f'_-(a) := \lim_{x\uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \text{ existiert in } \mathbb{R}. \tag{11.3}$$

Beispiel 11.3 *Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ hat man*

$$f'(x) = \begin{cases} \ \ 1 \text{ für } x > 0, \\ \text{existiert nicht für } x = 0, \\ -1 \text{ für } x < 0; \end{cases}$$

$$f'_+(x) = \begin{cases} \ \ 1 \text{ für } x \geq 0, \\ -1 \text{ für } x < 0; \end{cases} \quad \text{und} \quad f'_-(x) = \begin{cases} \ \ 1 \text{ für } x > 0, \\ -1 \text{ für } x \leq 0; \end{cases}$$



Satz 11.4 *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $c \in (a, b)$.*

1. *Wenn $f'(c) > 0$, dann gibt es $\delta > 0$, so dass* $\begin{cases} f(x) > f(c) \text{ für } x \in (c, c+\delta), \\ f(x) < f(c) \text{ für } x \in (c-\delta, c). \end{cases}$

2. *Wenn $f'(c) < 0$, dann gibt es $\delta > 0$, so dass* $\begin{cases} f(x) < f(c) \text{ für } x \in (c, c+\delta), \\ f(x) > f(c) \text{ für } x \in (c-\delta, c). \end{cases}$.

3. *Wenn f ein (lokales) Extremum[1] hat in c, dann gilt $f'(c) = 0$.*

Bemerkung 11.4.1 *Die letzte Aussage ist bekannt als das Kriterium von Fermat für ein Extremum.*

Beweis. Sei $f'(c) > 0$ und nimm $\varepsilon = f'(c)$. Dann gibt es $\delta > 0$, so dass für $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ gilt

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon$$

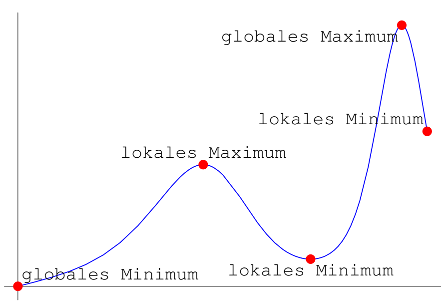
und dann auch

$$0 = f'(c) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < f'(c) + \varepsilon$$

und die erste Behauptung. Die zweite folgt auf ähnliche Art. Die Logische Umkehrung von einer Folge der ersten beiden: "$f'(c) \neq 0$" $\Rightarrow$ "f hat kein Extremum in c", und Existenz von $f'(c)$ gibt die dritte Behauptung. ■

[1]Sei I ein Intervall.

- Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat ein globales Maximum in $c \in I$, wenn $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in I$.
- Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Maximum in $c \in I$, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in I \cap (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.
- Ähnlich definiert man ein globales und ein lokales Minimum.



11.2 Höhere Ableitungen

Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) differenzierbar ist in einer Umgebung von a dann kann man $f' : B_r(a) \to \mathbb{R}$ (oder $f' : B_r(a) \to \mathbb{C}$) als selbständige Funktion betrachten und die Differenzierbarkeit von f' betrachten.

Definition 11.5 *Sei $n \in \mathbb{N}\backslash \{0,1\}$ und setze $f^{(1)} = f'$. Nehme an, dass für $f : B_r(a) \to \mathbb{R}$ in $B_r(a)$ die ersten $n-1$ Ableitungen $f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}$ in $B_r(a)$ existieren. Dann sagt man f ist n mal differenzierbar in a, wenn die n-te Ableitung*

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

existiert.

Bemerkung 11.5.1 *Man schreibt auch $f'' = f^{(2)}$ und $f''' = f^{(3)}$ usw. Manchmal werden auch römische Ziffern benutzt.*

Bemerkung 11.5.2 *Wenn die n-te Ableitung auch noch stetig ist, sagt man f ist n mal stetig differenzierbar.*

Es sei noch bemerkt, dass um f' bei a differenzieren zu können, es nicht reicht f' nur in a zu haben. Um eine Ableitung in a betrachten zu können, muss die betreffende Funktion in einer Umgebung von a definiert sein. Das heißt, wenn wir $f''(a)$ berechnen möchten, dann soll f' bekannt sein in einer Umgebung von a.

Beispiel 11.6 *Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x\,|x|$ ist einmal stetig differenzierbar in 0:*

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2\,|x| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \\
g''(x) &= \begin{cases} 2 \text{ für } x > 0, \\ -2 \text{ für } x < 0, \\ \text{existiert nicht in } 0, \end{cases} \\
\text{und für } n \geq 2: & \\
g^{(n)}(x) &= \begin{cases} 0 \text{ für } x \neq 0, \\ \text{existiert nicht in } 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für $x \in (a,b) \subset \mathbb{R}^+$ kann man verwenden, dass $g(x) = x^2$ auf (a,b) und g die Standardableitungen hat. Ähnlich hat man für $x \in (a,b) \subset \mathbb{R}^-$, dass $g(x) = -x^2$. Bei $x = 0$ muss man zurück zur Definition:

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x\,|x| - 0\,|0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Die zweite Ableitung in 0 existiert nicht, denn

$$\begin{aligned}
\lim_{x \downarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{2\,|x| - 0}{x - 0} = 2, \\
\lim_{x \uparrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} &= \lim_{x \uparrow 0} \frac{2\,|x| - 0}{x - 0} = -2.
\end{aligned}$$

11.3 Differenzierbarkeit liefert Stetigkeit

Lemma 11.7 *Sei $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in (c, d)$. Wenn f differenzierbar ist in a, dann ist f stetig in a.*

Bemerkung 11.7.1 *Auch gilt, dass wenn f rechts(links)differenzierbar ist in a, dann ist f rechts(links)stetig in a.*

Beweis. Wir verwenden Lemma 10.1 3:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) - f(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = \\ = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a}(x-a) &= f'(a)(a-a) = 0. \end{aligned}$$

■

Beispiel 11.8 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ ist (siehe Beispiel 11.3)*

1. *stetig auf $\mathbb{R}$;*
2. *differenzierbar auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ und nicht differenzierbar in 0;*
3. *rechtsdifferenzierbar und linksdifferenzierbar auf $\mathbb{R}$!*

Definition 11.9 *Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig in $a \in I$, wenn es $L \in \mathbb{R}^+$ und eine Umgebung $(a-\delta, a+\delta)$ gibt, derart dass*

$$|f(x) - f(a)| \le L|x-a| \text{ für alle } x \in I \cap (a-\delta, a+\delta).$$

L heißt eine Lipschitz-Konstante bezüglich f in a.

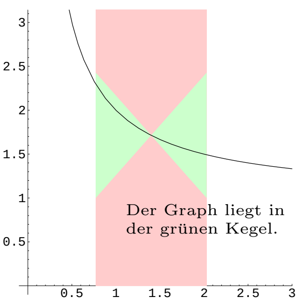
Bemerkung 11.9.1 *Lipschitz-Stetigkeit gibt Stetigkeit. Sei $\varepsilon > 0$ und nehme $\delta = L^{-1}\varepsilon$.*

Definition 11.10 *Die Funktion f erfüllt die Lipschitz-Bedingung auf dem Intervall I mit Lipschitz-Konstante $L \in \mathbb{R}$, wenn*

$$|f(x) - f(y)| \le L|x-y| \text{ für alle } x, y \in I.$$

Beispiel 11.11 *Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ ist Lipschitz-stetig in jede $a > 0$. Denn setzen wir $L = \frac{2}{a^2}$, gilt*

$$\left|\left(\frac{1}{x}+1\right) - \left(\frac{1}{a}+1\right)\right| = \frac{|a-x|}{ax} \le \frac{|x-a|}{\frac{1}{2}a^2} = L|x-a| \text{ für } x \in \left(\tfrac{1}{2}a, \tfrac{3}{2}a\right).$$

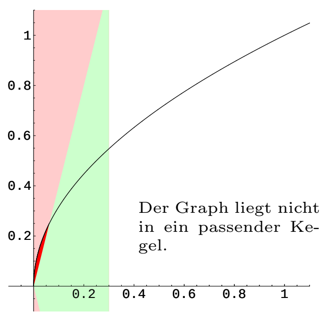


Der Graph liegt in der grünen Kegel.

Beispiel 11.12 *$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig in 0:*

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| = \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}|x-0|$$

und $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist nicht beschränkt für $x \to 0$.



Der Graph liegt nicht in ein passender Kegel.

Lemma 11.13 *Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$. Wenn f differenzierbar ist in $a \in I$, dann ist f Lipschitz-stetig in a.*

Beweis. Weil $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert, ist $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ beschränkt auf einer punktierten Umgebung von a. Jede solche Schranke kann man als Lipschitz-Konstante nehmen. ■

11.4 Ableitungsregeln

Lemma 11.14 *Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $a \in \mathbb{R}$, so gilt:*

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2. $(f\ g)'(a) = f'(a)\ g(a) + f(a)\ g'(a)$ *(Produktregel);*
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\ g(a) - f(a)\ g(a)'}{g(a)^2}$ *wenn $g(a) \neq 0$ (Quotientenregel);*
4. $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\ g'(a)$ *(Kettenregel).*

Bemerkung 11.14.1 *Die genaue Aussage bei $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ist wie folgt: Wenn f und g differenzierbar sind in a, dann ist auch die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = f(x) + g(x)$ differenzierbar in a und außerdem gilt $h'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

Bemerkung 11.14.2 *Übrigens braucht man für 1, 2 und 3 nur, dass f und g in einer Umgebung von a definiert sind und dass sie in a differenzierbar sind. Für die Kettenregel braucht man, dass f in einen Umgebung von $g(a)$ definiert ist und in $g(a)$ differenzierbar ist. Selbstverständlich soll g wie vorhin sein.*

Bemerkung 11.14.3 *Identische Regelen gelten für Differenzierbare Funktionen von (Teilmengen von) $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$.*

Beweis. Die erste Aussage ist eine sofortige Folge von Lemma 10.1 2. Für die zweite Aussage verwenden wir

$$\frac{(f\ g)(x) - (f\ g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

Lemma 10.1 2 und 3, und Lemma 11.7

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(x) + f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) = \\ = \ & \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a} g(x) + f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \\ = \ & f'(a)\ g(a) + f(a)\ g'(a). \end{aligned}$$

Für die dritte Aussage

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{f(x)\ g(a) - f(a)\ g(x)}{g(a)g(x)\,(x-a)} = \\ = \ & \frac{1}{g(a)g(x)} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \end{aligned}$$

und wiederum Lemma 10.1.

Den Beweis der Kettenregel spalten wir auf. 1) Wenn $g'(a) \neq 0$, dann gilt für $|x-a| < \delta$, mit δ genügend klein gewählt, dass $g(x) \neq g(a)$. Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $x_n \to a$, dann folgt aus der Stetigkeit von g, dass $y_n = g(x_n) \to g(a)$. Dann kann man

$$\frac{f(g(x_n)) - f(g(a))}{x_n - a} = \frac{f(y_n) - f(g(a))}{y_n - g(a)} \frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a}$$

schreiben und weil $\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(g(a))}{y_n-g(a)} = f'(g(a))$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)-g(a)}{x_n-a} = g'(a)$ gilt, folgt so das Ergebnis.

2) Wenn $g'(a) = 0$, verwenden wir Lemma 11.13, nämlich dass f die Lipschitzbedingung in $g(a)$ erfüllt:

$$\left|\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a}\right| \leq L \left|\frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right|$$

und $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) = 0$ liefert das Ergebnis. ■

11.5 Potenzreihen ableiten

Ableitungen von Polynomen sind in der Schule ausgiebig behandelt. Als Auffrischung: Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$, dann gilt

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{c-c}{y-x} = \lim_{y\to x} 0 = 0. \tag{11.4}$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$, dann gilt

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{y-x}{y-x} = \lim_{y\to x} 1 = 1. \tag{11.5}$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ und $n \in \mathbb{N}^+$, dann gilt

$$f'(x) = nx^{n-1}. \tag{11.6}$$

Um (11.6) zu beweisen, benutzen wir Lemma 11.14 und vollständige Induktion. Wir haben $(x^1)' = 1 = 1x^{1-1}$ und angenommen $(x^{n-1})' = (n-1)\, x^{n-2}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \left(x\ x^{n-1}\right)' = (x)' \left(x^{n-1}\right) + (x) \left(x^{n-1}\right)' = \\ &= 1\ x^{n-1} + x\ \ (n-1)\, x^{n-2} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Wiederum mit Lemma 11.14 folgt für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ und $a_i \in \mathbb{R}$, dass

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}. \tag{11.7}$$

Wenn man genau hinschaut sieht man, dass auch $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ und $a_i \in \mathbb{C}$ die Ableitung $f'(x)$ in (11.7) hat.

Wir werden zeigen, dass innerhalb des Konvergenzradius Funktionen, die durch eine Potenzreihe definiert sind, eine ähnlich aussehende Ableitung besitzen.

Satz 11.15 *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$. Dann ist $f(x) : B_R(0) \to \mathbb{R}$ differenzierbar (und auch $B_R(0) \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar) und*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ für } x \in B_R(0). \tag{11.8}$$

Beweis. Erstens zeigen wir, dass die Formel in (11.8) auch Konvergenzradius R hat. Man bemerke, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n$$

den gleichen Konvergenzradius haben. Das Wurzelkriterium gibt Konvergenzradius R_1 mit “$R_1\ell_1 = 1$” und

$$\ell_1 = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n n x^n|}.$$

Man hat

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n n x^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \ell$$

und das letztere gehört zu dem Konvergenzradius von f via “$R\ell = 1$”.

Jetzt werden wir zeigen, dass f die besagte Ableitung hat. Das heißt, sei $|y| < R$, dann müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{x\to y} \left| \frac{\sum_{n=0}^\infty a_n x^n - \sum_{n=0}^\infty a_n y^n}{x-y} - \sum_{n=1}^\infty a_n n x^{n-1} \right| = 0. \tag{11.9}$$

Wir nehmen $\delta = \frac{1}{2}(R - |y|)$. Für $|x-y| < \delta$ hat man $|x| < R$ und konvergiert $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ und $\sum_{n=1}^\infty a_n n x^{n-1}$. Dann dürfen wir (11.9) ersetzen durch

$$\lim_{x\to y} \left| \sum_{n=0}^\infty a_n \left(\frac{x^n - y^n}{x-y} - n x^{n-1} \right) \right| = 0. \tag{11.10}$$

Lemma 11.16 *Für $x, y \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt*

$$\left| \frac{x^n - y^n}{x-y} - n x^{n-1} \right| \leq \tfrac{n(n-1)}{2} |y-x| \max(|x|, |y|)^{n-2}. \tag{11.11}$$

Beweis. Für $n = 2$ gilt $\left| \frac{x^n - y^n}{x-y} - n x^{n-1} \right| = \left| \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} - 2x \right| = |y-x|$ und die Behauptung stimmt. Angenommen (11.11) gilt für n. Dann folgt

$$\left| \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} - (n+1)x^n \right| = \left| \frac{x^n(x-y) + y(x^n - y^n)}{x-y} - n x^{n-1} y + n x^{n-1}(y-x) - x^n \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{y(x^n - y^n)}{x-y} - n x^{n-1} y + n x^{n-1}(y-x) \right| \leq \\
&\leq |y| \left| \frac{x^n - y^n}{x-y} - n x^{n-1} \right| + n|x|^{n-1}|y-x| \leq \\
&\leq \tfrac{n(n-1)}{2} |y-x| \max(|x|, |y|)^{n-2} |y| + n|y-x||x|^{n-1} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\tfrac{n(n-1)}{2} + n \right) |y-x| \max(|x|, |y|)^{n-1} = \tfrac{(n+1)n}{2} |y-x| \max(|x|, |y|)^{n-1},$$

und ist Lemma 11.16 mit vollständiger Induktion bewiesen. ■

Wir setzen der Beweis vom Satz 11.15 fort. Mit der Hilfe dieses Lemmas folgt (11.10) wenn

$$\lim_{x\to y} |y-x| \sum_{n=0}^\infty |a_n| \tfrac{n(n-1)}{2} \max(|x|, |y|)^{n-2} = 0. \tag{11.12}$$

Weil $\max(|x|, |y|) < R - \delta$ gilt

$$|a_n| \tfrac{n(n-1)}{2} \max(|x|, |y|)^{n-2} \leq |a_n| \tfrac{n(n-1)}{2} (R-\delta)^{n-2}$$

und weil $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\frac{n(n-1)}{2}(R-\delta)^{n-2}$ konvergiert: innerhalb vom Konvergenzradius konvergiert die Reihe absolut. Im ersten Teil des Beweises sahen wir, dass der Konvergenzradius sich nicht ändert wenn man ein und also auch zwei extra n (oder $n-1$) beifügt. Also gibt es eine Schranke M für $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\frac{n(n-1)}{2}\max(|x|,|y|)^{n-2}$, die nur von $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, R und $\delta>0$ abhängt. Zusammengefasst:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_ny^n}{x-y}-\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}\right|=\\ =\ &\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{x^n-y^n}{x-y}-nx^{n-1}\right)\right|\leq\\ \leq\ &|y-x|\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\tfrac{n(n-1)}{2}\max(|x|,|y|)^{n-2}\leq M|y-x|\end{aligned}$$

und der Limes für $x\to y$ ist gleich 0. ■

Man kann das gleiche Ergebnis verwenden, um zu zeigen, dass innerhalb des Konvergenzradius auch f' differenzierbar ist.

Korollar 11.17 *Innnerhalb des Konvergenzradius ist eine Potenzreihe beliebig oft differenzierbar. Außerdem gilt für die n-te Ableitung von $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, dass $f^{(n)}(0)=n!a_n$.*

11.5.1 Exponentialfunktion

Wir haben die Exponentialfunktion definiert in Definition 8.5 als eine Potenzreihe

$$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

und in Lemma 8.6 sahen wir, dass sie mit Konvergenzradius ∞ hat. Wegen Satz 11.15 gilt für alle $x\in\mathbb{R}$

$$\exp'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}=\exp(x).$$

Lass uns noch einige Regeln für diese Funktion ableiten.

In Lemma 8.7 sahen wir, dass $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$ für alle $x,y\in\mathbb{C}$, und deswegen finden wir

$$\exp(nx)=(\exp(x))^n \text{ für } x\in\mathbb{C} \text{ und } n\in\mathbb{N}. \tag{11.13}$$

Für $x\in\mathbb{R}^+$ folgt $\exp(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n>0$ und mit $\exp(-x)\exp(x)=\exp(0)=1$ bekommen wir

$$\exp(x)>0 \text{ für alle } x\in\mathbb{R}. \tag{11.14}$$

Weil $y^m=a\in\mathbb{R}^+$ mit $m\in\mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist in $\mathbb{R}^+$, und diese Lösung ist $y=\sqrt[m]{a}$, finden wir für $n\in\mathbb{Z}$ und $m\in\mathbb{N}^+$ aus

$$\left(\exp(\frac{n}{m})\right)^m=\exp(n)=(\exp(1))^n,$$

dass

$$\exp(\frac{n}{m})=\exp(1)^{\frac{n}{m}}. \tag{11.15}$$

Definition 11.18 $e = \exp(1)$.

Für alle $q \in \mathbb{Q}$ haben wir also
$$\exp(q) = e^q.$$
Weil $(x \mapsto \exp(x)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, also auch stetig ist, ist
$$e^x := \exp(x)$$
eine vernünftige Definition. Wir werden sogar e^z definieren:

Definition 11.19 $e^z = \exp(z)$ *für* $z \in \mathbb{C}$.

Wir finden
$$\begin{aligned} e^{z+w} &= \exp(z+w) = \exp(z)\exp(w) = e^z e^w, \\ e^{nz} &= \exp(nz) = (\exp(z))^n = (e^z)^n, \end{aligned}$$
und e^z bringt tatsächlich die Rechenregel die man erwartet.

11.5.2 Goniometrische Funktionen

Auf Seite 19 haben wir kurz wiederholt, wie die Sinus- und Cosinusfunktion geometrisch definiert sind. Wir wollen hier eine analytische Definition geben und anschließend zeigen, dass diese neue Definition tatsächlich die gleichen Eigenschaften hat wie die altbekannten Funktionen.

Definition 11.20 *Sei* $z \in \mathbb{C}$. *Dann setzt man:*

- $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$;
- $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Bemerkung 11.20.1 *Weil die Potenzreihe bei der Exponentialfunktion Konvergenradius* ∞ *hat, kann man auch* sin *und* cos *als Potenzreihe schreiben für alle* $z \in \mathbb{C}$ *(und also auch für* $x \in \mathbb{R}$*):*
$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iz)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-iz)^n\right) = \frac{1}{2i}\sum_{\substack{n=0\\ n\ \text{ungerade}}}^{\infty}\frac{2}{n!}i^n z^n = \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)!}i^{2k+1}z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} \end{aligned} \tag{11.16}$$
und
$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iz)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-iz)^n\right) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=0\\ n\ \text{gerade}}}^{\infty}\frac{2}{n!}i^n z^n = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k)!}i^{2k}z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k}. \end{aligned} \tag{11.17}$$

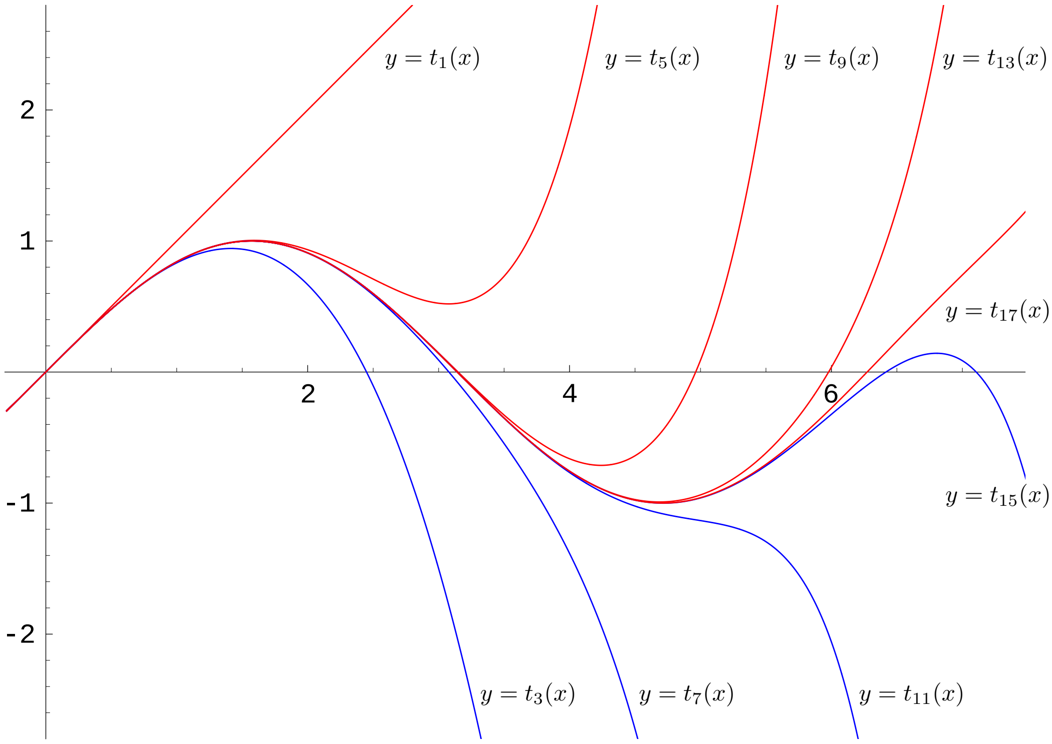
Die Sinus und Cosinus aus Definition 11.20 erfüllen Folgendes:

1. Sie sind reell für $x \in \mathbb{R}$, denn die Koeffizienten in (11.16) und (11.17) sind reell. Es gilt sogar
$$\sin(0) = 0 \text{ und } \cos(0) = 1.$$
Außerdem ist der Sinus ungerade und der Cosinus gerade:
$$\sin(-x) = -\sin(x) \text{ und } \cos(-x) = \cos(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

2. Sie erfüllen
$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1, \tag{11.18}$$
denn
$$\begin{aligned}(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \\ = \frac{e^{2ix} - 2e^0 + e^{-2ix}}{-4} &+ \frac{e^{2ix} + 2e^0 + e^{-2ix}}{4} = 1.\end{aligned}$$

3. Es gilt
$$\sin'(x) = \cos(x), \tag{11.19}$$
denn aus (11.16) und (11.8) folgt
$$\sin'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)\,x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \cos(x).$$
Ebenso gilt
$$\cos'(x) = -\sin(x), \tag{11.20}$$
denn
$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2k\; z^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = -\sin(x).\end{aligned}$$

4. Es gilt
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \tag{11.21}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \tag{11.22}$$
Man beweist diese Aussagen mit Hilfe von Definition 11.20, $e^{a+b} = e^a e^b$ und sorgfältigem Rechnen.



Hier oben stehen Skizzen zu $y = t_{2m+1}(x)$, wobei die t_{2m+1} die Polynomen darstellen, die man bekommt, wenn man in der Potenzreihe für den Sinus nur die Terme bis zu Grad $2m + 1$ nimmt:

$$t_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

5. Die Termen in der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$ sind für $x > 0$ alternierend, und weil die Folge $\left\{\frac{1}{(2m)!} x^{2m}\right\}_{m=0}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{4!}x^4, \frac{1}{6!}x^6, \dots\right\}$ ab $m = 1$ monoton fällt wenn $x^2 < 12$, folgt daraus, wie beim Kriterium von Leibniz, dass

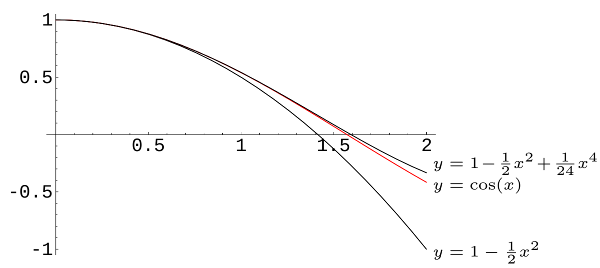
$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 \leq 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 \leq 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \tfrac{1}{8!}x^8 - \tfrac{1}{10!}x^{10} \leq \dots$$

$$1 \geq 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 \geq 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 + \tfrac{1}{8!}x^8 \geq \dots \quad \text{für } x^2 < 12$$

und

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 < \cos(x) < 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 \text{ für } x \in \left(0, \sqrt{12}\right).$$

Weil $1 - \frac{1}{2}x^2 \geq 0$ für $x \in \left[0, \sqrt{2}\right]$ und weil $\left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right]_{x=2} = -\frac{1}{3} < 0$ hat der Cosinus wegen Satz 10.14 eine erste positive Nullstelle zwischen $\sqrt{2}$ und 2. Diese erste positive Nullstelle von dem Cosinus definiert man als $\frac{1}{2}\pi$.



Aus (11.18) folgt $\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \pm 1$.

Ebenso kann man die alternierende Folge in der Sinusreihe benutzen um folgende Abschätzung zu finden:

$$x - \tfrac{1}{6}x^3 < \sin(x) \text{ für } x \in \left(0, \sqrt{20}\right).$$

Mit

$$\begin{array}{rll} x - \frac{1}{6}x^3 & \geq 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{7}{16} & \text{auf } \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ x - \frac{1}{6}x^3 & \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\left(2\right)^3 = \frac{1}{6} & \text{auf } \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{array}$$

hat man $\sin(x) > 0$ auf $[1,2]$, und weil $1 < \sqrt{2} < \frac{1}{2}\pi < 2$ gilt, folgt

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 1. \tag{11.23}$$

6. Aus (11.21) folgt

$$\sin(\pi) = 2\cos(\tfrac{1}{2}\pi)\sin(\tfrac{1}{2}\pi) = 0,$$

und mit (11.23)

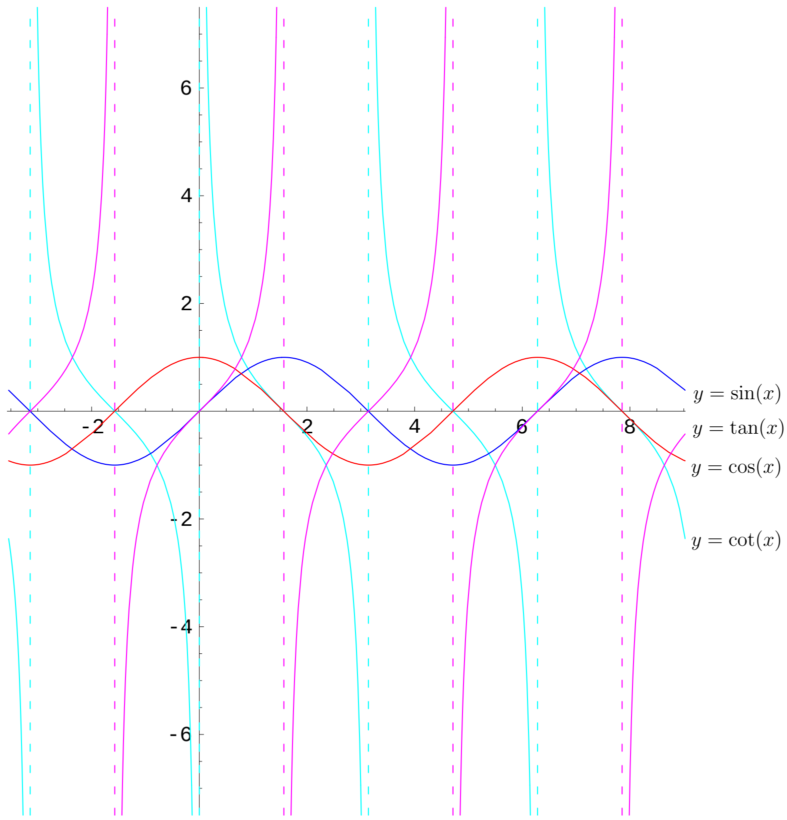
$$\begin{aligned} \sin\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right) &= \sin(x)\cos(\tfrac{1}{2}\pi) + \cos(x)\sin(\tfrac{1}{2}\pi) = \cos(x), \\ \sin\left(x - \tfrac{1}{2}\pi\right) &= \sin(x)\cos(\tfrac{1}{2}\pi) - \cos(x)\sin(\tfrac{1}{2}\pi) = -\cos(x), \end{aligned}$$

und anschließend

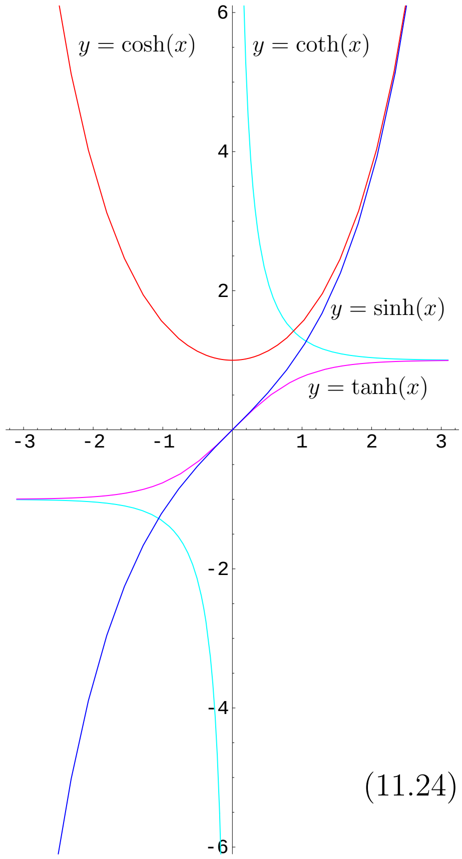
$$\begin{aligned} \sin(x+\pi) &= \cos\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\sin(x), \\ \sin(x+2\pi) &= -\sin(x+\pi) = \sin(x), \\ \cos(x+\pi) &= \sin\left(x + \tfrac{3}{2}\pi\right) = -\sin\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right) = -\cos(x), \\ \cos(x+2\pi) &= -\cos(x+\pi) = \cos(x). \end{aligned}$$

Der **Tangens** und der **Cotangens** werden definiert als:

$$\begin{array}{lll} \tan: & \{z \in \mathbb{C}; \cos(z) \neq 0\} \to \mathbb{C} & \text{mit } \tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}, \\ \cot: & \{z \in \mathbb{C}; \sin(z) \neq 0\} \to \mathbb{C} & \text{mit } \cot(z) = \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}. \end{array}$$



11.5.3 Hyperbolische Funktionen



Auch den folgenden Funktionen kann man begegnen.

Definition 11.21 *Sei $z \in \mathbb{C}$. Man setzt:*

- $\sinh(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ *(Sinus hyperbolicus);*
- $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ *(Cosinus hyperbolicus);*
- $\tanh(z) = \dfrac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$*;*
- $\coth(z) = \dfrac{\cosh(z)}{\sinh(z)}$ *für $z \neq 0$.*

Einige Eigenschaften von sinh und cosh:

1. Sie sind reell für $x \in \mathbb{R}$ und es gilt
$$\sinh(0) = 0 \text{ und } \cosh(0) = 1. \tag{11.24}$$
2. Es gilt
$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1, \tag{11.25}$$
3. und
$$\sinh'(x) = \cosh(x) \text{ und } \cosh'(x) = \sinh(x). \tag{11.26}$$

Zwischen sin und sinh, repektive cos und cosh gibt es folgende Identitäten:

$$\sinh(iz) = i\sin(z) \text{ und } \cosh(iz) = \cos(z).$$

Die Funktion Cosinus hyperbolicus taucht auf als Kettenlinie.

Analysis 1, Woche 12

Differentialrechnung II

12.1 Mittelwertsatz und Folgen

Satz 12.1 (Rolle) *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Nehmen wir an, dass f stetig ist, dass $f_{|(a,b)} : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $f(a) = f(b)$. Dann gibt es $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.*

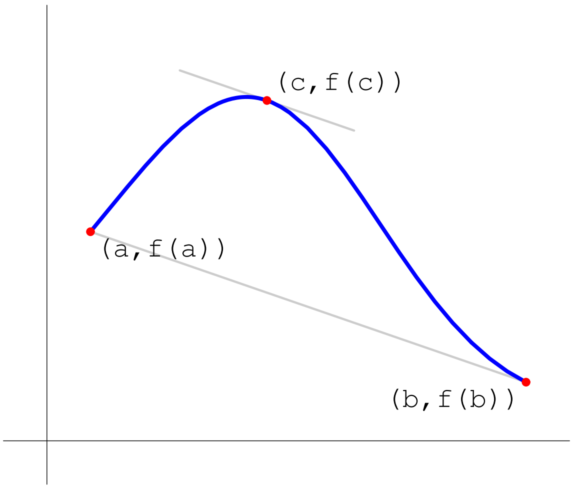
Beweis. Wenn f konstant ist, so gilt sogar für jeden $x \in (a, b)$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{0}{y - x} = 0.$$

Wenn f nicht konstant ist, dann gibt es $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) \neq f(a)$. Wenn $f(x_0) > f(a)$, dann hat wegen Satz 10.16 f ein Maximum in $[a, b]$, sagen wir in x_1, und weil $f(x_0) > f(a) = f(b)$ muss x_1 im Innern des Intervalls liegen, das heißt $x_1 \in (a, b)$. Eine Anwendung von Satz 11.4 gibt $f'(x_1) = 0$. Für $f(x_0) < f(a)$ geht man ähnlich vor. ∎

Satz 12.2 (Mittelwertsatz) *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Nehmen wir an, dass f stetig ist und dass $f_{|(a,b)} : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Dann gibt es $c \in (a, b)$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Beweis. Man betrachte $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

Es folgt sofort, dass $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = f(a),$$

und dass man den Satz von Rolle auf g anwenden kann. ∎

Beispiel 12.3 *Die Niederländische Polizei wendet den Mittelwertsatz an bei einem Typ von Geschwindigkeitskontrollen, der sogenannte "Trajectcontrole". Setze die Fahrzeit t als Funktion der Distanz s: $t = T(s)$, und die Umkehrfunktion $S = T^{inv}$ gibt die Distanz als Funktion der Zeit. Dann gilt für die Geschwindigkeit*

$$v(t) = S'(T(s)) = \frac{1}{T'(s)}.$$

Mit digitalen Kameras werden die Zeiten gemessen an zwei Kontrollstellen a und b mit einer genau bekannten Entfernung von mehreren Kilometern. Software identifiziert passierende Nummernschilder und kombiniert diese mit den Zeiten. Der Mittelwertsatz liefert den Beweis, dass es eine Stelle gibt, wo die Geschwindigkeit gleich

$$v = \frac{b-a}{T(b)-T(a)}$$

war. Für v etwas größer als 120 (100 - 80) wird man benachrichtet.

Korollar 12.4 *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.*

1. *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f monoton wachsend auf (a,b).*
2. *Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton wachsend auf (a,b).*
3. *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f monoton fallend auf (a,b).*
4. *Wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton fallend auf (a,b).*

Beweis. Man nehme $x_1 < x_2$ mit $x_1, x_2 \in (a,b)$ und der Mittelwertsatz gibt $c \in (x_1, x_2)$, so dass

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c).$$

Die Ungleichung für $f'(x)$ liefert die gleiche Ungleichung für $f(x_2) - f(x_1)$. ■

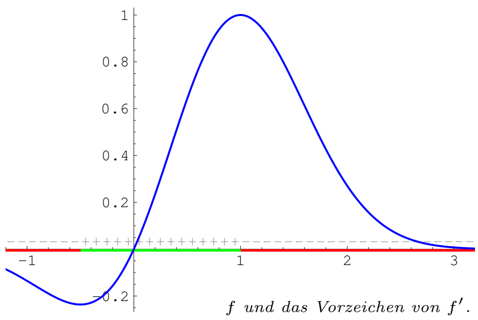
Korollar 12.5 *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $c \in (a,b)$.*

1. *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,c)$ und $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (c,b)$, dann hat f ein lokales Maximum in c.*
2. *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,c)$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (c,b)$, dann hat f ein lokales Minimum in c.*

Beispiel 12.6 *Gefragt sind die Extreme von der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \exp\left(x - x^2\right)$. Die Ableitung ist $f'(x) = (1 + 2x)(1 - x) \exp\left(x - x^2\right)$ und man bekommt sofort:*

$$\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{für } x < -\frac{1}{2} \text{ und für } x > 1, \\ f'(x) > 0 & \text{für } x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right). \end{array}$$

Damit haf f ein lokales Maximum in 1 und ein lokales Minimum in $-\frac{1}{2}$. Weil $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$ sind es sogar globale Extreme.



f und das Vorzeichen von f'.

Mit Hilfe der zweite Ableitung, wenn sie existiert, kann man oft sehen, ob man es bei $f'(x_0) = 0$ mit einem Minimum oder einem Maximum zu tun hat.

Lemma 12.7 *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$.*

1. *Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat f ein (lokales) Minimum in x_0.*
2. *Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat f ein (lokales) Maximum in x_0.*

Beweis. Weil f' differenzierbar ist, ist f' auch stetig. Weil $f''(x_0) > 0$, gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $f'(x) > f'(x_0) = 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ und $f'(x) < f'(x_0) = 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$. Für $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ gilt wegen des Mittelwertsatzes, dass es $\tilde{x} \in (x_0, x)$ gibt mit

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(\tilde{x}) < 0.$$

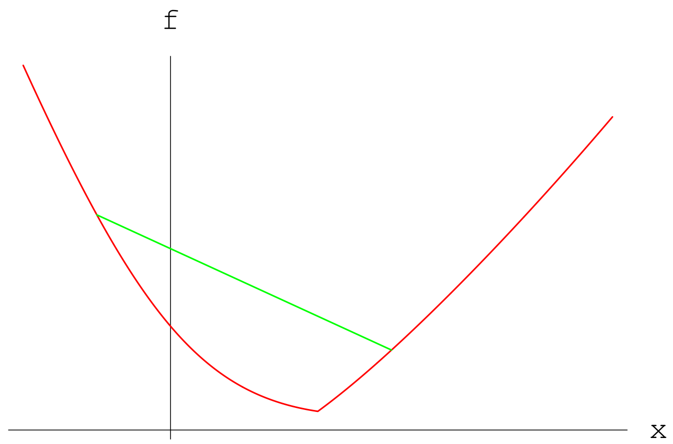
Ebenso gibt es für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ ein $\tilde{x} \in (x, x_0)$ gibt mit

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(\tilde{x}) < 0.$$

Sowohl $x - x_0$ und $f'(\tilde{x})$ sind jetzt negativ. ■

Definition 12.8 *Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für jede $x, y \in (a, b)$ und $\theta \in (0, 1)$ gilt*

$$f\left(\theta x + (1 - \theta)\, y\right) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)\, f(y).$$



Bei einer konvexen Funktion liegt jeder Verbindungsstrich von zwei Punkten auf dem Graphen, oberhalb von (oder auf) diesem Graphen.

Lemma 12.9 *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion und $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f konvex.*

Beweis. Betrachte die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(\theta) = f\left(\theta x + (1 - \theta)\, y\right) - \theta f(x) - (1 - \theta)\, f(y).$$

Dann gilt $g(0) = g(1) = 0$ und wir müssen zeigen, dass $g(\theta) \leq 0$ gilt für alle $\theta \in (0, 1)$. Man hat

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= (x - y)\, f'\left(\theta x + (1 - \theta)\, y\right) - f(x) + f(y), \\ g''(\theta) &= (x - y)^2\, f''\left(\theta x + (1 - \theta)\, y\right) \geq 0. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Wenn $g(\theta_0) > 0$ wäre, dann gibt es $\theta_1 \in (0, \theta_0)$ mit

$$g'(\theta_1) = \frac{g(\theta_0) - g(0)}{\theta_0 - 0} = \frac{g(\theta_0)}{\theta_0} > 0$$

und es gibt $\theta_2 \in (\theta_0, 1)$ mit

$$g'(\theta_2) = \frac{g(1) - g(\theta_0)}{1 - \theta_0} = \frac{-g(\theta_0)}{1 - \theta_0} < 0.$$

Dann gibt es $\theta_3 \in (\theta_1, \theta_2)$ mit

$$g''(\theta_3) = \frac{g'(\theta_2) - g'(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1} < 0,$$

und das ist einen Widerspruch zu (12.1). ■

Bemerkung 12.9.1 *Konvexe Funktionen müssen nicht zweimal differenzierbar sein; sogar nicht mal einmal. Die Funktion $x \mapsto |x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht differenzierbar in 0 und doch konvex.*

12.2 Die Umkehrfunktion

Definition 12.10 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt $f^{inv} : f(I) \to \mathbb{R}$ eine **Umkehrfunktion** zu f, wenn*

$$f^{inv} \circ f(x) = x \text{ für alle } x \in I.$$

Hier setzt man $f(I) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in I \text{ mit } y = f(x)\}$.

Bemerkung 12.10.1 *Die Umkehrfunktion für f wird auch mit f^{-1} notiert. Das könnte verwirrend sein, denn die Umkehrfunktion zu $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nicht $x \mapsto \left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$!*

Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ injektiv ist, zum Beispeil weil f streng monoton ist, dann gibt es eine Umkehrfunktion.

Satz 12.11 *Sei I ein beliebiges Intervall[1]. Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige, streng monotone Funktion ist mit $J = \{f(x); x \in I\}$, dann gibt es eine Umkehrfunktion $f^{inv} : J \to I$ und die ist stetig und streng monoton.*

Wenn außerdem $\tilde{x} \in I^o$ und f ist differenzierbar in $\tilde{x}$ mit $f'(\tilde{x}) \neq 0$, dann ist f^{inv} differenzierbar in $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ und gilt

$$\left(f^{inv}\right)'(\tilde{y}) = \frac{1}{f'(\tilde{x})}.$$

[1] Mit einem beliebigen Intervall I ist gemeint $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$, (a,b), $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $[a,\infty)$, (a,∞) oder $(-\infty,\infty)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Wenn die Randpunkte zum Intervall I gehören, dann nennt man das Intervall abgeschlossen; wenn nicht, dann nennt man es offen. Übrigens, ∞ ist kein Punkt und dann auch kein Randpunkt.

Man kann jedes Intervall abschließen (man schreibt $\bar{I}$) und "öffnen" (man schreibt I^o).

$I:$	$[a,b]$	$(a,b]$	$[a,b)$	(a,b)	$(-\infty,b]$	$(-\infty,b)$	$[a,\infty)$	(a,∞)	$(-\infty,\infty)$
$\bar{I}:$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,b]$	$[a,b]$	$(-\infty,b]$	$(-\infty,b]$	$[a,\infty)$	$[a,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$I^o:$	(a,b)	(a,b)	(a,b)	(a,b)	$(-\infty,b)$	$(-\infty,b)$	(a,∞)	(a,∞)	$(-\infty,\infty)$

Beweis. Wenn eine Funktion streng monoton ist, dann ist sie injektiv. Surjektivitität von I zum Wertebereich $J = f(I)$ ist selbstverständlich. Also die Umkehrfunktion $f^{inv} : J \to I$ existiert. Die Monotonie von f^{inv} beweist man auch sofort. Weil f streng monoton ist, sagen wir wachsend, dann gilt für $x_1, x_2 \in I$, dass

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Die Definition von streng monoton wachsend liefert $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ und auch $x_1 \not> x_2 \Rightarrow f(x_1) \not> f(x_2)$. Das letztere ist gleichwertig zu $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$. Es bleibt noch zu beweisen, dass f^{inv} stetig ist.

Sei $\tilde{y}$ ein innerer Punkt von J und setze $\tilde{x} = f^{inv}(\tilde{y})$. Weil $\tilde{y}$ ein innerer Punkt ist, gibt es $\nu > 0$ mit $(\tilde{y} - \nu, \tilde{y} + \nu) \in J$. Weil f stetig ist gibt es $\varepsilon_0 > 0$ so, dass für $|x - \tilde{x}| < \varepsilon_0$ gilt $f(\tilde{x}) \in (\tilde{y} - \nu, \tilde{y} + \nu) \subset J$. Sei $\varepsilon > 0$ setze $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon, \varepsilon_0)$ und setze

$$\delta = \min\left(|f(\tilde{x}) - f(\tilde{x} - \varepsilon_1)|, |f(\tilde{x}) - f(\tilde{x} + \varepsilon_1)|\right).$$

Dann gilt $\delta \le \nu$ und für $|y - \tilde{y}| < \delta$ gilt $y \in J$. Wegen der Monotonie hat man für $|y - \tilde{y}| < \delta$:

$$\left|f^{inv}(\tilde{y}) - f^{inv}(y)\right| = \left|\tilde{x} - f^{inv}(y)\right| < \max_{\pm}\left(\left|\tilde{x} - f^{inv}\left(f(\tilde{x} \pm \varepsilon_1)\right)\right|\right) = \varepsilon_1 \le \varepsilon.$$

Für $\tilde{y}$ ein Randpunkt von J erreicht man das Ergebnis, indem man einseitige Umgebungen benutzt.

Die Ableitung von f^{inv} geht wie folgt. Sei $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine beliebige Folge mit $y_n \to \tilde{y}$ und $y_n \neq \tilde{y}$. Setze $x_n = f^{inv}(y_n)$. Dann gilt $x_n \to f^{inv}(\tilde{y}) = \tilde{x}$ und $x_n \neq \tilde{x}$ und dann auch

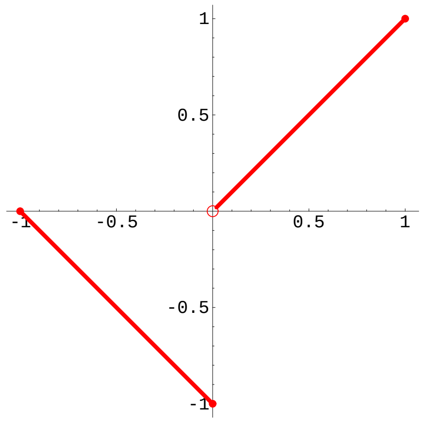
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{f^{inv}(y_n) - f^{inv}(\tilde{y})}{y_n - \tilde{y}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - \tilde{x}}{f(x_n) - f(\tilde{x})} = \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(\tilde{x})}{x_n - \tilde{x}}\right)^{-1} = \left(f'(\tilde{x})\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 12.11.1
Wenn $f : I \to J$ mit I ein Intervall, eine umkehrbare und stetige Funktion ist, dann ist f monoton. Stetigkeit oder Monotonie sind aber nicht notwendig für die Existenz einer Umkehrfunktion. Betrachte $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in (0, 1], \\ -1 - x & \text{für } x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig und nicht monoton. Sie ist aber umkehrbar. Es gilt sogar, dass $f^{inv} = f$.



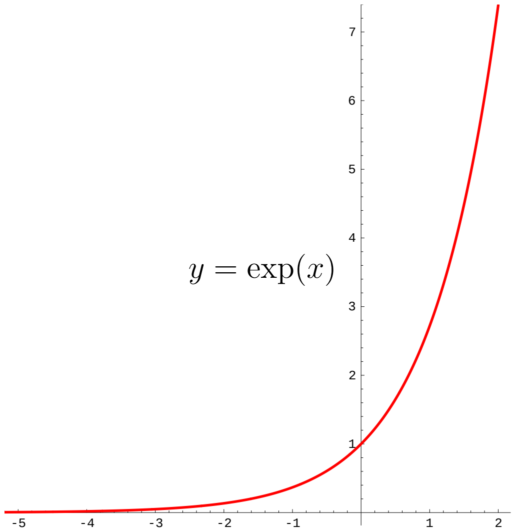
12.2.1 Berühmte Umkehrfunktionen I, der Logarithmus

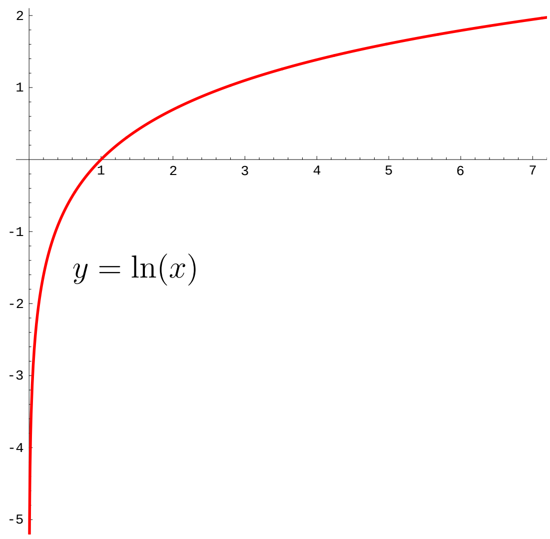
Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng wachsend und hat also eine stetige streng wachsende Umkehrfunktion. Weil $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ ist die Umkehrfunktion definiert auf $\mathbb{R}^+$. Man nennt diese Umkehrfunktion den natürlichen Logarithmus:

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ mit } \ln(x) = \exp^{inv}(x).$$

Man findet

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \text{ für } x \in \mathbb{R}^+.$$





Eine Eigenschaft des Logarithmus, die sich oft verwenden läßt, ist:

Lemma 12.12 *Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Beweis. Man benutzt

$$ab = \exp(\ln(a))\exp(\ln(b)) = \exp(\ln(a) + \ln(b))$$

und nochmals die Umkehrfunktion. ■

Schlußendlich definieren wir noch:

Definition 12.13 *Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $z \in \mathbb{R}$:*

$$a^z = \exp(z \ln a).$$

Man hat

$$\begin{aligned} a^0 &= \exp(0 \ln a) = \exp(0) = 1, \\ a^1 &= \exp(1 \ln a) = \exp(\ln a) = a, \\ a^z a^w &= \exp(z \ln a)\exp(w \ln a) = \exp((z+w)\ln a) = a^{z+w}, \\ a^z b^z &= \exp(z \ln a)\exp(z \ln b) = \exp(z \ln a + z \ln b) = \\ &= \exp(z \ln(ab)) = (ab)^z, \end{aligned}$$

und findet so die alt-bekannten Regeln für Exponentenrechnung zurück und auch, dass diese letzte Definition $z \mapsto a^z$ den schon bekannten Exponenten nicht widerspricht.

12.2.2 Berühmte Umkehrfunktionen II, die zyklometrische Funktionen oder Arcusfunktionen

Der Arcussinus

Der Sinus ist nicht monoton und sogar nicht ein-eindeutig (injektiv). Sie hat also keine Umkehrfunktion. Die sogenannte Inverse die man oft sieht, ist dann auch nicht die Inverse zu $x \mapsto \sin(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sondern eine Umkehrfunktion zu $x \mapsto \sin(x) : \left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right] \to \mathbb{R}$. Diese Einschränkung vom Sinus kann man auch beschrieben durch $\sin_{[-\pi/2;\pi/2]}$. Die Umkehrfunktion dazu ist

$$\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ mit } \arcsin(x) = \left(\sin_{[-\pi/2;\pi/2]}\right)^{inv}(x).$$

Man findet

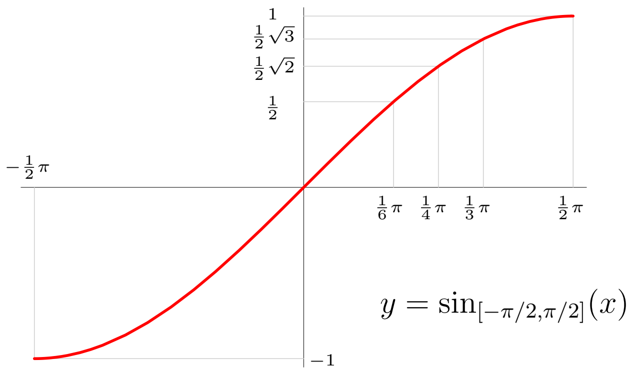
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \text{ für } x \in (-1,1)\,.$$

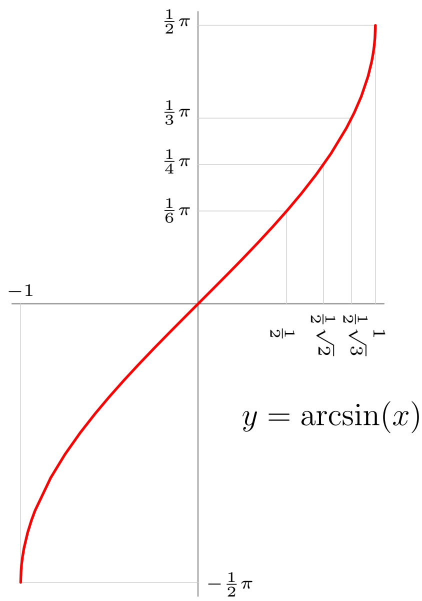
Aus $(\cos(y))^2 + (\sin(y))^2 = 1$ folgt

$$\cos(y) = \pm\sqrt{1 - (\sin(y))^2}.$$

Weil man sich aber beschränkt zu $y \in \left[-\frac{1}{2}\pi; \frac{1}{2}\pi\right]$ gilt sogar $\cos(y) = \sqrt{1 - (\sin(y))^2}$ und folgt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } x \in (-1,1)\,.$$





Der Arcuscosinus

Wie beim Sinus muss man auch die Cosinus Funktion beschränken, insofern es ihr Definitionsgebiet betrifft, wenn man eine Umkehrfunktion haben möchte :

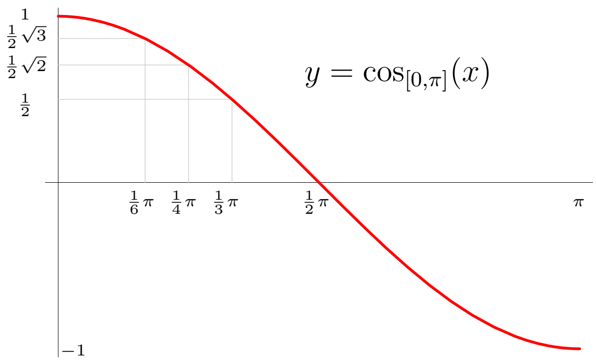
$$\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R} \text{ mit } \arccos(x) = \left(\cos_{[0,\pi]}\right)^{inv}(x).$$

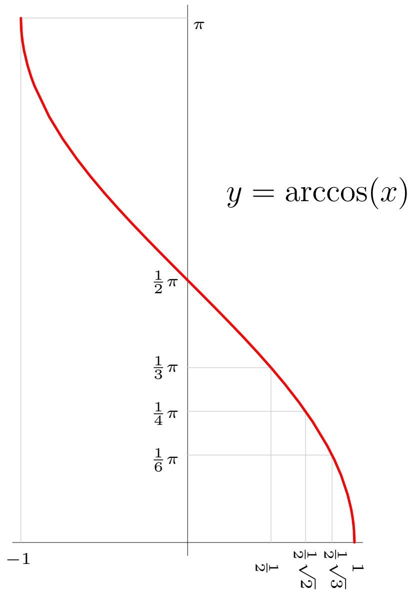
Ähnlich wie beim Arcussinus findet man

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } x \in (-1,1)\,.$$

Dieses Ergebnis folgt übrigens auch aus $\arccos(x) = \frac{1}{2}\pi - \arcsin(x)$ für alle $x \in [-1, 1]$. Das letzte folgt wiederum aus

$$\cos(y) = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - y\right) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$





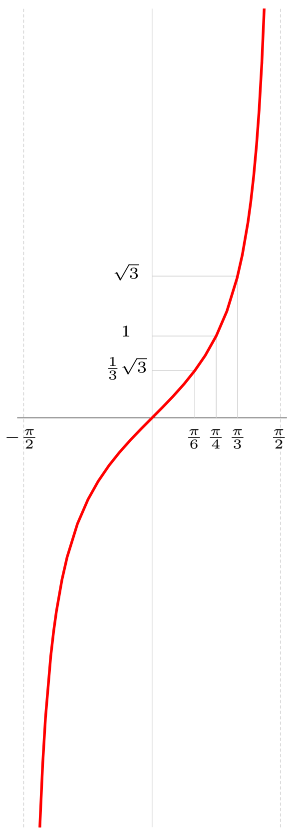
Der Arcustangens

Und ebenso hat der Tangens ein Problem, wenn man sein Definitionsgebiet nicht einschränkt:

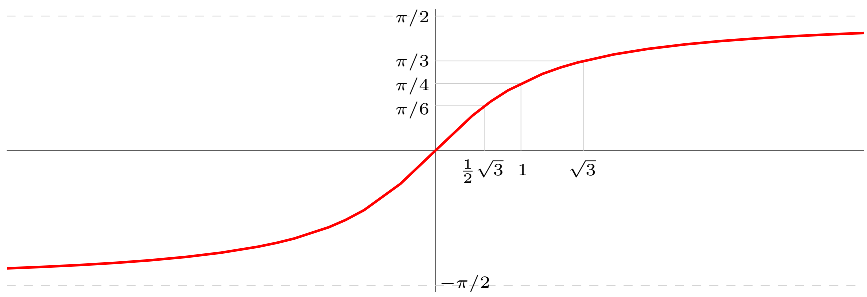
$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \arctan(x) = \left(\tan_{[-\pi/2;\pi/2]}\right)^{inv}(x).$$

Man hat

$$\begin{aligned}
\arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = (\cos(\arctan x))^2 = \\
&= \frac{(\cos(\arctan x))^2}{(\cos(\arctan x))^2 + (\sin(\arctan x))^2} = \\
&= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\arctan x)}{\cos(\arctan x)}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{1 + (\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$



Links $y = \tan_{(-\pi/2,\pi/2)}(x)$ und unten $y = \arctan(x)$.



12.2.3 Berühmte Umkehrfunktionen III, die Areafunktionen

Der Areasinus hyperbolicus

Der Sinus hyperbolicus ist streng wachsend: $x \mapsto \exp(x)$ und $x \mapsto -\exp(-x)$ sind streng wachsend und so auch

$$x \mapsto \sinh(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

Setzen wir $y = \sinh(x)$ und multipliziert man mit $\exp(x)$, dann findet man

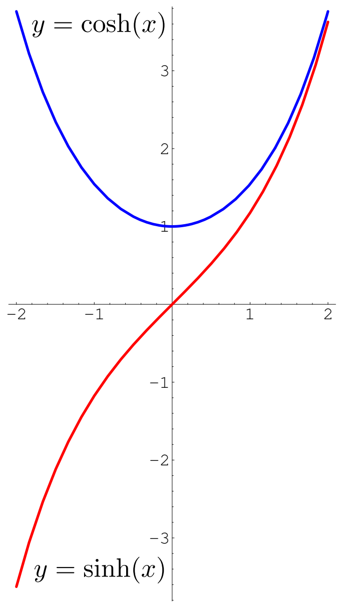
$$2ye^x = (e^x)^2 - 1 \Leftrightarrow (e^x - y)^2 = y^2 + 1 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

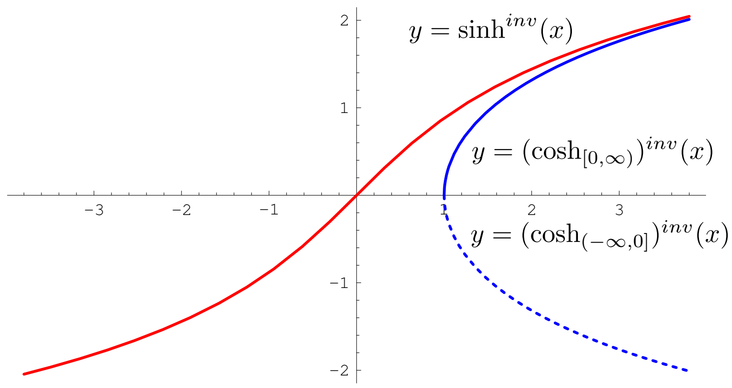
Weil $e^x > 0$ findet man $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ und

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Zusammengefasst wird der Areasinus hyperbolicus in

$$\sinh^{inv} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \sinh^{inv}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$





Der Areacosinus hyperbolicus

Der Cosinus hyperbolicus ist monoton, wenn beschränkt auf $\mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{R}_0^-$. Ebenso wie beim Sinus hyperbolicus hat man

$$\cosh(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

und folgt

$$y = \cosh(x) \Leftrightarrow 2ye^x = (e^x)^2 + 1 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Man definiert den Areacosinus hyperbolicus wie folgt

$$\left(\cosh_{[0,\infty)}\right)^{inv} : [1, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } \left(\cosh_{[0,\infty)}\right)^{inv} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Ebenso

$$\left(\cosh_{(-\infty,0]}\right)^{inv} : [1, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } \left(\cosh_{(-\infty,0]}\right)^{inv} = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Übrigens gilt

$$\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \text{ für } x \geq 1.$$

Der Areatangens hyperbolicus

Der Tangens hyperbolicus ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ und hat horizontale Asymptoten:

$$\begin{aligned} \tanh(x) &\to 1 \quad \text{für} \quad x \to \infty, \\ \tanh(x) &\to -1 \quad \text{für} \quad x \to -\infty. \end{aligned}$$

Setzt man

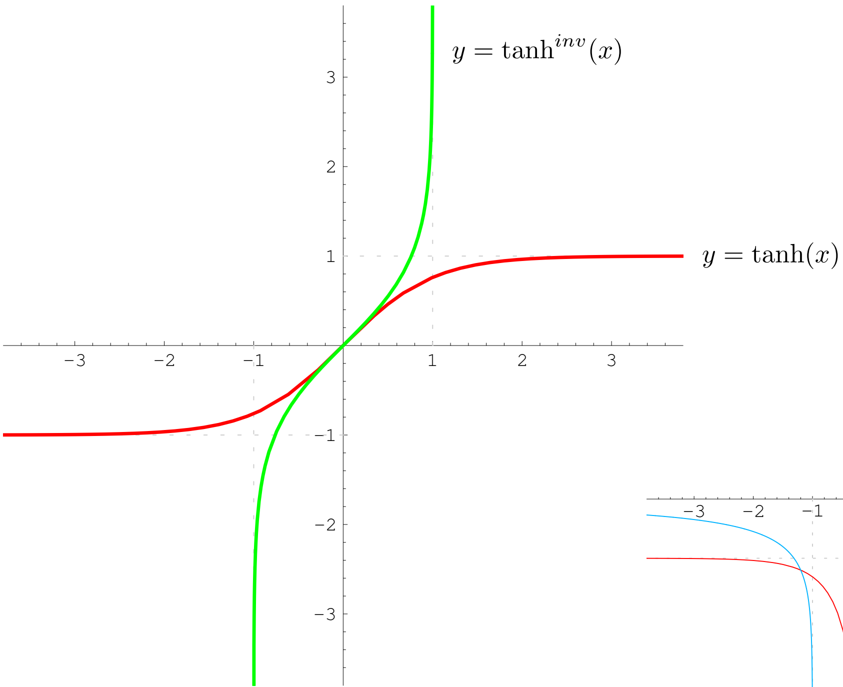
$$y = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

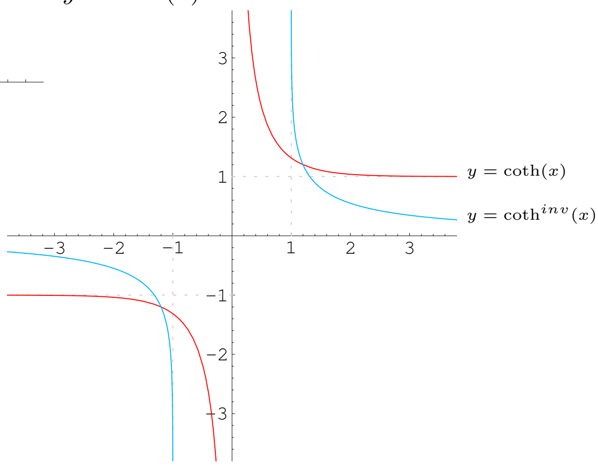
dann kann man diese Gleichung nach x lösen:

$$\begin{aligned} y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(e^x + e^{-x}\right) y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 1 + y = e^{2x}\left(1 - y\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right). \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion zu tanh ist:

$$\tanh^{inv} : (-1,1) \to \mathbb{R} \text{ mit } \tanh^{inv}(x) = \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$





Der Areacotangens hyperbolicus

existiert auch noch. Die Liebhaber dürfen ihn selber studieren.

12.3 Taylorpolynome

Bei der Definition von der Ableitung einer Funktion haben wir gesehen, welches Polynom von Grad kleiner oder gleich 1 “am besten passt”, wenn man eine Funktion $x \mapsto f(x)$ um

a approximieren möchte, nämlich $x \to p_1(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a)$. Mit "am besten" war gemeint

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + (x-a)\, f'(a))}{x-a} = 0.$$

Frage: *Können wir auch ein Polynom p_2 vom Grad kleiner oder gleich 2 finden, so dass*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_2(x)}{(x-a)^2} = 0\ ? \tag{12.2}$$

Das einzige Polynom p_2 vom Grad 2 oder kleiner wo nullte, erste und zweite Ableitungen von f und p_2 für $x = a$ identisch sind, wäre

$$p_2(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \tfrac{1}{2}\,(x-a)^2\, f''(a),$$

denn nur so gilt

$$\begin{array}{rcl} p_2(a) & = & \left[f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{1}{2}\,(x-a)^2\, f''(a)\right]_{x=a} = f(a), \\ p_2'(a) & = & \left[f'(a) + (x-a)\, f''(a)\right]_{x=a} = f'(a), \\ p_2''(a) & = & \left[f''(a)\right]_{x=a} = f''(a). \end{array}$$

Wir werden zeigen, dass wenn f zweimal differenzierbar ist, p_2 tatsächlich so ist, dass die Identität in (12.2) gilt.

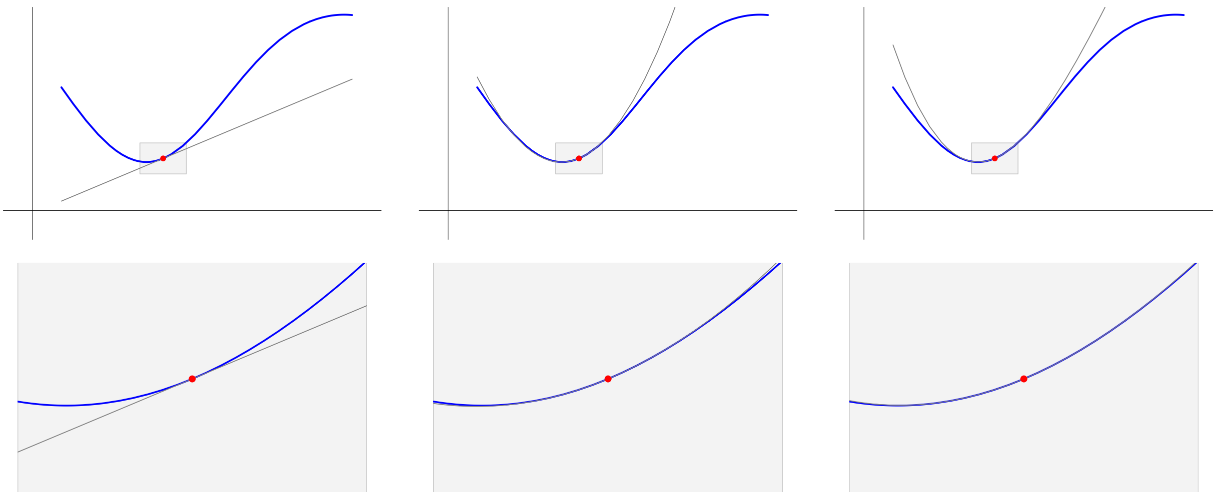
Satz 12.14 (Satz von Taylor) *Sei I ein Intervall, $a \in I^o$ und $n \in \mathbb{N}^+$. Nehme an, die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist n mal differenzierbar in I^o, und setze*

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,. \tag{12.3}$$

Dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Bemerkung 12.14.1 *Das Polynom in (12.3) heißt das n-te Taylorpolynom von f bezüglich der Stelle a.*



$y = f(x)$ und $y = p_1(x)$, $\quad$ $y = f(x)$ und $y = p_2(x)$, $\quad$ $y = f(x)$ und $y = p_3(x)$.

Bemerkung 12.14.2 *Anders formuliert: p_n ist das einzige Polynom vom Grad kleiner gleich n, wobei in der Grafik der vertikale Unterschied zwischen $y = f(x)$ und $y = p_n(x)$ für $x \to a$ schneller nach 0 geht als $|x-a|^n$.*

Korollar 12.15 *Sei I ein Intervall und $a \in I^o$. Nehme an, die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ sind n-mal differenzierbar in I^o und*

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0 \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Falls $g^{(n)}(a) \neq 0$, gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Beweis. Schreiben wir $p_{f,n}$ und $p_{g,n}$ für die n-ten Taylorpolynome von f und g bezüglich der Stelle a. Weil $f^{(k)}(a) = 0$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ hat man $p_{f,n}(x) = \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$ und $p_{g,n}(x) = \frac{1}{n!}(x-a)^n g^{(n)}(a)$. Mit (**??**) hat man

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - p_{f,n}(x) + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)}{g(x) - p_{g,n}(x) + \frac{1}{n!}(x-a)^n g^{(n)}(a)} = \\ &= \frac{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - p_{f,n}(x)}{(x-a)^n} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)}{\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x) - p_{g,n}(x)}{(x-a)^n} + \frac{1}{n!} g^{(n)}(a)} = \frac{0 + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)}{0 + \frac{1}{n!} g^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 12.15.1 *Korollar 12.15 kann man oft statt des Satzes von de l'Hôpital verwenden. Sowohl dieses Korollar als auch der Satz von de l'Hôpital sind mit Vorsicht zu geniessen. Betrachten wir als Beispiel*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$, findet man, wenn man weiss, dass $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ gilt,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\cos(0)}{1} = 1.$$

Woher wissen wir, dass $\sin'(0) = \cos(0) = 1$? Dazu betrachten wir die Ableitung von dem Sinus in 0:

$$\sin'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Also $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, weil $\sin'(0) = 1$, weil $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, weil $\sin'(0) = 1$, weil $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Satz 12.16 (Satz von Taylor mit dem Restglied von Lagrange) *Sei I ein Intervall, $a \in I^o$ und $n \in \mathbb{N}^+$. Nehme an, die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist $n+1$ mal differenzierbar in I^o und sei p_n wie in (12.3). Dann gibt es θ_x zwischen x und a, so dass*

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{12.4}$$

Wir beweisen erst folgendes Lemma:

Lemma 12.17 *Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und f differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es für jede $x \in (a, b)$ einen $\xi_x \in (a, x)$ mit*

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = \frac{f'(\xi_x)}{n(\xi_x - a)^{n-1}}.$$

Beweis von Lemma 12.17. Wir setzen $(x-a)^n = y$ und $g(y) = f(a + \sqrt[n]{y})$. Dann folgt

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = \frac{g(y)-g(0)}{y}.$$

Weil $g : [0,(b-a)^n] \to \mathbb{R}$ stetig ist und g auf $(0,(b-a)^n)$ differenzierbar ist, können wir den Mittelwertsatz anwenden und finden, dass es $c \in (0,y)$ gibt mit

$$\frac{g(y)-g(0)}{y} = g'(c) = f'\left(a+\sqrt[n]{c}\right)\frac{1}{n}c^{\frac{1-n}{n}}.$$

Definieren wir $\xi_x = a + \sqrt[n]{c}$, dann folgt $\xi_x \in (a,x)$ und

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = g'(c) = \frac{f'(\xi_x)}{n\,(\xi_x-a)^{n-1}}.$$

■

Beweis von Satz 12.14. Wenn wir diesen Satz beweisen können für $x > a$, dann folgt via $\tilde{f}(-x) = f(x)$ auch das Ergebnis für $x < a$. Ohne Verlust der Allgemeinheit dürfen wir uns also beschränken auf den Fall $x > a$.

Wenn $x > a$ benutzen wir Lemma 12.17 für $f(x) - p_n(x)$. Weil $f(a) = p_n(a)$ gibt es $x_1 \in (a,x)$, so dass

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n} = \frac{(f(x)-p_n(x))-(f(a)-p_n(a))}{(x-a)^n} = \frac{f'(x_1)-p_n'(x_1)}{n\,(x_1-a)^{n-1}}.$$

Wenn $n > 1$ gibt es, weil $f'(a) = p_n'(a)$ gilt, $x_2 \in (a,x_1)$, so dass

$$\frac{f'(x_1)-p_n'(x_1)}{(x_1-a)^{n-1}} = \frac{(f'(x_1)-p_n'(x_1))-(f'(a)-p_n'(a))}{(x_1-a)^{n-1}} = \frac{f''(x_2)-p_n''(x_2)}{(n-1)\,(x_2-a)^{n-2}}.$$

Wenn $n > 2$ gibt es, weil $f''(a) = p_n''(a)$ gilt, $x_3 \in (a,x_2)$, so dass

$$\frac{f''(x_2)-p_n''(x_2)}{(x_2-a)^{n-2}} = \frac{(f''(x_2)-p_n'(x_2))-(f''(a)-p_n''(a))}{(x_2-a)^{n-2}} = \frac{f''(x_3)-p_n''(x_3)}{(n-2)\,(x_3-a)^{n-3}},$$

usw. Ein gediegener Beweis würde hier vollständige Induktion benutzen.

Nach $n-1$ Schritten haben wir $x_{n-1} \in \mathbb{R}$ gefunden mit

$$a < x_{n-1} < x_{n-2} < \cdots < x_1 < x,$$

so dass

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n} &= \frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots\ 2}\frac{f^{(n-1)}(x_{n-1})-p_n^{(n-1)}(x_{n-1})}{x_{n-1}-a} = \\ &= \frac{1}{n!}\frac{f^{(n-1)}(x_{n-1})-\left(f^{(n-1)}(a)+(x_{n-1}-a)\,f^{n}(a)\right)}{x_{n-1}-a}.\end{aligned} \tag{12.5}$$

Weil $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist in a, gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-\left(f^{(n-1)}(a)+(x-a)\,f^{(n)}(a)\right)}{x-a} = 0$$

und wegen (12.5) also auch

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n}=0.$$

■

Beweis von Satz 12.16. Statt wie im vorhergehenden Beweis werden wir jetzt

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

betrachten. Bemerke, dass im Nenner jetzt die Potenz $n+1$ statt n steht. Ähnlich wie vorher haben wir nach n Schritten einen $\tilde{x}_n\in(a,x)$ gefunden, so dass statt (12.5)

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{f^{(n)}(\tilde{x}_n)-p_n^{(n)}(x_n)}{\tilde{x}_n-a}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{f^{(n)}(\tilde{x}_n)-f^{(n)}(a)}{\tilde{x}_n-a}.$$

In noch einem extra Schritt liefert der Mittelwertsatz die Existenz von $\theta_x\in(a,\tilde{x}_n)$, derart dass

$$\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{f^{(n)}(\tilde{x}_n)-f^{(n)}(a)}{\tilde{x}_n-a}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_x).$$

Diese letzte Identität liefert genau (12.4). ■

12.4 Taylorreihen

Wir haben Potenzreihen verwendet um einige Funktionen einzuführen. Dann kann man sich auch die folgende Frage stellen:

Ist jede Funktion als Potenzreihe zu schreiben?

Die einfache Antwort lautet nein, wenn wir nicht zusätzlich die Bedingung stellen, dass so eine Funktion unendlich oft differenzierbar sein soll. Denn wenn eine Potenzreihe einen positive Konvergenzradius hat, dann ist sie innerhalb von dem dazugehörenden Kreis unendlich oft differenzierbar.

Wenn wir annehmen, dass f unendlich oft differenzierbar ist in a und p_n als in (12.3) nehmen:

$$\begin{aligned}p_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=\\&=f(a)+(x-a)f'(a)+\tfrac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\tfrac{1}{3!}(x-a)^3f'''(a)+\cdots+\tfrac{1}{n!}(x-a)^nf^{(n)}(a),\end{aligned}$$

dann hat man mit Satz 12.16

$$\lim_{n\to\infty}p_n(x)=f(x)\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=0,$$

wobei θ_x zwar existiert und sogar zwischen a und x liegt, aber nicht konstruktiv gegeben ist. Konstruktiv, aber nicht sehr scharf, ist folgendes Ergebnis.

Lemma 12.18 *Sei I ein offenes Interval in $\mathbb{R}$, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Wenn es $c, M \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq c\ M^n \textit{ für alle } x \in I \textit{ und } n \in \mathbb{N},$$

dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x) \textit{ für } x \in I. \tag{12.6}$$

Bemerkung 12.18.1 *Wenn wir die etwas dubiöse Schreibweise bei Reihen benutzen, dann heißt (12.6) genau*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(x) \textit{ für } x \in I. \tag{12.7}$$

Die Reihe in der linken Seite von (12.7) heißt die ***Taylorreihe*** *von f bezüglich der Stelle a.*

Beweis. Wenn $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq c\ M^k$ für alle $x \in I$ und $k \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}\right| \leq \frac{c\ M^{n+1} |x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Wie oben schon bemerkt, liefert Satz 12.16 die Konvergenz. ■

Wir haben jetzt Taylorreihen vorgesetzt bekommen. Aber wir hatten auch schon mal Funktionen, die als Potenzreihe definiert wurden.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f & \rightsquigarrow & \text{Taylorreihe} \\ f & \leftsquigarrow & \text{Potenzreihe} \end{array}}$$

Haben Taylorreihen und Potenzreihen etwas miteinander zu tun?

Die Antwort lautet ja. Wenn f als eine Potenzreihe (mit einem positiven Spektralradius R) definiert ist, sage

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ für } |x-a| < R,$$

dann wissen wir aus Satz 11.15, dass

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k} \text{ für } |x-a| < R,$$

und damit, dass

$$f^{(k)}(a) = c_k k!\ .$$

Die Taylorreihe um $x = a$ für f wird so

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n n!}{n!} (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n .$$

Umgekehrt, wenn die Taylorreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ nach $f(x)$ konvergiert für $x \in (a-\delta, a+\delta)$ und irgendeinen $\delta > 0$, dann ist diese Taylorreihe selbstverständlich formal eine Potenzreihe. Jede Potenzreihe hat einen Konvergenzradius R, der so ist, dass diese Reihe innerhalb vom Radius absolut konvergiert und sie außerhalb divergiert. Damit folgt $R \geq \delta$, also dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \text{ konvergiert für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z-a| < \delta.$$

Ein kleiner Haken verbirgt sich hinter der Bedingung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \text{ konvergiert nach } f(x).$$

Es gibt Taylorreihen, die zwar konvergieren, aber nicht unbedingt nach $f(x)$. Ein Beispiel folgt.

Beispiel 12.19 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist unendlich differenzierbar, denn außerhalb von 0 ist sie die Zusammensetzung bekannter differenzierbarer Funktionen und in 0 verwendet man

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} q_n(\frac{1}{x}) \exp(-x^{-2}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

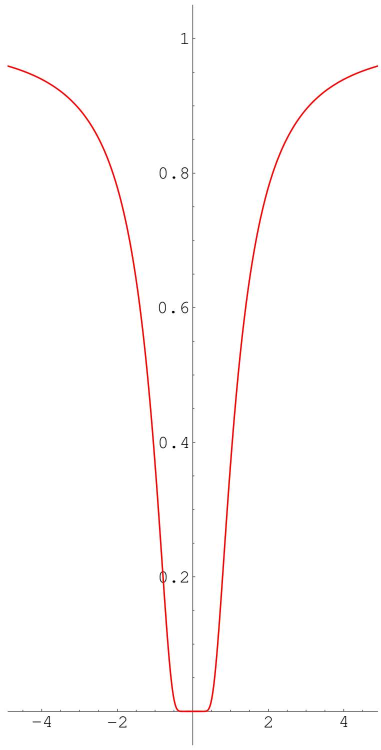
für irgendwelche Polynome q_n vom Grad $3n$, und

$$\lim_{x\to 0} x^{-k} \exp\left(-x^{-2}\right) = \lim_{y\to\infty} \frac{y^{k/2}}{e^y} = 0 \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Jedes Taylorpolynom bezüglich 0 wird so

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0.$$

Es möge deutlich sein, dass die Taylorreihe nicht nach f konvergiert. Ein Bild zu $y = f(x)$ steht hier rechts. Man sieht, dass f bei 0 sehr flach verläuft (aber nicht gleich 0 ist!), obwohl sogar die y-Achse skaliert ist.



Beispiel 12.20 *Hat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2^x$ eine konvergente Taylorreihe bezüglich 0? Mit $2^x = \exp(x \ln 2)$ bekommt man $f^{(n)}(x) = (\ln 2)^n \exp(x \ln 2) = (\ln 2)^n 2^x$ und wird die Taylorreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n. \tag{12.8}$$

Weil für $|x| < K$ gilt

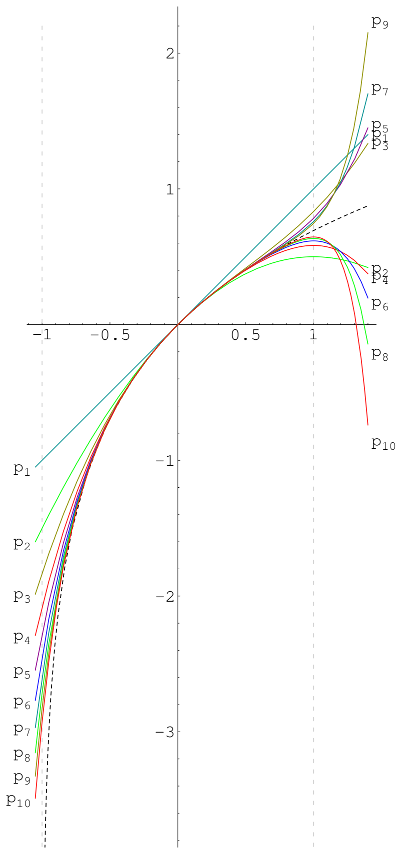
$$\left|f^{(n)}(x)\right| = |(\ln 2)^n 2^x| \leq 2^K (\ln 2)^n$$

konvergiert die Taylorreihe in (12.8) nach 2^x auf jedem Interval $(-K, K)$, also auf $\mathbb{R}$.

Beispiel 12.21 *Wir wollen Taylorpolynome und die Taylorreihe von* $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \ln(1+x)$ *bezüglich der Stelle* 0 *betrachten. Dazu erstmal die Ableitungen:*

n	0	1	2	3	$\ldots$	n
$f^{(n)}(x)$	$\ln(1+x)$	$\dfrac{1}{1+x}$	$\dfrac{-1}{(1+x)^2}$	$\dfrac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}$	$\ldots$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$
$f^{(n)}(0)$	0	1	-1	2	$\ldots$	$(-1)^{n-1}(n-1)!$

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= f(0) = 0\\
p_1(x) &= f(0) + f'(0)x = 0 + x\\
p_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 = 0 + x - \tfrac{1}{2}x^2\\
p_3(x) &= f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(0)x^3 = 0 + x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\\
&\vdots\\
p_n(x) &= \sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}x^k =\\
&= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.
\end{aligned}
$$



Lemma 12.18 können wir nicht benutzen, jedoch hat man direkt

$$
\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^n n!}{(1+\theta_x)^{n+1}}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \left|\frac{x}{1+\theta_x}\right|^{n+1}\frac{1}{n+1}
$$

und dieser Ausdruck geht nach 0 *für* $n \to \infty$ *dann, und nur dann, wenn* $\left|\frac{x}{1+\theta_x}\right| < 1$*. Weil wir nicht wissen wo* θ_x *genau liegt für jedes* n *(denn* θ_x *hängt auch von* n *ab!), bringt diese Bedingung uns wenig weiter, außer dass* $x > -1$ *notwendig ist für Konvergenz und* $-\frac{1}{2} < x < 1$ *reicht für Konvergenz.*
Wenn man vergisst, woher sie kommt und man die Reihe an sich betrachtet, sieht man, dass sie konvergiert für $x \in (-1, 1]$.

Beispiel 12.22 *Wir berechnen*

$$
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\frac{1}{2}x^2 \sin(2x)}.
$$

Dazu verwenden wir die Taylorpolynome:

$$
\begin{aligned}
&\text{für } e^x: && p_n(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots + \tfrac{1}{n!}x^n,\\
&\text{für } \ln(1+x): && p_n(x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots + \tfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\\
&\text{für } \sin(x): && p_{2n+1}(x) = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \cdots + \tfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.
\end{aligned}
$$

Für $f(x) = e^x - 1 + \ln(1-x)$ *gilt*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + x^4R_1(x)\right) - 1 - \left(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + x^4R_2(x)\right)\\
&= -\tfrac{1}{6}x^3 + x^4R_3(x),
\end{aligned}
$$

und für $g(x) = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x)$ gilt

$$\tfrac{1}{2}x^2 \sin(2x) = x^3 + x^5 R_4(x).$$

Hier sind R_i irgendwelche Funktionen, die definiert sind als konvergente Potenzreihen um $x = 0$. Es reicht, um zu wissen, dass die dazu gehörende Konvergenzradien vererbt werden. Das heißt, für $R_1(.)$ (von exp*) und $R_4(.)$ (von* sin*) sind die Konvergenzradien ∞. Für $R_2(.)$ (von $x \to \ln(1+x)$) und $R_3(.)$ (das Minimum von denen zu $R_1(.)$ und $R_3(.)$) sind die Konvergenzradien gleich 1. Wir finden so:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\frac{1}{2}x^2 \sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + x^4 R_3(x)}{x^3 + x^5 R_4(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + x\ R_3(x)}{1 + x^2\ R_4(x)} = \frac{-\frac{1}{6} + \lim\limits_{x\to 0} x\ R_3(x)}{1 + \lim\limits_{x\to 0} x^2\ R_4(x)} = -\frac{1}{6}.$$

Übrigens brauchen wir für dieses Ergebnis nicht mal Taylorreihen. Wenn man gut hinschaut, sieht man, dass Korollar 12.15 reicht.

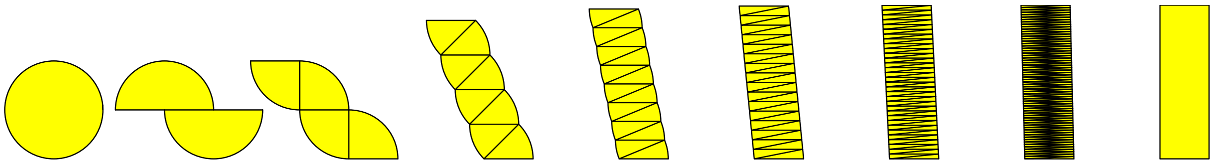
Analysis 1, Woche 13

Integralrechnung I

13.1 Motivation

Bevor wir auf eine mehr fundamentelle Weise Integrale betrachten werden, schauen wir uns mal an, was wir eigentlich möchten. In erster Instanz handelt es sich bei Integralen um Längen, Oberflächen, Inhalte und verwandte Sachen. Dafür möchten wir vernünftige mathematisch definierte Begriffe haben.

Ein Beispiel dazu ist der Flächeninhalt von einer Kreisscheibe mit Radius 1. Wenn man davon ausgeht, dass ein Rechteck mit Seitenlängen a und b den Flächeninhalt ab hat, dann lautet die Frage: wie können wir den Flächeninhalt von dieser Kreisscheibe damit vergleichen. Diese Quadratur des Kreises hat die Mathematik längere Zeit beschäftigt.



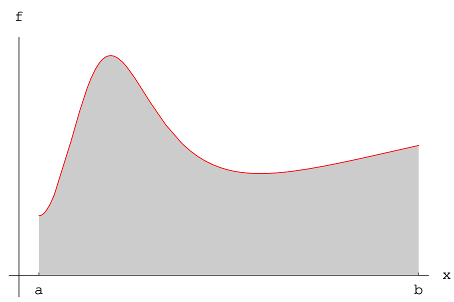
Solche Bilder lassen einen schnell davon überzeugen, dass der Flächeninhalt wohl π sein wird, aber sogar dieser geometrische "Beweis" braucht $\lim_{x \downarrow 0} \sin(x)/x = 1$. Wieso wäre sonst die Länge von der längsten Seite des Rechtecks gleich π? Die Zahl π ist festgelegt als die Länge vom halben Einheitskreis. Damit ist die Höhe von jedem dieser Gebilde, als n mal die Höhe des n-ten Teils von einem halben Einheitskreis, gleich $n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Aus $\lim_{x \downarrow 0} \sin(x)/x = 1$ folgt, weil $\frac{\pi}{n} \downarrow 0$ für $n \to \infty$, dass

$$\lim_{n\to\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \pi, \quad \text{weil } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Mehr allgemeiner sind wir interessiert an dem Flächeinhalt von einem zwei-dimensionalen Gebiet beschrieben durch

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\right\} \tag{13.1}$$

mit f einer positiven Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ derart, dass $a < b$.



Wir listen mal einige Eigenschaften auf, die wir haben möchten.

- Wenn f eine konstante Funktion ist, wollen wir den Flächeninhalt wie beim Rechteck haben. Für $f(x) = h \geq 0$ wäre das
$$A = h\,(b-a)\,. \tag{13.2}$$

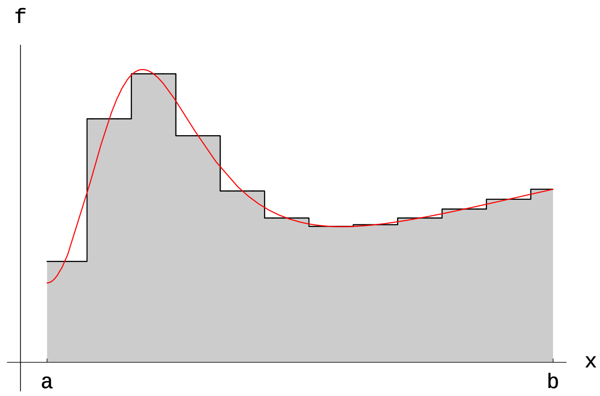
- Auch für eine Funktion, die (nicht-stetig!) definiert ist durch $f(x) = h_1 \geq 0$ für $x \in [a, x_1]$ und $f(x) = h_2 \geq 0$ für $x \in (x_1, b]$ wenn $x_1 \in (a, b)$, kann man den Flächeninhalt in (13.1) berechnen
$$A = h_1\,(x_1 - a) + h_2\,(b - x_1)$$
Mehr allgemeiner, wenn es $\{x_i\}_{i=1}^n \subset (a, b)$ gibt mit $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, wollen wir
$$A = A_0 + A_1 + \cdots + A_n, \tag{13.3}$$
wenn A_i der Flächeninhalt von $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x_1 \leq x \leq x_{i+1} \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\}$ ist, wobei wir $a = x_0$ und $b = x_{n+1}$ gesetzt haben.

- Auch wollen wir, dass wenn $g(x) \geq f(x)$ für $x \in [a, b]$ gilt, für die dazu gehörende Flächeninhalten gilt
$$A_g \geq A_f. \tag{13.4}$$

13.2 Riemann-Integrale

13.2.1 Definition für Treppenfunktionen

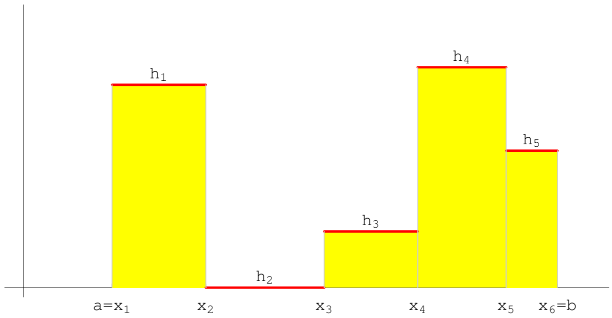
Für rechtwinklige Gebiete kann man die Oberfläche in Rechtecke teilen und so die gesamte Fläche berechnen. Für andere Gebiete können wir versuchen, die Fläche in (13.1) mit Rechtecken zu approximieren.



Dazu werden wir erst das Integral definieren für sogenannten Treppenfunktionen.

Definition 13.1 *Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt eine Treppenfunktion, wenn es $\{x_i\}_{i=1}^{n+1} \subset \mathbb{R}$ gibt mit*
$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$$
und $\{h_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, so dass
$$\begin{aligned} f(x) &= h_i \text{ für } x \in (x_i, x_{i+1}) \text{ und } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\,, \\ f(x) &= 0 \text{ für } x < x_1 \\ f(x) &= 0 \text{ für } x > x_{n+1}. \end{aligned}$$

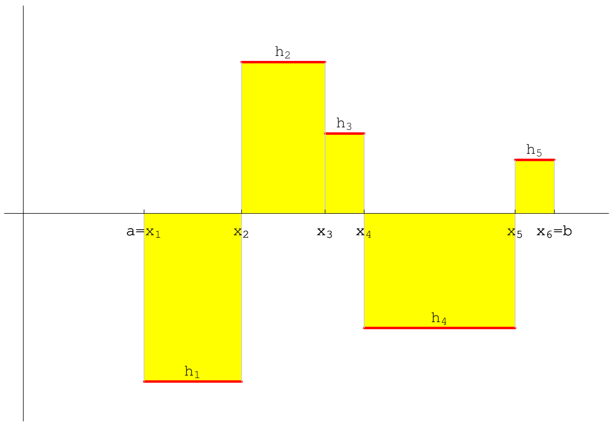
Bemerkung 13.1.1 *Man bemerke, dass f nicht festgelegt wird für $x \in \{x_i\}_{i=1}^{n+1}$. Wichtig ist aber, dass diese Menge nur endlich viele Stellen enthält. Die Menge $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ heißt eine Zerlegung von $[a,b]$.*



Definition 13.2 *Sei f eine Treppenfunktion wie in Definition 13.1. Dann setzen wir*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)\, h_i. \tag{13.5}$$

Bemerkung 13.2.1 *Wir haben vorhin von Flächeninhalten geredet und positive Funktionen betrachtet. In Definition 13.2 sind auch negative Werte h_i erlaubt und dann ist "Flächeninhalt" nicht länger zutreffend.*



Proposition 13.3 *Wenn $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ alle beide Treppenfunktionen sind und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist auch $\lambda f + \mu g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Wenn $\{s_i\}_{i=1}^{n+1}$ eine Zerlegung für f und $\{t_i\}_{i=1}^{m+1}$ eine Zerlegung für g ist, kombiniere man diese beiden Mengen zu einer neuen Zerlegung, die sowohl für f als auch für g passt. Der Rest ist elementare Buchführung. ■

Proposition 13.4 *Wenn $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ alle beide Treppenfunktionen sind und $f(x) \leq g(x)$ auf $[a,b]$, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Man benutzt Proposition 13.3 mit $\lambda = -1$ un $\mu = 1$:

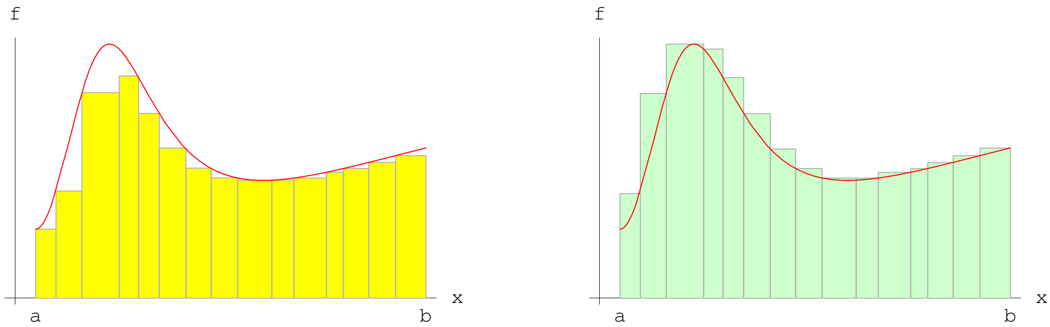
$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$$

und $g(x) - f(x) \geq 0$ liefert nicht-negative "Höhen" h_i in (13.5) und es folgt, dass $\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx \geq 0$. ■

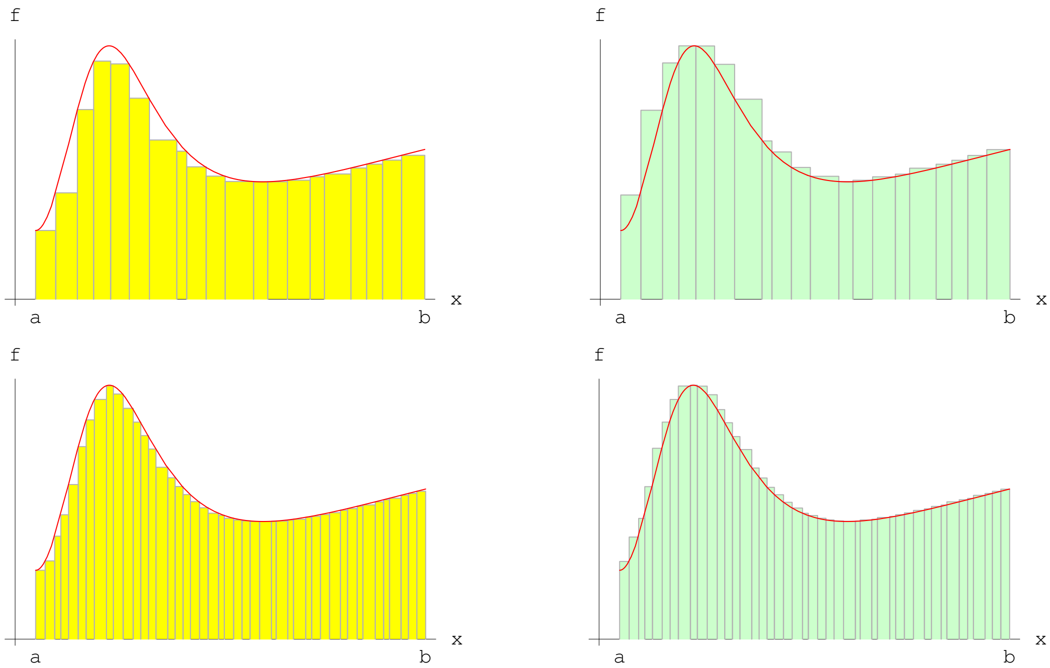
13.2.2 Definition für mehr allgemeine Funktionen

Wenn man den Flächeninhalt wie in dem Bild im Paragraphen 13.2.1 approximieren möchte, hat man nicht im Griff, wie nahe man heran kommt. In dieser grauen Zone liegt sowohl etwas drüber als auch unterhalb von dem Graphen. Die Lösung dafür ist, nicht eine Approximierung wie in diesem Bild zu machen, sondern sowohl eine Approximierung von oben als auch eine Approximierung von unten zu machen. Für die Flächeninhalte würde man "geometrisch" sagen:

$$A_{\text{untere Treppe}} \leq A_{\text{Funktion}} \leq A_{\text{obere Treppe}}.$$



Wenn man die Treppenstufen noch etwas schmäler macht, würde man erwarten, dass eine bessere Approximierung rauskäme.



Diese Idee werden wir verfolgen und diese geometrischen Überlegungen handfest machen. Dazu brauchen wir Unter- und Obersummen.

Definition 13.5 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

- *Dann heißt $m \in \mathbb{R}$ eine* ***Untersumme*** *bezüglich f auf $[a,b]$, wenn es eine Treppenfunktion $h_{unten} : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, mit*

$$h_{unten}(x) \leq f(x) \text{ für } x \in [a,b] \text{ und } \int_a^b h_{unten}(x)dx = m.$$

- *Dann heißt $M \in \mathbb{R}$ eine **Obersumme** bezüglich f auf $[a,b]$, wenn es eine Treppenfunktion $h_{oben} : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, mit*

$$f(x) \leq h_{oben}(x) \text{ für } x \in [a,b] \text{ und } \int_a^b h_{oben}(x)dx = M.$$

Lemma 13.6 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei m und M respektive eine Unter- und eine Obersumme bezüglich f auf $[a,b]$. Dann gilt $m \leq M$.*

Beweis. Seien h_{unten} und h_{oben} die Treppenfunktionen die m und M liefern. Dann gilt

$$h_{\text{unten}}(x) \leq f(x) \leq h_{\text{oben}}(x)$$

und wegen Proposition 13.4 folgt

$$m = \int_a^b h_{\text{unten}}(x)dx \leq \int_a^b h_{\text{oben}}(x)dx = M.$$

Damit bekommt man das gewünschte Ergebnis. ■

Dieses Lemma zeigt, dass jede Untersumme eine untere Schranke gibt für die Menge aller Obersummen. Ebenso, liefert jede Obersumme eine obere Schranke für die Menge aller Untersummen. Weil jede nicht-leere, nach unten beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ein Infimum hat, und weil jede nicht-leere, nach oben beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ein Supremum hat, ist die folgende Definition gestattet.

Definition 13.7 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und seien m und M respektive eine Unter- und eine Obersumme bezüglich f auf $[a,b]$.*

- *Man definiert das **obere Integral** von f auf $[a,b]$ durch*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \{M \in \mathbb{R}; M \text{ ist eine Obersumme bezüglich } f \text{ auf } [a,b]\}.$$

- *Man definiert das **untere Integral** von f auf $[a,b]$ durch*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup \{m \in \mathbb{R}; m \text{ ist eine Untersumme bezüglich } f \text{ auf } [a,b]\}.$$

- *Falls oberes Integral und unteres Integral existieren in $\mathbb{R}$ und $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, dann heißt f **Riemann-integrierbar** auf $[a,b]$.*
  *Dann definiert man das **Integral** von f auf $[a,b]$ durch*

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Bemerkung 13.7.1 *Weil für jede Untersumme m und Obersumme M bezüglich f auf $[a,b]$ gilt $m \leq M$, folgt*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{13.6}$$

Bemerkung 13.7.2 *Eine Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *heißt Riemann-integrierbar, falls* $\operatorname{Re} f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $\operatorname{Im} f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar sind. Man setzt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)dx.$$

Die erste Frage, die man sich stellen sollte, wäre, ob diese neue Definition des Integrals mit der für Treppenfunktionen übereinstimmt.

Sei f eine Treppenfunktion mit "Treppenintegral" $t = \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) h_i$. Weil f eine Treppenfunktion ist, ist t sowohl Unter- als auch Obersumme für f bezüglich $[a, b]$ und man hat

$$t \leq \sup \{\text{Untersummen}\} \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \inf \{\text{Obersummen}\} \leq t.$$

Diese Frage lässt sich also bejahen.

Als nächstes wollen wir mal schauen, ob die gewünschten Eigenschaften tatsächlich gelten.

Satz 13.8 *Sei* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und nehmen wir an* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. *Angenommen* f *und* g *sind integrierbar auf* $[a, b]$. *Dann ist* $\lambda f + \mu g$ *integrierbar auf* $[a, b]$ *für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *und*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx. \tag{13.7}$$

2. *Sei* $c \in (a, b)$. *Es gilt:* f *auf* $[a, b]$ *ist integrierbar, dann und nur dann, wenn* f *auf* $[a, c]$ *und* f *auf* $[c, b]$ *integrierbar sind. Ausserdem gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{13.8}$$

3. *Wenn* f *und* g *integrierbar sind auf* $[a, b]$ *und* $f(x) \leq g(x)$ *gilt für* $x \in [a, b]$, *dann gilt auch*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{13.9}$$

Beweis. 1. Wenn $\lambda \geq 0$ und $\mu \geq 0$, dann kann man zu jedem Paar Obersummen M_f von f und M_g von g bezüglich $[a, b]$ eine gemeinsame Zerlegung zusammensetzen und eine Treppenfunktion zu $\lambda f + \mu g$ konstruieren mit der Obersumme $\lambda M_f + \mu M_g$. Ebenso benutzt man Untersummen und bekommt

$$\lambda m_f + \mu m_g \leq \underline{\int_a^b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \leq \overline{\int_a^b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \leq \lambda M_f + \mu M_g.$$

Nimmt man das Infimum von M_f und von M_g, findet man

$$\overline{\int_a^b} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \leq \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Auf ähnliche Art liefert das Supremum von m_f und von m_g, dass

$$\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx \le \underline{\int}_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx,$$

und weil so das obere Integral gleich dem unteren ist, ist man fertig.

Wenn $\lambda \ge 0$ und $\mu < 0$ geht man auf eine ähnliche Weise vor, aber vertauscht m_g und M_g: wenn M_g eine Obersumme bezüglich f auf $[a,b]$ ist, dann ist $-M_g$ eine Untersumme bezüglich $-g$ auf $[a,b]$. So hat man

$$\lambda m_f + \mu M_g \le \underline{\int}_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \le \overline{\int}_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \le \lambda M_f + \mu m_g,$$

und bekommt

$$\overline{\int}_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx \le \lambda \overline{\int}_a^b f(x)dx + \mu \underline{\int}_a^b g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx,$$

usw.

2. ($\Rightarrow$) Wenn h_o (h_u) eine Treppenfunktion ist, die auf $[a,b]$ oberhalb (unterhalb) von f liegt, dann ist $h_{o|[a,c]}$ ($h_{uo|[a,c]}$) eine Treppenfunktion, die auf $[a,c]$ oberhalb (unterhalb) von f liegt. So hat man schon eine endliche Ober- und Untersumme bezüglich f auf $[a,c]$. Man bekommt sogar, nachdem man c in die Zerlegung einfügt, dass

$$\begin{aligned}\int_a^c h_{o|[a,c]}(x)dx - \int_a^c h_{u|[a,c]}(x)dx &= \int_a^c \left(h_{o|[a,c]}(x) - h_{u|[a,c]}(x)\right) dx \le \\ \le \int_a^b (h_o(x) - h_u(x))\, dx &= \int_a^b h_o(x)dx - \int_a^b h_u(x)dx. \end{aligned} \tag{13.10}$$

Dann folgt aus (13.10), wenn wir das Infimum über alle solche h_o nehmen, dass

$$\begin{aligned}\overline{\int}_a^c f(x)dx - \int_a^c h_{u|[a,c]}(x)dx &\le \inf_{h_0} \left\{\int_a^c h_{o|[a,c]}(x)dx\right\} - \int_a^c h_{u|[a,c]}(x)dx \overset{(13.10)}{\le} \\ \le \inf_{h_0} \left\{\int_a^b h_{o|[a,c]}(x)dx\right\} - \int_a^b h_{u|[a,c]}(x)dx &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b h_{u|[a,c]}(x)dx. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Das Supremum über passende h_u liefert mit (13.11), dass

$$\begin{aligned}\overline{\int}_a^c f(x)dx - \underline{\int}_a^c f(x)dx &\le \overline{\int}_a^c f(x)dx - \sup_{h_u} \left\{\int_a^c h_{u|[a,c]}(x)dx\right\} \overset{(13.11)}{\le} \\ \le \int_a^b f(x)dx - \sup_{h_u} \left\{\int_a^b h_{u|[a,c]}(x)dx\right\} &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = 0 \end{aligned}$$

und mit (13.6) folgt

$$\overline{\int}_a^c f(x)dx = \underline{\int}_a^c f(x)dx,$$

und so die Integrierbarkeit. Ähnlich geht man vor auf $[c,b]$.

($\Leftarrow$) Diese Richtung ist mehr geradeaus. Man kombiniert eine Treppenfunktion h_1 oberhalb von f auf $[a,c]$ mit einer Treppenfunktion h_2 oberhalb von f auf $[c,b]$ und benutzt, dass (13.8) gilt für Treppenfunktionen:

$$\overline{\int}_a^b f(x)dx \le \int_a^c h_1(x)dx + \int_c^b h_2(x)dx.$$

Nimmt man rechts das Infimum, dann erreicht man

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ähnlich bekommt man

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \geq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

und das Ergebnis folgt mit der Abschätzung (13.6). Gleichzeitig hat man jetzt (13.8) bewiesen.

3. Jede Obersumme M_g bezüglich g auf $[a,b]$ ist eine Obersumme bezüglich f auf $[a,b]$. Mit $m_f \leq M_g$ findet man $\sup m_f \leq M_g$ und anschließend

$$\int_a^b f(x)dx = \sup m_f \leq \inf M_g = \int_a^b g(x)dx.$$

■

13.3 Integrierbare Funktionen

Proposition 13.9 *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

- *Es existiert eine Obersumme in $\mathbb{R}$ bezüglich f auf $[a,b]$, dann und nur dann, wenn f nach oben beschränkt ist auf $[a,b]$.*
- *Es existiert eine Untersumme in $\mathbb{R}$ bezüglich f auf $[a,b]$, dann und nur dann, wenn f nach unten beschränkt ist auf $[a,b]$.*

Beweis. Wenn f nach oben beschränkt ist, sagen wir $f(x) \leq K$, dann ist $K(b-a)$ eine Obersumme. Wenn M eine Obersumme ist, dann gibt es eine Treppenfunktion h mit endlich vielen 'Stufen' h_i, passend zu der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$, und

$$f(x) \leq h(x) \leq K := \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq n} h_i, \max_{0 \leq i \leq n+1} h(x_i) \right\}.$$

Man bemerke, dass diese Maximum existiert, weil es endlich viele Termen hat. ■

Bemerkung 13.9.1 *Bemerke, dass $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bedeutet, dass für jede $x \in [a,b]$ gilt $f(x) \in \mathbb{R}$. Also $\pm\infty$ können nicht als Bild auftreten. Das heißt selbstverständlich nicht, dass f auf $[a,b]$ beschränkt sein muss. Wenn wir aber f Riemann-integrierbar haben möchten, dann sagt diese Proposition, dass Beschränkheit notwendig ist.*

Proposition 13.10 *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*
Die Funktion f ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, dann und nur dann, wenn es für jede $\varepsilon > 0$ eine Obersumme $M \in \mathbb{R}$ und eine Untersumme $m \in \mathbb{R}$ bezüglich f auf $[a,b]$ gibt mit $M - m < \varepsilon$.

Beweis. ($\Rightarrow$) Für jede $\varepsilon > 0$ gibt es eine Obersumme $M \in \mathbb{R}$ mit $\int_a^b f(x)dx > M - \frac{1}{2}\varepsilon$ und eine Untersumme $m \in \mathbb{R}$ mit $\int_a^b f(x)dx < m + \frac{1}{2}\varepsilon$.

($\Leftarrow$) Weil eine Obersumme M_1 und eine Untersumme m_1 in $\mathbb{R}$ existieren (das heißt: endlich sind), ist die Menge der Obersummen nach unten und die Menge der Untersummen nach oben beschränkt. Das heißt

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{M \text{ Obersumme}\} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{m \text{ Untersumme}\} \in \mathbb{R}.$$

Außerdem haben wir angenommen, dass es für jede $\varepsilon > 0$ eine Obersumme M_ε und eine Untersumme m_ε gibt derart, dass

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \le M_\varepsilon - m_\varepsilon < \varepsilon$$

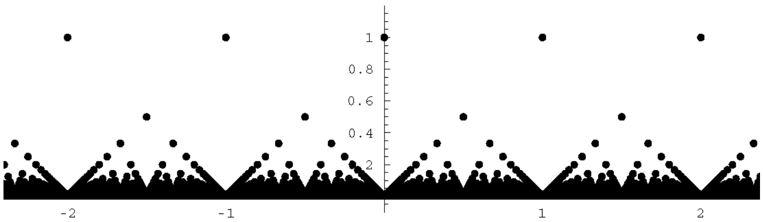
Weil diese Ungleichung gilt für jede $\varepsilon > 0$, haben oberes und unteres Integral den gleichen Wert und folgt so, dass f integrierbar ist. ∎

Wir betrachten die Funktion in Beispiel (9.19).

Beispiel 13.11 *Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{wenn } x = \frac{n}{m} \text{ mit } n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}^+ \text{ und } \operatorname{ggT}(|n|, m) = 1, \\ 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist nicht stetig auf jedem Intervall. Diese Funktion ist aber Riemann-integrierbar auf jedem Intervall. Hier steht nochmals eine Skizze zu dieser Funktion:



Weil diese Funktion periodisch ist, ist sie auf jedem beschränkten Intervall $[a, b]$ integrierbar, wenn sie es ist auf $[0, 1]$. Wer werden uns die Integrierbarkeit auf $[0, 1]$ anschauen.

Die Funktion $h_u(x) = 0$ ist eine Treppenfunktion mit $h_u(x) \le f(x)$. Damit findet man

$$0 \le \int_0^1 h_u(x)dx \le \underline{\int_0^1} f(x)dx.$$

Sei jetzt $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Man ordnet die Menge

$$Q_k = \left\{\frac{n}{m};\ \text{mit } 0 \le n \le m \le k \text{ und } n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^+\right\}$$

zu einer Zerlegung und definiert

$$h_{o,k}(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } x \notin Q_k, \\ 1 & \text{falls } x \in Q_k. \end{cases}$$

Dann ist $h_{o,k}(x)$ für jede $k \in \mathbb{N}^+$ eine Treppenfunktion (mit endlich vielen Stufen!) und es gilt $f(x) \le h_{o,k}(x)$. So findet man

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx \le \inf_{k\in\mathbb{N}^+} \int_0^1 h_{o,k}(x)dx = \inf_{k\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{k} = 0.$$

Weil das obere Integral und das untere übereinstimmen, ist f integrierbar auf $[0, 1]$.

Beispiel 13.12 *Die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit*

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } x>0,\\ 0 & \text{für } x=0,\end{cases}$$

erfüllt auf $[0,1]$ nicht die Bedingungen aus Definition 13.7, denn die einzig mögliche Obersumme wäre ∞. Weil man für die Zerlegung bei einer zugelassenen Treppenfunktion das Intervall nur in endlich viele Stücke teilen darf, gibt es ein Intervall $(0,\delta)$ mit $\delta>0$. Die einzige Treppenstufe die da passen würde, hätte unendliche Höhe. Dieses Ergebnis ist unbefriedigend und wir werden später sogenannte 'uneigentliche Riemannintegrale' definieren.

Beispiel 13.13 *Die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit*

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{falls } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{falls } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$$

erfüllt auf $[0,1]$ auch nicht die Bedingungen aus Definition 13.7. Jetzt existieren zwar endliche Obersummen (und Untersummen), aber man findet

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx=0 \text{ und } \overline{\int_0^1} f(x)dx=1.$$

Hier wird das uneigentliche Riemannintegral nicht helfen. Weil die Menge weg von 0 doch ziemlich dünn ist (abzählbar), möchte man die eigentlich ausschließen. Beim Lebesgue-Integral, dass wir (viel) später anschauen werden, passiert das.

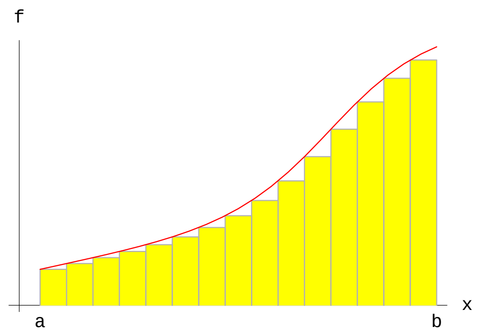
Satz 13.14 *Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar.*

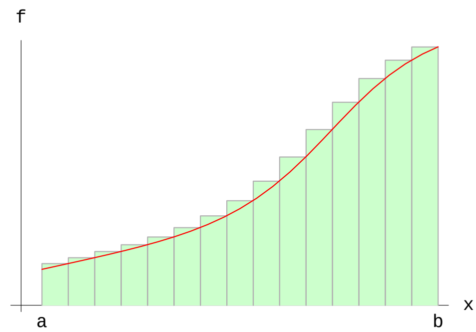
Beweis. Es reicht, wenn wir annehmen f ist wachsend. Erst klären wir mal, dass es eine endliche Obersumme und Untersumme hat. Weil f wächst, ist $(b-a)\,f(b)$ eine Obersumme und $(b-a)\,f(a)$ eine Untersumme.

Wenn wir zeigen können, dass es zu jeder $\varepsilon>0$ eine Obersumme M und eine Untersumme m gibt derart, dass $M-m<\varepsilon$, dann hat man, dass f auf $[a,b]$ integrierbar ist. Wir wählen nun $k\in\mathbb{N}$, derart dass

$$(b-a)\,(f(b)-f(a))<k\varepsilon,$$

und betrachten die Zerlegung $\left\{a+\frac{n}{k}(b-a)\right\}_{n=0}^{k}$.





Auf dem Intervall $\left[a+\frac{n}{k}(b-a),a+\frac{n+1}{k}(b-a)\right]$ gilt

$$f\left(a+\tfrac{n}{k}(b-a)\right)\le f(x)\le f\left(a+\tfrac{n+1}{k}(b-a)\right)$$

und wenn man genau diese Werte benutzt für eine Treppenfunktion $h_u\le f$ und für eine Treppenfunktion $h_o\ge f$, hat man

- eine Untersumme $\int_a^b h_u(x)dx = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b-a}{k} f\left(a + \frac{n}{k}(b-a)\right)$, und

- eine Obersumme $\int_a^b h_o(x)dx = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{b-a}{k} f\left(a + \frac{n+1}{k}(b-a)\right) = \sum_{n=1}^{k} \frac{b-a}{k} f\left(a + \frac{n}{k}(b-a)\right)$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b h_o(x)dx - \int_a^b h_u(x)dx &= \tfrac{b-a}{k} f\left(a + \tfrac{k}{k}(b-a)\right) - \tfrac{b-a}{k} f\left(a + \tfrac{0}{k}(b-a)\right) = \\ &= \tfrac{b-a}{k}\left(f(b) - f(a)\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir bekommen

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$$

und weil das für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt, gleicht das obere Integral dem unteren. ∎

Korollar 13.15 *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die stückweise monoton ist. Dann ist f auf $[a, b]$ integrierbar.*

Bemerkung 13.15.1 *Die Funktion f heißt stückweise monoton auf $[a, b]$, wenn es eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ gibt derart, dass $f_{|[x_i,x_{i+1}]}$ für $i \in \{0, n\}$ monoton ist.*

Beweis. Benutze n-mal Satz 13.8,2 und Satz 13.14. ∎

13.4 Stetigkeit auf $[a, b]$ liefert Integrierbarkeit.

Der Titel dieses Abschitts enthält explizit ein abgeschlossenes Intervall. Wir werden zeigen, dass man diese Bedingung braucht.

Korollar 13.15 reicht dafür nicht, denn eine Funktion wie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \tag{13.12}$$

ist stetig, aber nicht stückweise monoton. Weil die Menge der stetigen Funktionen noch viel mehr komische Genossen enthält, ist ein Beweis von der Behauptung im Titel des Paragraphen nicht einfach. Wir brauchen vorher den Begriff gleichmäßig stetig.

Definition 13.16 *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** auf I, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle $x, y \in I$ gilt:*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Bemerkung 13.16.1 *Wenn man diese Definition zum ersten Mal liest, dann wundert man sich, wo jetzt der Unterschied zu der Definition von gewöhnlicher Stetigkeit liegt. Wir fassen nochmals zusammen:*

- *$f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig auf I heißt:*

$$\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in I : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{13.13}$$

- *$f : I \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig auf I heißt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \ \forall y \in I : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{13.14}$$

Bei gewöhnlicher Stetigkeit ist es erlaubt, dass δ nicht nur von ε, sondern auch von x abhängt. Bei gleichmäßiger Stetigkeit muss für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existieren, welches zu allen x passt.

Beispiel 13.17 *Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig aber nicht gleichmäßig stetig. Stetigkeit soll klar sein. Nicht gleichmäßig stetig ist die Verneinung von (13.14), das heißt*

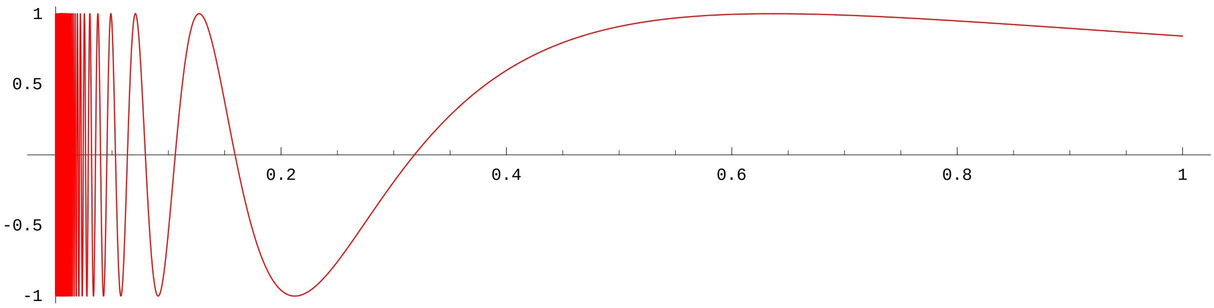
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in I \ \exists y \in I : (|x-y| < \delta \text{ und } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon). \tag{13.15}$$

Nimm $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dann hat es für jede $\delta > 0$ ein $n \in \mathbb{N}^+$, mit

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta \text{ und } \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = 1 \geq \varepsilon.$$

Das heißt, $x = \frac{1}{n}$ und $y = \frac{1}{n+1}$ erfüllen die Bedingung (13.15) zu "nicht gleichmäßig stetig".

Beispiel 13.18 *Die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist stetig und beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig.*



Um zu zeigen, dass sie stetig ist in $x \in (0,1]$, muss man für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ (also $\delta = \delta_{\varepsilon,x}$) finden, so dass für alle $y \in (0,1]$ mit $|y-x| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Das klappt, weil f die Zusammensetzung zweier stetigen Funktionen ist (denn $x \neq 0$). Man kann auch direkt finden, dass

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \overset{\text{Mittelwertsatz}}{\leq} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{xy} \tag{13.16}$$

und damit, dass $\delta_{\varepsilon,x} = \min\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}x^2\varepsilon\right)$ passt. Für $|x-y| < \frac{1}{2}x$ gilt

$$y > \frac{1}{2}x, \tag{13.17}$$

und kombiniert man (13.16), (13.17) und $|x-y| < \frac{1}{2}x^2\varepsilon$, folgt

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq \frac{|y-x|}{xy} < \frac{|x-y|}{\frac{1}{2}x^2} < \frac{\frac{1}{2}x^2\varepsilon}{\frac{1}{2}x^2} = \varepsilon.$$

Die Funktion ist nicht gleichmäßig stetig. Dazu müssen wir $\varepsilon > 0$ finden, wobei es kein $\delta > 0$ gibt, das zu allen x und y mit $|x-y| < \delta$ passt. Sei $\varepsilon \in (0,1)$ und $\delta > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $n > \frac{1}{\delta}$, und setze $x = \frac{1}{2\pi n + \frac{1}{2}\pi}$ und $y = \frac{1}{2\pi n + \frac{3}{2}\pi}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{1}{2\pi n+\frac{1}{2}\pi} - \tfrac{1}{2\pi n+\frac{3}{2}\pi}\right| &= \tfrac{\pi}{\left(2\pi n+\frac{1}{2}\pi\right)\left(2\pi n+\frac{3}{2}\pi\right)} < \frac{1}{n} < \delta \text{ und} \\ \left|f\left(\tfrac{1}{2\pi n+\frac{1}{2}\pi}\right) - f\left(\tfrac{1}{2\pi n+\frac{3}{2}\pi}\right)\right| &= \left|\sin\left(2\pi n + \tfrac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(2\pi n + \tfrac{3}{2}\pi\right)\right| = 2 > \varepsilon. \end{aligned}$$

Satz 13.19 *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f auch gleichmäßig stetig auf $[a,b]$.*

Beweis. Wir geben einen indirekten Beweis und nehmen an, dass f stetig aber nicht gleichmäßig stetig ist auf $[a,b]$. Nicht gleichmäßig stetig bedeutet, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, wobei zu jedem $\delta > 0$ es x und y gibt mit $|x-y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Sei $\varepsilon > 0$ derartig. Dann kann man auch zu jedem $n \in \mathbb{N}^+$ Zahlen $x_n, y_n \in [a,b]$ finden mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$. Wegen dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 6.16) gibt es eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, sagen wir $x_{n_k} \to \bar{x}$. Weil das Intervall abgeschlossen ist, gilt $\bar{x} \in [a,b]$. Weil man $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ hat, konvergiert auch $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nach $\bar{x}$. Anschließend verwendet man die Stetigkeit von f in $\bar{x}$, und es gibt $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$k > K_1 \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(\bar{x})| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{und} \quad k > K_2 \Rightarrow |f(y_{n_k}) - f(\bar{x})| < \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Für $k > \max(K_1, K_2)$ gilt dann

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon,$$

ein Widerspruch. ■

Satz 13.20 *Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.*

Beweis. Weil f stetig ist, ist auch $|f|$ stetig und es gibt $M = \max\{|f(x)|; x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$. Dann ist $M(b-a)$ eine Obersumme und $-M(b-a)$ eine Untersumme. Wegen 13.19 ist f gleichmäßig stetig und wir können zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ finden, so dass für $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta_\varepsilon$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Nehmen wir $\delta_{\frac{1}{4}\varepsilon/|b-a|}$ und konstruieren wir eine Zerlegung $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ mit $x_i = a + k\frac{|b-a|}{n}$, wobei wir $n \in \mathbb{N}$ so wählen, dass

$$\frac{|b-a|}{n} < \delta_{\frac{1}{4}\varepsilon/|b-a|}.$$

Als nächstes definieren wir

$$\begin{aligned} h_o(x) &= f(x_k) + \frac{1}{2|b-a|}\varepsilon \text{ falls } x \in [x_k, x_{k+1}), \\ h_u(x) &= f(x_k) - \frac{1}{2|b-a|}\varepsilon \text{ falls } x \in [x_k, x_{k+1}). \end{aligned}$$

Man zeigt sofort, dass die Treppenfunktionen h_o und h_u eine Obersumme M und eine Untersumme m liefern und weil

$$h_o(x) - h_u(x) = \frac{1}{2|b-a|}\varepsilon,$$

folgt

$$M - m = \int_a^b h_o(x)dx - \int_a^b h_u(x)dx = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Proposition 13.10 schließt den Beweis. ■

13.5 Eigenschaften von Integrale

Ganz formell kann man das Integral betrachten als eine Abbildung $\mathcal{I} : R\,[a,b] \to \mathbb{R}$. Mit $R\,[a,b]$ werden die Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ gemeint, und $\mathcal{I}$ ist jetzt

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx \text{ für alle } f \in R\,[a,b]\,.$$

Eine Abbildung definiert auf Funktionen wird meistens 'Operator' genannt. Der Operator $\mathcal{I}$ heißt **linear**, wenn

$$\mathcal{I}\,(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\mathcal{I}\,(f) + \mu\,\mathcal{I}\,(g) \;\text{ für alle } f,g \in R\,[a,b] \;\text{ und } \lambda,\mu \in \mathbb{R}. \tag{13.18}$$

Satz 13.8-1 sagt genau, dass dieses $\mathcal{I}$ ein linearer Operator ist. Diese lineare Eigenschaft ist gültig für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und auch für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 13.20.1 *Wenn man $\lambda \in \mathbb{R}$ ersetzt durch eine Funktion in (13.18), bekommt man fast immer Unsinn, denn für fast alle Funktionen und $b \neq a$ hat man*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \quad \neq \quad f(x)\int_a^b g(x)dx,$$

(links ist x nur Notationshilfe und rechts auch noch Variabele?) und auch

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \quad \neq \quad \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$$

Die Versuche, in Klausuren und Seminaren trotzdem angeblich existierende Identitäten in dieser Richtung zu verwenden, führen bei dem Unterichtspersonal zu Stirnrunzeln und Haarausfall und können sogar leichte Depressionen auslösen. Haben Sie Mitleid!

Obwohl es beim Integral des Produkts zweier Funktionen keine direkte Rechenbeziehung gibt zu den beiden einzelnen Integralen, kann man schon etwas sagen:

Proposition 13.21 *Wenn $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind auf $[a,b]$, dann ist auch $f \cdot g$ integrierbar auf $[a,b]$.*

Beweis. Wenn f integrierbar ist, dann ist f beschränkt (Proposition 13.9), sagen wir $|f(x)| \leq F \in \mathbb{R}$ für $x \in [a,b]$. Ebenso darf man annehmen, dass $|g(x)| \leq G$ für $x \in [a,b]$.

Für jede $\varepsilon > 0$ gibt es Untersummen m_f, m_g und Obersummen M_f, M_g für f und g derart, dass

$$M_f - m_f < \frac{\varepsilon}{4G+1} \text{ und } M_g - m_g < \frac{\varepsilon}{4F+1}. \tag{13.19}$$

Nennen wir die dazu gehörenden Treppenfunktionen $h_{u,f}$, $h_{o,f}$, $h_{u,g}$ und $h_{o,g}$. Wir dürfen annehmen, dass

$$-F \leq h_{u,f}(x) \leq f(x) \leq h_{o,f}(x) \leq F$$

und auch

$$-G \leq h_{u,g}(x) \leq g(x) \leq h_{o,g}(x) \leq G$$

Leider kann man nicht einfach die beiden unteren Treppenfunktionen multiplizieren um eine Treppenfunktion unterhalb von $f \cdot g$ zu bekommen. Das Vorzeichen kann da Probleme verursachen. Deshalb benutzen wir einen Trick. Wir werden nicht $f \cdot g$, sondern $(f + F)\,\cdot$

$(g+G)$ betrachten. Sowohl $f+F$ als $g+G$ sind positiv. Dann haben wir nicht-negative Treppenfunktionen $(h_{u,f}+F)\cdot(h_{u,g}+G)$ und $(h_{o,f}+F)\cdot(h_{o,g}+G)$ mit

$$0 \leq (h_{u,f}+F)\,(h_{u,g}+G) \leq (f+F)\,(g+G) \leq (h_{o,f}+F)\,(h_{o,g}+G)\,.$$

Mit den in (13.19) gewählten Ober- und Untersummen für f und g hat man nun eine Obersumme M^* und eine Untersumme m^* für $(f+F)\cdot(g+G)$ derart, dass

$$\begin{aligned}
M^*-m^* &= \int_a^b (h_{o,f}+F)\,(h_{o,g}+G)\,dx - \int_a^b (h_{u,f}+F)\,(h_{u,g}+G)\,dx = \\
&\ \text{(bei Treppenfunktionen darf man neu kombinieren)} \\
&= \int_a^b (h_{o,f}+F)\,(h_{o,g}-h_{u,g})\,dx + \int_a^b (h_{o,f}-h_{u,f})\,(h_{u,g}+G)\,dx \leq \\
&\ \text{(positive Glieder und Abschätzen bei Treppenfunktionen)} \\
&\leq \int_a^b 2F\,(h_{o,g}-h_{u,g})\,dx + \int_a^b (h_{o,f}-h_{u,f})\,2G dx = \\
&= 2F\,(M_g-m_g) + 2G\,(M_f-m_f) \leq \\
&\leq 2F\frac{\varepsilon}{4F+1} + 2G\frac{\varepsilon}{4G+1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Proposition 13.10 liefert, dass $(f+F)\,(g+G)$ integrierbar ist. Jetzt brauchen wir noch ein Argument, damit $f\cdot g$ integrierbar ist. Weil

$$f\cdot g = (f+F)\,(g+G) - Fg - Gf - FG \tag{13.20}$$

und weil F und G Konstanten sind, können wir Satz 13.8 verwenden. Weil die rechte Seite von (13.20) nur integrierbare Funktionen enthält, steht auch links eine integrierbare Funktion. ■

Proposition 13.22 *Wenn $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist auch $|f|$ integrierbar auf $[a,b]$.*

Beweis. Definieren wir für $x\in[a,b]$,

$$f^+(x) = \max(0, f(x)) \text{ und } f^-(x) = -\min(0, f(x))\,.$$

Die Funktionen f^+ und f^- sind nicht-negativ und man hat $f=f^+-f^-$ und $|f|=f^++f^-$.

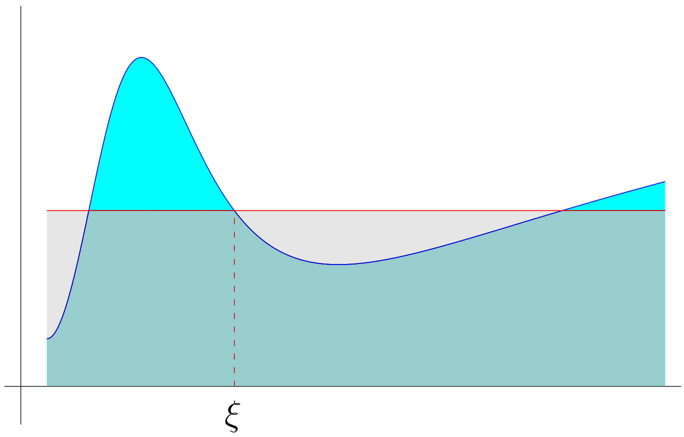
Wenn h_0 und h_u Treppenfunktionen oberhalb und unterhalb von f sind, dann sind $\max(0,h_o)$ und $\max(0,h_u)$ passende Treppenfunktionen für f^+. Für die dazu gehörenden Ober- und Untersummen zeigt man

$$M_{f^+} - m_{f^+} \leq M_f - m_f.$$

Für f^- sind $-\min(0,h_u)$ und $-\min(0,h_o)$ passende Treppenfunktionen oberhalb und unterhalb (in diese Folge!). Der Rest folgt aus Proposition 13.10. ■

Satz 13.23 (Mittelwertsatz für Integrale) *Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist auf $[a,b]$, dann gibt es $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\, f(\xi).$$



Die rote Linie gibt die mittlere Höhe.

Beweis. Weil $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, existiert wegen Satz 10.16 $m_1 = \min\{f(x); x \in [a,b]\}$ und $m_2 = \max\{f(x); x \in [a,b]\}$. Es folgt, dass

$$m_1\,(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le m_2\,(b-a)\,.$$

Der Zwischenwertsatz (Korolar 10.15) ergibt, dass für jede Zahl $c \in (m_1, m_2)$ ein $\xi \in (a,b)$ existiert mit $f(\xi) = c$. Also gibt es ξ mit $f(\xi) = (b-a)^{-1} \int_a^b f(x)dx$. ■

Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist f auch integrierbar auf $[a,x]$ für jede $x \in [a,b]$. Also ist die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds \tag{13.21}$$

wohl definiert.

Satz 13.24 *Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist auf $[a,b]$, dann ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ in (13.21) stetig und sogar Lipschitz-stetig.*

Beweis. Weil $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, gibt es $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \le M$. Sei $x_0 \in [a,b)$. Dann gilt für $x \in (x_0, b]$, dass

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^x f(s)ds - \int_a^{x_0} f(s)ds\right| = \left|\int_{x_0}^x f(s)ds\right| \le \int_{x_0}^x |f(s)|\, ds \le M\,(x - x_0)\,.$$

Eine ähnliche Abschätzung folgt für $x \in [a, x_0)$. Dann ist F Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante M. Lipschitz-stetig impliziert stetig. ■

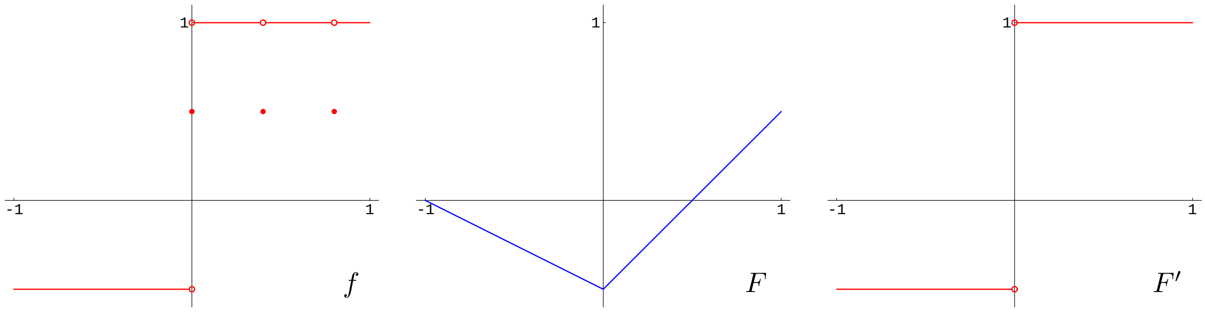
Beispiel 13.25 *Nehmen wir $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für } x \in [-1,0)\,, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

dann findet man

$$F(x) := \int_{-1}^{x} f(s)ds = \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x & \text{für } x \in [-1,0)\,, \\ -\frac{1}{2} + x & \text{für } x \in [0,1]\,. \end{cases}$$

Übrigens hat man $F' \neq f$. In 0 existiert F' sogar nicht.



Analysis 1, Woche 14

Integralrechnung II

14.1 Der Hauptsatz der Integralrechnung

In der letzten Woche haben wir angeschaut wie man das Integral definieren kann. Damit läßt sich zwar eine Flächeninhalt approximieren aber einfache Rechenregel fehlen noch. Jetzt vermutet aber jeder, dass Integrieren etwas mit rückwärts Differenzieren zu tun hat. Es sei aber betont, dass Integrieren nicht nur das Finden einer Stammfunktion ist. Der Hauptsatz der Integralrechnung beschreibt genau die Zusammenhang.

Satz 14.1 (Hauptsatz der Integralrechnung I) *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrierbar auf* $[a, b]$*, und definiere* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mit*

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds. \tag{14.1}$$

Wenn f *stetig ist in* $c \in (a, b)$*, dann ist* F *differenzierbar in* c *und* $F'(c) = f(c)$.

Bemerkung 14.1.1 *Man kann sogar folgendes beweisen:*

- *Wenn* f *rechtsstetig ist in* $c \in [a, b)$*, dann ist* F *rechtsdifferenzierbar in* c *und*

$$F'_+(c) = f(c).$$

- *Wenn* f *linksssstetig ist in* $c \in (a, b]$*, dann ist* F *linksdifferenzierbar in* c *und*

$$F'_-(c) = f(c).$$

Bemerkung 14.1.2 *Wenn* f *stetig ist auf* $[a, b]$*, dann ist* F *differenzierbar in* (a, b)*, rechtsdifferenzierbar in* a *und linksdifferenzierbar in* b*, und* $F'(c) = f(c)$ *für* $c \in (a, b)$*,* $F'_+(a) = f(a)$ *und* $F'_-(b) = f(b)$.

Beweis. Wir beweisen die erste Aussage in Bemerkung 14.1.1.

Dazu müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{x \downarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{F(c + h) - F(c)}{h} - f(c) = 0.$$

Bemerkt man, dass $f(c) = \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)ds$, dann folgt aus die Eigenschaften, die wir in Satz 13.8 aufgelistet haben, dass

$$\begin{aligned}\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c) &= \frac{\int_a^{c+h} f(s)ds - \int_a^c f(s)ds}{h} - \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)ds = \\ &= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} (f(s)-f(c))\,ds.\end{aligned}$$

Wenn f rechtsstetig ist in c, dann gibt es für jede $\varepsilon > 0$ ein $\delta_{f,\varepsilon} > 0$, derart dass für alle $x \in (c, c+\delta)$ gilt

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Nehmen wir $h \in [0, \delta_{f,\varepsilon})$ dann haben wir, mit Proposition 13.22, dass

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(s)-f(c)|\,ds \leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} \varepsilon ds = \varepsilon.$$

Also, für jede $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ (zum Beispiel $\delta_{f,\varepsilon/2}$ um eine starke Ungleichung zu bekommen), so dass

$$0 < h < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Das ist genau dasjenige, was wir zeigen sollten. ■

Definition 14.2 *Sei (a, b) ein Intervall in $\mathbb{R}$. Nehme an $f, F : (a, b) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) sind Funktionen und F ist differenzierbar in (a, b). Wenn*

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in (a, b)$$

dann nennt man F eine Stammfunktion zu f.

Lemma 14.3 *Wenn F und $G : (a, b) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) beide eine Stammfunktion zu f sind, dann gibt es eine Konstante $k \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$), derart dass*

$$F(x) = G(x) + k \text{ für alle } x \in (a, b)\,.$$

Beweis. Nehme $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$. Dann sind F und G stetig auf $[x_1, x_2]$ und besagt der Mittelwertsatz, dass es $\xi \in (x_1, x_2)$ gibt mit

$$\frac{(F(x_2) - G(x_2)) - (F(x_1) - G(x_1))}{x_2 - x_1} = F'(\xi) - G'(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0.$$

Setzen wir $k = F(x_0) - G(x_0)$ für irgendein $x_0 \in (a, b)$, folgt $F(x) - G(x) = k$ für jede $x \in (a, b)$. ■

Bemerkung 14.3.1 *Es wird oft gesagt, dass $\ln|x|$ eine Stammfunktion zu $\frac{1}{x}$ ist. Diese Aussage ist nicht sehr genau. Wenn man die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ betrachtet, dann ist $x \mapsto \ln|x| : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Wenn man die Funktion $x \mapsto \frac{1}{x} : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ betrachtet, dann ist $x \mapsto \ln|x| : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion. Die Formeln sind zwar gleich, aber weil Stammfunktionen auf ein zusammenhängendes Intervall definiert sind, sagt man nicht $x \mapsto \frac{1}{x} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ hat $x \mapsto \ln|x| : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ als Stammfunktion.*

Oben sahen wir, wie man bei f einen Stammfunktion F findet. Das Komplement dazu ist, wie eine Stammfunktion bei dem Integral von der Ableitung behilflich ist.

Satz 14.4 (Hauptsatz der Integralrechnung II) *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar*[1] *auf $[a,b]$ und fixiere $c \in [a,b]$. Setze $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \begin{cases} F'_+(a) & \text{für } x = a, \\ F'(x) & \text{für } x \in (a,b)\,, \\ F'_-(b) & \text{für } x = b\times, \end{cases} \tag{14.2}$$

dann gilt

$$F(x) = \int_c^x f(s)ds + F(c) \text{ für } x \in [a,b]\,.$$

Beweis. Aus den Annahmen folgt, dass f stetig ist. Dann ist f auch integrierbar und ist $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = \int_c^x f(s)ds$$

wohl definiert. Aus Satz 14.1 folgt $G'(x) = f(x)$ und mit Lemma 14.3 folgt $F(x) = G(x) + k$. Nehmen wir $x = c$, folgt $F(c) = G(c) + k = k$. ■

14.2 Partielle Integration

Proposition 14.5 *Wenn $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind, und $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$ mit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind stetig, dann gilt*

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)dx.$$

Bemerkung 14.5.1 *Hier ist die folgende kurze Notation benutzt:*

$$[F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Beweis. Man hat

$$(F \cdot G)'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$$

und mit Satz 14.4 folgt

$$\int_a^b (f(x)G(x) + F(x)g(x))\, dx = (F \cdot G)(b) - (F \cdot G)(a).$$

■

[1] Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar auf $[a,b]$, wenn F stetig ist, $F_{|(a,b)}$ differenzierbar ist, $F'_+(a)$ und $F'_-(b)$ existieren und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} F'_+(a) & \text{für } x = a, \\ F'(x) & \text{für } x \in (a,b)\,, \\ F'_-(b) & \text{für } x = b, \end{cases}$$

stetig ist.

Beispiel 14.6 *Berechne* $\int_0^\pi x\sin(x)dx$.

Wir nennen $G(x) = x$ *und* $f(x) = \sin(x)$ *und bekommen*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(x)dx &= [x\ \ (-\cos(x))]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi 1\ \ (-\cos(x))\,dx = \\ &= -\pi\cos(\pi) + 0\cos(0) + \int_0^\pi \cos(x)dx = \\ &= \pi + [\sin(x)]_{x=0}^{x=\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Beispiel 14.7 *Berechne* $\int_0^\pi e^x\sin(x)dx$.

Wir nennen $G(x) = e^x$ *und* $f(x) = \sin(x)$ *und bekommen*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x\sin(x)dx &= [e^x\ \ (-\cos(x))]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^x\ \ (-\cos(x))\,dx = \\ &= e^\pi + 1 + \int_0^\pi e^x\ \ \cos(x)dx.\end{aligned}$$

Nochmals, jetzt mit $G(x) = e^x$ *und* $f(x) = \cos(x)$,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x\cos(x)dx &= [e^x\ \ \sin(x)]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^x\ \ \sin(x)dx = \\ &= -\int_0^\pi e^x\ \ \sin(x)dx.\end{aligned}$$

Zusammen liefert es

$$\int_0^\pi e^x\sin(x)dx = e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x\ \ \sin(x)dx$$

und

$$\int_0^\pi e^x\sin(x)dx = \frac{e^\pi+1}{2}.$$

14.3 Substitutionsregel

Proposition 14.8 *Wenn* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar ist und* $f : g\,[a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig ist, dann gilt*

$$\int_a^b (f\circ g)(x)\ g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy. \tag{14.3}$$

Man schreibt $g\,[a,b] = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in [a,b]\ \text{ mit } y = f(x)\}$.

Bemerkung 14.8.1 *Grob gesagt: wenn* $y = g(x)$ *ersetzt wird, muss man auch* $dy = dg(x) = g'(x)dx$ *ersetzen. Im Moment hat ein loses dy ohne Integral keine Bedeutung. Als Trick funktioniert es.*

Beweis. Definiere $F : g\,[a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(y) = \int_{g(a)}^y f(s)ds$$

und $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$H(x) = (F \circ g)(x) = \int_{g(a)}^{g(x)} f(s)ds.$$

Wegen Satz 14.1 ist F differenzierbar, also wegen der Kettenregel ist auch H differenzierbar, und

$$H'(x) = F'(g(x))\, g'(x) = (f \circ g)(x)\ g'(x).$$

Dann gilt auch

$$H(x) = H(x) - H(a) = \int_a^x (f \circ g)(s)\ g'(s)ds.$$

■

Bemerkung 14.8.2 *Wir sind davon ausgegangen, dass man bei einem Integral $\int_a^b f(x)dx$ die Grenzen so anordnet, dass $a < b$. Bei dieser Substitutionsregel ist es vernünftig auch $a > b$ zu erlauben und setzt*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Wenn g monoton wachsend ist, dann wird (14.3)

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = \int_a^b (f \circ g)(x)\ g'(x)dx = \int_a^b (f \circ g)(x)\ |g'(x)|\, dx;$$

wenn sie monoton fallend ist, bekommt man

$$\begin{aligned}\int_{g(b)}^{g(a)} f(y)dy &= \int_b^a (f \circ g)(x)\ g'(x)dx = \\ &= -\int_a^b (f \circ g)(x)\ g'(x)dx = \int_a^b (f \circ g)(x)\ |g'(x)|\, dx.\end{aligned}$$

Für monotone Funktionen g kann man diese beiden Identitäten zusammenfassen in:

$$\int_{g([a,b])} f(y)dy = \int_{[a,b]} (f \circ g)(x)\ |g'(x)|\, dx. \tag{14.4}$$

Für nicht-monotone Funktionen ist (14.3) auch gültig, aber für (14.4) braucht man eine eineindeutige Funktion g.

Beispiel 14.9 *Berechne* $\int_0^x s e^{-s^2} ds$.

Man nimmt $g(x) = x^2$ und findet

$$\int_0^x s e^{-s^2} ds = \tfrac{1}{2}\int_0^x e^{-s^2} 2s ds = \tfrac{1}{2}\int_0^{x^2} e^{-t}dt = \tfrac{1}{2}\left[-e^{-t}\right]_0^{x^2} = \frac{1-e^{-x^2}}{2}.$$

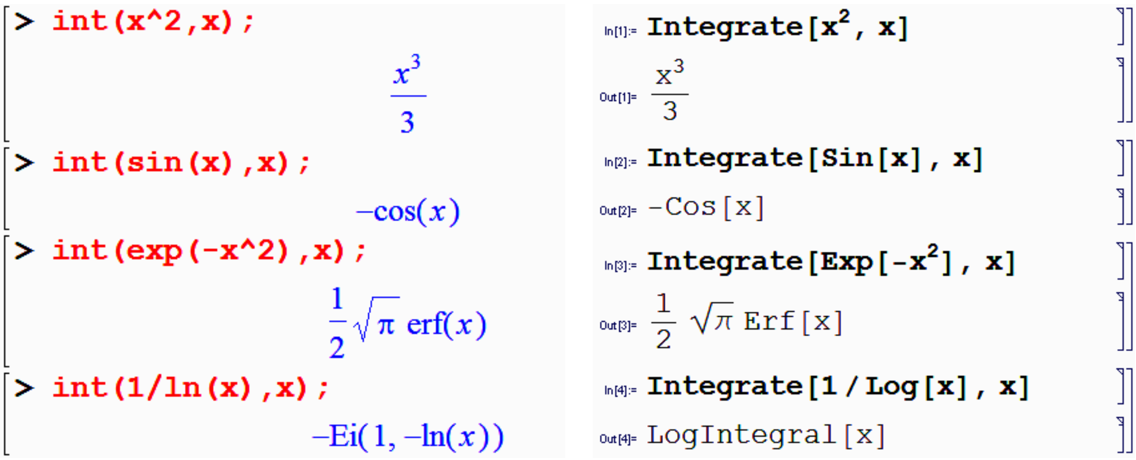
Beispiel 14.10 *Berechne* $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + x^4}dx$.

Man nimmt $g(x) = 1 + x^2$ und findet

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{x^2+x^4}dx &= \int_{-1}^1 |x|\sqrt{1+x^2}dx = 2\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \\ &= \int_1^2 \sqrt{y}dy = \left[\tfrac{2}{3}y^{3/2}\right]_1^2 = \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

14.4 Kalkül bei Integralen

Bis vor 30 Jahren war das Berechnen von expliziten Formeln für Stammfunktionen ein wichtiger Bestandteil von jedem Anfängerkurs in Mathematik. Heutzutage überlässt man diese Arbeit meistens Maple, Mathematica oder anderen Programmen in dieser Richtung. Diese Programme laufen übrigens nicht durch außerirdische Inspiration, wie einige zu vermuten scheinen, sondern werden entworfen mit mathematischer Transpiration. Aber wie schlau man auch programmieren mag, viele Funktionen haben keine Stammfunktion, die sich schreiben lässt als Zusammensetzung bekannter Funktionen. Ein erster Versuch, trotzdem explizit-aussehende Lösungen zu haben ist, weitere Funktionen zu definieren. Wir haben schon Sinus und Cosinus eingeführt und da könnte man noch mehrere definieren. Das Benennen von neuen Funktionen führt zu nichts, wenn man nicht gleichzeitig die Eigenschaften dieser Funktionen studiert. Dann sind wir wieder zurück wo wir waren. Wir werden in diesem Paragraph einige Integrale vorstellen, bei welchen sich explizit eine Stammfunktion beschreiben lässt mit Hilfe bekannter Funktionen. Wenn wir auf irgendeine Art eine Stammfunktion mit Hilfe bekannter Funktionen finden können, können wir oft auch leichter Eigenschaften ableiten.



Einige Stammfunktionen, die Maple (links) und Mathematica ergeben. Ei hat nichts mit Huhn zu tun, sondern ist eine Abkürzung von dem sogenannten 'exponential integral'.

14.4.1 Integration von rationalen Funktionen

Wir erinnern unsnoch mal daran, dass eine rationale Funktion r folgende Vorschrift hat:

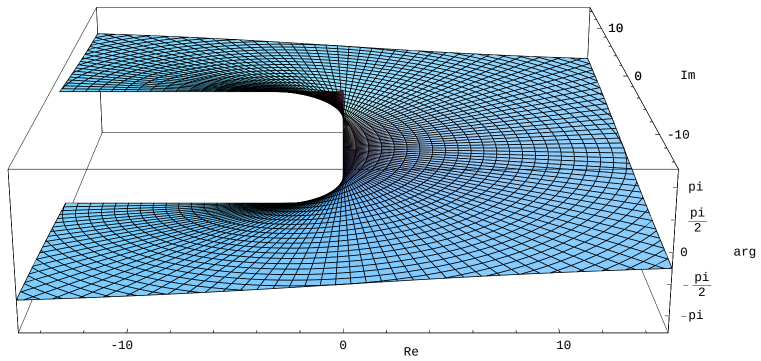
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit p und q Polynome. In diesem Paragraphen möchten wir zeigen, wie man zu r eine Stammfunktion findet.

Bevor wir etwas integrieren, werden wir eine Erweiterung des Logaritmus definieren auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Dazu verwenden wir eine Argumentfunktion $\arg(z) : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{Arg}(z) & \text{für } \operatorname{Arg}(z) \in [0, \pi]\,, \\ \operatorname{Arg}(z) - 2\pi & \text{für } \operatorname{Arg}(z) \in (\pi, 2\pi)\,. \end{cases}$$

Das heißt, für $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und $r \in \mathbb{R}^+$ gilt $\arg(z) = \varphi$.



Definition 14.11 *Wir definieren* $\text{Log}(z) : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ *durch*

$$\text{Log}(z) = \ln(|z|) + i\ \arg(z).$$

Dieser Log ist injektiv und weil $\text{Log}\left(\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]\right) = \mathbb{R} + i\,(-\pi, \pi)$, gibt es eine Umkehrfunktion. Diese Funktion ist eine alte Bekannte. Weil

$$\exp\left(\text{Log}(z)\right) = \exp\left(\ln(|z|)\right)\exp\left(i\ \arg(z)\right) = |z|\left(\cos\left(\arg(z)\right) + i\sin\left(\arg(z)\right)\right) = z$$

gilt

$$\text{Log}^{inv}(z) = \exp_{|\mathbb{R}+i(-\pi,\pi)}(z).$$

So hat man

$$\text{Log}'(z) = \frac{1}{\exp'\left(\text{Log}(z)\right)} = \frac{1}{\exp\left(\text{Log}(z)\right)} = \frac{1}{z}$$

und gilt auch für die reelle Ableitung von $x \mapsto \text{Log}(x+w) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, oder $x \mapsto \text{Log}(x+w) : \mathbb{R}\backslash(-\infty, -w] \to \mathbb{C}$ falls $w \in \mathbb{R}$, dass

$$\left(\text{Log}(x+w)\right)' = \frac{1}{x+w}.$$

Lemma 14.12 *Sei* $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *und* $f(x) = (x+w)^{-1}$. *Dann ist* $F(x) = \text{Log}(x+w)$ *eine Stammfunktion.*

Bemerkung 14.12.1 *Eine genaue Formuliering dieses Lemma müßte das Definitionsgebiet der Funktion einschließen. Für* $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ *ist sowohl* f *als auch* F *auf ganz* $\mathbb{R}$ *definiert.*

Bemerkung 14.12.2 *Für* $w \in \mathbb{R}$ *hat man entweder* $f : (-w, \infty) \to \mathbb{R}$ *oder* $f : (-\infty, -w) \to \mathbb{R}$. *Die Vorschriften der dazu gehörenden Stammfunktionen sind* $F(x) = \ln(x+w)$ *und* $F(x) = \ln|x+w|$.

Es ist nützlich folgende Eigenschaft von diesem erweiterten Logarithmus fest zu halten.

Lemma 14.13 *Für* $z, w \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ *mit* $zw \notin \mathbb{R}^-$ *gibt es* $k \in \{-1, 0, 1\}$ *derart, dass*

$$\text{Log}(zw) = \text{Log}(z) + \text{Log}(w) + 2k\pi i. \tag{14.5}$$

Beweis. Der Beweis ist geradeaus und verwendet, dass $\ln(|zw|) = \ln(|z|) + \ln(|w|)$ gilt, und, wenn $\arg(z) + \arg(w) \in (-\pi, \pi)$, dass

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w).$$

Wenn $\arg(z) + \arg(w) \in (-\pi, \pi)$, dann gilt sogar

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w). \tag{14.6}$$

Wenn $\arg(z) + \arg(w) \notin (-\pi, \pi)$, dann gilt $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pm 2\pi$ und man bekommt (14.5). ■

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ zeigt man, dass für $F : \mathbb{C}\backslash \{-w\} \to \mathbb{C}$ mit $F(z) = \frac{-1}{n-1} (z+w)^{-n+1}$ gilt $F'(z) = (z+w)^{-n}$. Solches gilt für die reelle Ableitung. Mit der Partialbruchzerlegung kann man jede rationale Funktion $p(x)/q(x)$ schreiben als eine Summe von einen Polynom und singulären Termen $c_i (x - w_i)^{-n_i}$. Wenn wir eine solche Zerlegung finden können, kennen wir also auch eine Stammfunktion.

Beispiel 14.14 *Wir suchen eine Stammfunktion für* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. *Wenn wir uns erinnern, dass* $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, *sind wir fertig. Wenn nicht, dann kann man wie folgt vorgehen:*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{\frac{1}{2}i}{x+i} - \frac{\frac{1}{2}i}{x-i}.$$

Eine Stammfunktion ist

$$\begin{aligned} & F(x) = \tfrac{1}{2}i \operatorname{Log}(x+i) - \tfrac{1}{2}i \operatorname{Log}(x-i) = \\ = \; & \tfrac{1}{2}i \left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + i \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \tfrac{1}{2}i \left(\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + i \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \\ = \; & -\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(x) - \tfrac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$

Man sieht in diesem Beispiel, dass der Umweg über komplexe Funktionen uns am Ende doch wieder zum Reellen zurückführt. Selbstverständlich soll das so sein, denn das Integral von einer reellen Funktion, wenn es existiert, ist definiert als eine reelle Zahl. Dass auch dieser Umweg da kein Problem ist, kann man verstehen, wenn man sich erinnert, dass komplexe Nullstellen mit nicht-trivialem imaginären Teil von ein reelles Polynom immer paarweise erscheinen, nämlich das komplex konjugierte ist auch eine Nullstelle. Das führt dazu, dass auch in der Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion mit reellen Koeffizienten die singulären Terme paarweise erscheinen:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \tilde{p}(x) + \frac{\alpha_1}{x - w_1} + \frac{\overline{\alpha_1}}{x - \overline{w_1}} + \dots$$

14.4.2 Integration von Goniometrischen Polynomen

Ein goniometrisches Polynom ist eine Zusammenstellung von:

$$x \;\mapsto\; (\cos(x), \sin(x))$$

$$(\; s \;,\; t \;) \;\mapsto\; \sum_{\substack{0 \leq k \leq m \\ 0 \leq n \leq m}} a_{n,k} s^k t^n$$

mit $a_{n,k} \in \mathbb{C}$. Zum Beispiel

$$g(x) = 1 + \cos(x) + 3\sin(x)^2 \cos(x)^2 \tag{14.7}$$

ist ein goniometrisches Polynom.

Auch hier hilft der Weg über komplexe Funktionen. Erinnern wir uns, dass

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ und } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

dann folgt sofort eine Stammfunktion für ein goniometrisches Polynom wenn wir eine Stammfunktion für eine bestimmte rationale Funktion finden können.

Für das Beispiel in (14.7) findet man eine Stammfunktion via

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + 3\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \\ &= \tfrac{11}{8} + \tfrac{1}{2}e^{ix} + \tfrac{1}{2}e^{-ix} - \tfrac{3}{16}e^{4ix} - \tfrac{3}{16}e^{-4ix}, \end{aligned}$$

nämlich

$$\begin{aligned} G(x) &= \tfrac{11}{8}x - \tfrac{1}{2}ie^{ix} + \tfrac{1}{2}ie^{-ix} + \tfrac{3}{64}ie^{4ix} - \tfrac{3}{64}ie^{-4ix} = \\ &= \tfrac{11}{8}x + \sin(x) - \tfrac{3}{32}\sin(4x). \end{aligned}$$

Man kann es auch ohne komplexe Schreibweise mit dem Exponent lösen, aber man muss sich dann gut auskennen bei den Eigenschaften von Sinus und Cosinus.

14.4.3 Integration von rationalen Funktionen mit Exponent

So eine Funktion mit Exponent, die wir meinen, ist eine Zusammenstellung von

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & e^{ax} & & \\ & & y & \mapsto & \frac{p(y)}{q(y)}. \end{array}$$

Hier sind p und q zwei Polynome. Also betrachten wir Funktionen vom Typ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \frac{p\left(e^{ax}\right)}{q\left(e^{ax}\right)}.$$

Wenn man bemerkt, dass die Substitutionsregel ergibt, dass

$$\int_0^x \frac{p\left(e^{at}\right)}{q\left(e^{at}\right)}\, dt = \frac{1}{a}\int_1^{e^{ax}} \frac{p\left(s\right)}{q\left(s\right)\ s}\, ds,$$

ist man zurück bei einer Stammfunktion für eine rationale Funktion.

Auch für eine Funktion mit der Vorschrift

$$g(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

kann man so eine explizite Stammfunktion finden:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{\cos(s)} ds &= \int_0^x \frac{2}{e^{is} + e^{-is}} ds = \int_0^x \frac{2e^{is}}{\left(e^{is}\right)^2 + 1} ds = \frac{1}{i}\int_1^{e^{ix}} \frac{2}{t^2+1} dt = \\ &= \int_1^{e^{ix}} \left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i}\right) dt = \Big[\mathrm{Log}\,(t-i) - \mathrm{Log}\,(t+i)\Big]_1^{e^{ix}} = \\ &= \ln\left|\frac{e^{i\ x} - i}{e^{i\ x} + i}\frac{1+i}{1-i}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right). \end{aligned}$$

In der vorletzten Gleichung haben wir (14.5) verwendet. Weil wir wissen, dass das Ergebnis reell sein muss, brauchen wir uns nicht zu kümmern um den imaginären Teil (ist sowieso null).

Im Prinzip kann man so auch eine Stammfunktion finden für

$$h(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

Es wäre einfacher, wenn man sich an die Ableitung von $x \mapsto \tan(x)$ erinnern würde.

Beispiel 14.15 *Man suche eine Stammfunktion für*

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)\sin(x)^2}.$$

Statt sofort nach Exponenten umzuschreiben, versuchen wir, diese Funktion zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{4}\pi}^{x} \frac{1}{\cos(s)\sin(s)^2} ds &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{x} \frac{\cos(s)^2 + \sin(s)^2}{\cos(s)\sin(s)^2} ds = \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{x} \left(\frac{\cos(s)^2}{\cos(s)\sin(s)^2} + \frac{\sin(s)^2}{\cos(s)\sin(s)^2} \right) ds = \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{x} \frac{\cos(s)}{\sin(s)^2} ds + \int_{\frac{1}{4}\pi}^{x} \frac{1}{\cos(s)} ds = \\
&= \frac{-1}{\sin(x)} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)} \right) + c.
\end{aligned}$$

Was genau dieses c ist, ist nicht weiter wichtig. Wir suchen bloß eine Stammfunktion. Wenn man eine Konstante addiert, hat man wieder eine Stammfunktion.

14.4.4 Integration bei quadratischen Wurzeln aus Polynomen von Grad 2

Wir möchten erinnern an einige Umkehrfunktionen, die schon vorbei gekommen sind.

- Der eingeschränkte Sinus $x \mapsto \sin_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)$ hat als Umkehrfunktion der Arcussinus $\arcsin : [-1,1] \to \mathbb{R}$ und
$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
- Der Sinus hyperbolicus $x \mapsto \sinh(x)$ hat als Umkehrfunktion der Areasinus hyperbolicus $\sinh^{inv} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\sinh^{inv}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ und
$$\sinh^{inv}(x)' = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
- Der eingeschränkte Cosinus hyperbolicus $x \mapsto \cosh_{[0,\infty)}(x)$ hat als Umkehrfunktion $\cosh^{inv}_{[0,\infty)} : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\cosh^{inv}_{[0,\infty)}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ und
$$\cosh^{inv}_{[0,\infty)}(x)' = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Wir finden so nicht nur Stammfunktionen für $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, sondern wir finden vernünftige Substitutionen für eine ganze Reihe von Beispielen.

Beispiel 14.16 *Man suche eine Stammfunktion für*

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Weil

$$\frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}}$$

scheint $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ *eine vernünftige Substitution zu sein. Ein Versuch kann nicht schaden:*

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{s}{\sqrt{1+s+s^2}} ds &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^x \frac{\frac{2s+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\left(\frac{2s+1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \frac{2}{\sqrt{3}} ds = \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right) dy = \\
&= \left[\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{1+y^2} - \tfrac{1}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} = \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} - \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) + c = \\
&= \sqrt{1+x+x^2} - \tfrac{1}{2}\ln\left(x+\tfrac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right) + \tilde{c}.
\end{aligned}$$

Fast immer gibt es kürzere Wege zum Ziel. Bevor man den kürzesten Weg kennt, soll man aber mindestens einen Weg kennen.

Beispiel 14.17 *Man suche eine Stammfunktion für*

$$f(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

auf dem Intervall $(-1,1)$. *Ob man geradeaus zurückgreifen kann auf eine dieser oben genannten Funktionen ist nicht klar, aber man könnte an den Arcusinus denken. Das heißt* $y = \arcsin(x)$ *oder* $x = \sin(y)$ *setzen. Wir substituieren* $\arcsin(s) = t$, *also* $s = \sin(t)$, *in*

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(1-s^2\right)^{-\frac{3}{2}} ds &= \int_0^x \frac{1}{1-s^2}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1}{1-\sin(t)^2} dt = \\
&= \int_0^{\arcsin(x)} \frac{1}{\cos(t)^2} dt = \Big[\tan(t)\Big]_0^{\arcsin(x)} = \tan\left(\arcsin(x)\right) = \\
&= \frac{\sin\left(\arcsin(x)\right)}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Auch hier gibt es Abkürzungen. Die Abkürzung durch den Hof des Nachbarn ist in einer Klausur nicht gestattet.

Beispiel 14.18 *Man suche eine Stammfunktion für*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}$$

auf dem Intervall $(4, \infty)$. *Weil*

$$\sqrt{x^2-4x} = \sqrt{(x-2)^2-4} = 2\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}$$

könnte $\frac{x-2}{2} = y = \cosh(t)$ *eine vernünftige Substitution sein. In diesem Beispiel werden wir auch mal eine übliche Schreibweise vorführen. Weil man bei einer Stammfunktion immer eine Konstante addieren kann, schreibt man*

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{3-4x+x^2}}{x}dx &= 2\int \frac{\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}}{\frac{x-2}{2}+1} d\left(\tfrac{x-2}{2}\right) = \\
&= 2\int \frac{\sqrt{y^2-1}}{y+1}dy = 2\int (y-1)\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}dy = \\
&= 2\int (\cosh(t)-1)\ dt.
\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen bedeutet hier: wenn wir $\frac{x-2}{2} = y = \cosh(t)$ *annehmen, stimmen die Klassen der Stammfunktionen überein (also modulo Konstanten). Das letzte Integral können wir explizit lösen:*

$$\begin{aligned}
2\int_0^t (\cosh(\tau)-1)\ d\tau &= 2\sinh(t) - 2t = 2\sqrt{\cosh(t)^2-1} - 2t = \\
&= 2\sqrt{y^2-1} - 2\ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = \\
&= 2\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1} - 2\ln\left(\frac{x-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-1}\right) = \\
&= \sqrt{x^2-4x} - 2\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x}\right) + \ln(4).
\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion ist also

$$F(x) = \sqrt{x^2-4x} - 2\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x}\right).$$

Analysis 1, Woche 15

Integralrechnung III

15.1 Uneigentliche Integrale

Flächeninhalt und Umfang (die Länge des Umrisses) verhalten sich nicht gleich. Verdoppelt man die Längen, verdoppelt sich auch der Umfang; der Inhalt aber vervierfacht sich. Das gibt Anlass zu der Vermutung, dass Umfang U_G und Flächeninhalt A_G für (zweidimensionale) Gebiete sich verhalten als

$$U_G^2 \sim A_G.$$

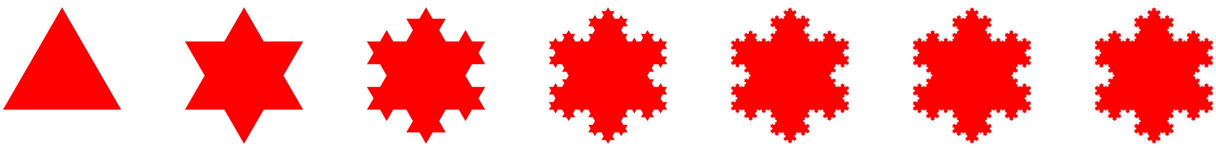
Wenn man dieses Verhältnis etwas länger betrachtet, dann sieht man, dass es so nicht stimmen kann. Zwar gilt

$$U_G^2 \geq 4\pi \ A_G$$

für jedes zweidimensionale Gebiet, aber es gibt keine Konstante, so dass ein eumgekehrte Ungleichung stimmen würde. Ein einfaches Beispiel bekommt man bei Rechtecken. Setze $G = [0, n] \times \left[0, \frac{1}{n}\right]$ und man hat

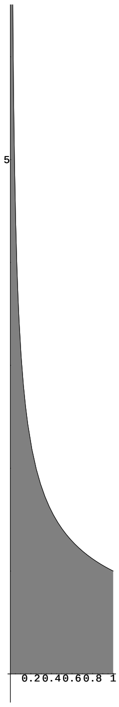
$$\begin{aligned} U_G^2 &= 2n + 2\frac{1}{n} \to \infty \text{ für } n \to \infty, \\ A_G &= n\frac{1}{n} = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Das Gebiet muss übrigens nicht mal den Anschein haben groß zu werden. Ein bekanntes Beispiel ist "Koch's snowflake", die Limesfigur, die man bekommt, wenn man folgende Konstruktion ∞ fortsetzt.



Ähnliches gibt es bei Integralen. Die Definition des Riemann-Integrals erlaubt uns nur beschränkte Funktionen und beschränkte Intervalle. Es gibt aber beschränkte Flächeninhalte, ohne dass der Umfang beschränkt ist. Wir geben zwei Beispiele:

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y^2 x \leq 1\right\}, \\ G_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \text{ und } 0 \leq x^2 y \leq 1\right\}. \end{aligned}$$



Die Flächeninhalte dieser beiden Gebiete möchte man doch als Integral darstellen, das heißt, man möchte Riemann-Integrale so erweitern, dass auch

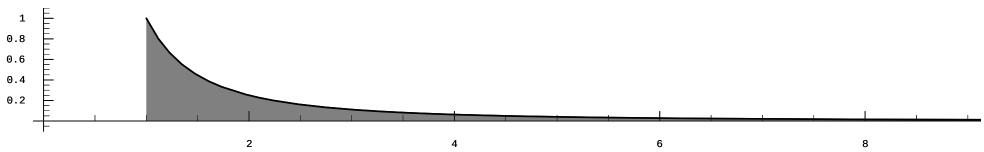
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ und } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

eine Bedeutung bekommen. Man macht solches, indem man Limes und Integral kombiniert. Man setzt

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

und

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx := \lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx.$$



15.1.1 Das uneigentliche Riemann-Integral der ersten Sorte

Definition 15.1 *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für jedes $\delta > 0$ Riemann-integrierbar ist auf $[a + \delta, b]$. Wenn*

$$\ell := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx \text{ existiert,}$$

nennt man f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und man schreibt

$$\int_a^b f(x) dx = \ell.$$

Bemerkung 15.1.1 *Wenn f unbeschränkt bei b wird, kann man bedenken, dass man f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ nennt, wenn*

$$\ell := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_a^{b-\delta} f(x) dx \text{ existiert.}$$

Bemerkung 15.1.2 *Wenn f an mehreren Stellen unendlich wird und man möchte uneigentlicher Riemann-integrierbarkeit untersuchen, soll jede Stelle abgesondert betrachtet werden. Siehe auch die folgenden Beispiele.*

Beispiel 15.2 *Betrachte $f_\alpha : (0, 1] \to \mathbb{R}$ für $\alpha > 0$ mit*

$$f_\alpha(x) = x^{-\alpha}.$$

Die Funktion f_α ist uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[0, 1]$, dann und nur dann wenn $0 < \alpha < 1$. Denn für $\delta > 0$ gilt

$$\int_\delta^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_\delta^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \delta^{1-\alpha}\right) & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ \left[\ln(x)\right]_\delta^1 = -\ln(\delta) & \text{falls } \alpha = 1, \end{cases}$$

und der Grenzwert existiert nur wenn $1 - \alpha > 0$.

Beispiel 15.3 *Betrachte $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{-2}$.*

Wenn $0 < a < b$ oder $a < b < 0$ ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und

$$\int_a^b x^{-2}dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Wenn $a < 0 < b$ gilt, dann ist f nicht Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, auch nicht im uneigentlichen Sinne, denn wenn f so sein würde, müßte sowohl

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \int_a^{-\delta} x^{-2}dx \quad \text{als auch} \quad \lim_{\delta\downarrow 0} \int_\delta^b x^{-2}dx \quad \text{existieren.}$$

Man sieht sofort, dass

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \int_a^{-\delta} x^{-2}dx = \lim_{\delta\downarrow 0} \left[\frac{-1}{x}\right]_a^{-\delta} = \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{\delta} + \frac{1}{a} = \infty.$$

Beispiel 15.4 *Betrachte $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Diese Funktion ist nicht uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[-1, 1]$. Wenn sie Riemann-integrierbar auf $[-1, 1]$ wäre, sollte*

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \int_{-1}^{-\delta} \frac{1}{x}dx \text{ und } \lim_{\delta\downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{x}dx \text{ existieren.}$$

Weil

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{1}{x}dx = -\lim_{\delta\downarrow 0} \ln(\delta) = \infty$$

existiert das Integral auch nicht im uneigentlichen Sinne.

Beispiel 15.5 *Sicher werden einige bemerkt haben, dass es so aussieht, als ob im letzten Beispiel links und rechts gleich große Flächeninhalte stehen würden und wegen des unterschiedlichen Vorzeichens man die doch eigentlich gegenseitig kürzen könnte. Dabei würde man $\infty - \infty$ gleich 0 setzen und das ist leider nicht sehr vernünftig. Was wäre denn $(1 + \infty) - \infty$ und $1 + (\infty - \infty)$? Weil es manchmal doch nützt, beide 'Seiten' zu vergleichen, wird folgendes definiert für eine Funktion, die bei 0 Schwierigkeiten macht:*

$$\text{P.V.} \int_{-1}^1 f(x)dx := \lim_{\delta\downarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\delta} f(x)dx + \int_\delta^1 f(x)dx\right).$$

P.V. heißt (Cauchy's) Principal Value oder Valeur Principal (V.P.). Dieser Hauptwert unterscheidet sich von dem uneigentlichen Integral. Man hat zum Beispiel:

- *$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$ ist nicht (un)eigentlich Riemann-integrierbar,*
- *aber für Cauchy's Hauptwert:*

$$\begin{aligned} \text{P.V.} \int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx &= \lim_{\delta\downarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{1}{x}dx + \int_\delta^1 \frac{1}{x}dx\right) = \\ &= \lim_{\delta\downarrow 0} \left(\Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{-\delta} + \Big[\ln(x)\Big]_\delta^1\right) = 0. \end{aligned}$$

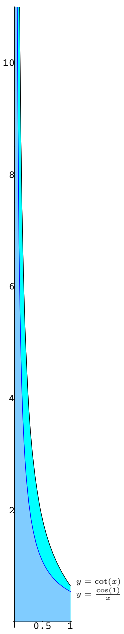
Für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar kann man zeigen, dass $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(0)}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist auf $[-1, 1]$ und dass

$$P.V. \int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{x} dx = \int_{-1}^{1} \frac{g(x) - g(0)}{x} dx.$$

Beispiel 15.6 *Ist $\cot : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar? Sowohl in 0 als auch in π wird die Funktion unbeschränkt. Das heißt, um die Frage zu bejahen, soll sowohl*



$$\ell_1 := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\delta}^{1} \cot(x) dx \quad \text{als} \quad \ell_2 := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{1}^{\pi-\delta} \cot(x) dx$$

existieren. Übrigens darf die Zahl 1 willkürlich gewählt werden innerhalb $(0, \pi)$. Weil für $x \in (0, 1]$ gilt

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \geq \frac{\cos(1)}{\sin(x)} \geq \frac{\cos(1)}{x}$$

($\cos(1) > 0$) hat man

$$\int_{\delta}^{1} \cot(x) dx \geq \int_{\delta}^{1} \frac{\cos(1)}{x} dx = -\cos(1) \ln(\delta) \to \infty \text{ wenn } \delta \downarrow 0.$$

Also ist der Cotangens nicht (un)eigentlich Riemann-integrierbar auf $[0, \pi]$. Was bei π passiert, muss man nicht mal mehr betrachten.

Das letzte Beispiel führt zum nächsten Lemma:

Lemma 15.7 *Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, die für jedes $\delta > 0$ Riemann-integrierbar sind auf $[a + \delta, b]$. Nehme an, dass*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ für } x \in (a, b] \,.$$

Wenn g uneigentlich Riemann-integrierbar ist auf $[a, b]$, dann ist auch f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a, b]$.

Beweis. Wenn $g \geq 0$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist auf $[a, b]$, gilt

$$\int_{a+\delta}^{b} g(x) dx \leq \ell_g := \int_{a}^{b} g(x) dx < \infty.$$

Weil $f \geq 0$ auf $(a, b]$ hat man, dass $\int_{a+\delta}^{b} f(x) dx$ monoton zunimmt für $\delta \downarrow 0$. Auch ist $\int_{a+\delta}^{b} f(x) dx$ gleichmäßig beschränkt, denn es gilt

$$\int_{a+\delta}^{b} f(x) dx \leq \ell_g.$$

Die Monotonie und die Beschränktheit liefern, dass

$$\ell_f := \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

existiert. ■

15.1.2 Das uneigentliche Riemann-Integral der zweiten Sorte

Definition 15.8 *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für jedes $T > a$ Riemann-integrierbar ist auf $[a, T]$. Wenn*

$$\ell := \lim_{T \to \infty} \int_{a}^{T} f(x)dx \text{ existiert,}$$

nennt man f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a, \infty)$ und man schreibt

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \ell.$$

Beispiel 15.9 *Betrachte $f_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ für $\alpha > 0$ mit*

$$f_\alpha(x) = x^{-\alpha}.$$

Die Funktion f_α ist uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[1, \infty)$, dann und nur dann wenn $1 < \alpha$. Denn für $T > 1$ gilt

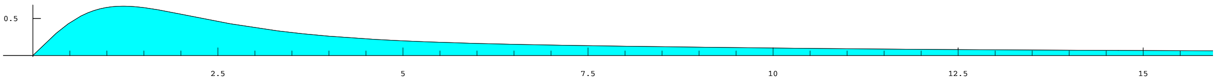
$$\int_{1}^{T} x^{-\alpha}dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_1^T = \frac{1}{1-\alpha}\left(T^{1-\alpha} - 1\right) & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ \Big[\ln(x)\Big]_1^T = \ln(T) & \text{falls } \alpha = 1, \end{cases}$$

und der Grenzwert existiert nur, wenn $1 - \alpha < 0$.

Beispiel 15.10 *Ist $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit*

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + \cos(x)}$$

uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[0, \infty)$?



Hoffnung auf eine explizite Stammfunktion existiert nicht. Wir vermuten, dass für große x diese Funktion sich fast benimmt wie $\frac{1}{x}$. Weil $\frac{1}{x}$ auf $[10, \infty)$ nicht (un)eigentlich Riemann-integrierbar ist, wird g es auch nicht sein. Das wollen wir aber präziser haben.

Dazu zeigen wir, dass eine Teilmenge von

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ und } 0 \leq y \leq g(x)\right\}$$

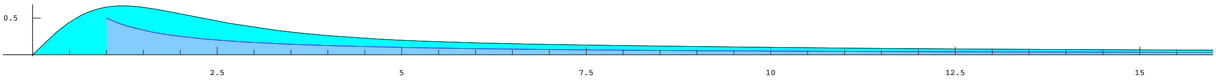
schon Flächeninhalt ∞ hat. Wir verwenden, dass für $x > 1$ gilt

$$\frac{x}{x^2 + \cos(x)} \geq \frac{x}{x^2 + 1} \geq \frac{x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2x},$$

und man also für $T > 1$ die folgende Abschätzung hat:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx + \int_1^T \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx \geq \\ &\geq \int_1^T \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx \geq \int_1^T \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\ln(T). \end{aligned}$$

Die Integrale $\int_0^{17} \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx$ und $\int_1^{17} \frac{1}{2x}dx$ sind hier abgebildet:



Weil $\frac{1}{2}\ln(T) \to \infty$ wenn $T \to \infty$, folgt

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{x}{x^2+\cos(x)}dx = \infty.$$

Die Funktion g ist also nicht (un)eigentlich Riemann-integrierbar auf $[0,\infty)$.

Auch hier formulieren wir ein Lemma dazu.

Lemma 15.11 *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ Funktionen, die für jedes $T > a$ Riemann-integrierbar sind auf $[a,T]$. Nehme an, dass*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ für } x \in [a,\infty).$$

Wenn g uneigentlich Riemann-integrierbar ist auf $[a,\infty)$, dann ist auch f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[a,\infty)$.

Beweis. Weil es ähnlich wie beim Beweis von Lemma 15.7 ist, überlassen wir es dem Leser. ■

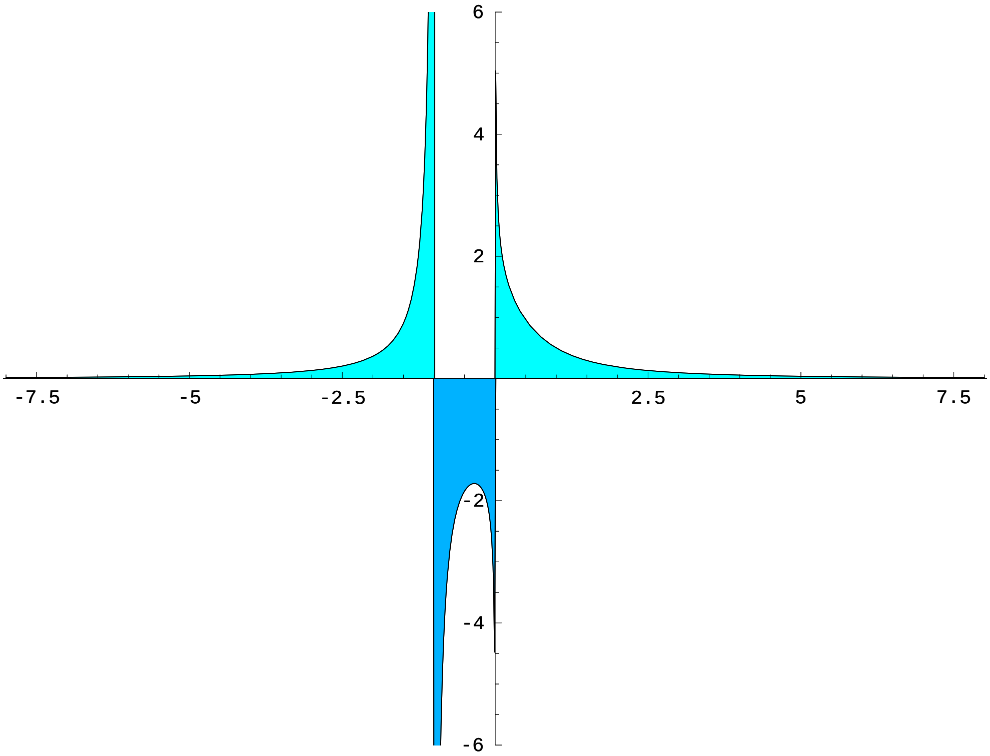
Beispiel 15.12 *Ist $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$ uneigentlich Riemann-integrierbar? Dann muss man erstens die Problemstellen inventarisieren. Neben $\pm\infty$ muss man dazu die Nullstellen vom Nenner bestimmen:*

$$\begin{array}{rcl} x^2 + \sqrt[3]{x} = 0 & \Leftrightarrow & x^2 = -\sqrt[3]{x} \\ & & \Downarrow \\ x\left(x^5+1\right) = 0 & \Leftrightarrow & x^6 = -x \end{array}$$

Es gibt nur zwei reelle Nullstellen: $x = 0$ und $x = -1$. Insgesamt hat man so aber 6 uneigentliche Problemstellen:

$$\{-\infty, -1 \text{ links}, -1 \text{ rechts}, 0 \text{ links}, 0 \text{ rechts}, +\infty\}.$$

Wenn man Maple oder Mathematica die Funktion skizzieren lässt, erkennt man die Singularitäten:



Die Problemstellen muss man einzeln anschauen. Wenn aber eine davon schon dafür sorgt, dass das dazugehörende uneigentliche Integral nicht existiert, ist man fertig. Fangen wir rechts an:

- $\lim\limits_{T\to\infty}\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; *für große x sollte man vergleichen können mit $\frac{1}{x^2}$ und das würde uneigentlich Riemann-integrierbar bedeuten.*
- $\lim\limits_{\delta\downarrow 0}\int_{\delta}^{10}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; *falls $0<x\ll 1$ sollte man vergleichen können mit $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ und das würde uneigentlich Riemann-integrierbar bedeuten.*
- $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\frac12}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; *falls $-\frac12\ll x<0$ sollte man vergleichen können mit $\frac{-1}{\sqrt[3]{|x|}}$ (negativ!) und das würde uneigentlich Riemann-integrierbar bedeuten.*
- $\lim\limits_{\rho\downarrow 0}\int_{-1+\rho}^{-\frac12}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; *falls $-1<x\ll-\frac12$ sollte man vergleichen können mit $\frac{-1}{x+1}$ (negativ!) und das würde "nicht uneigentlich Riemann-integrierbar" bedeuten.* **Bingo!**
- $\lim\limits_{\gamma\downarrow 0}\int_{-2}^{-1-\gamma}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; ....
- $\lim\limits_{S\to-\infty}\int_{S}^{-2}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$; ....

Wir versuchen "nicht uneigentlich Riemann-integrierbar" hin zu kriegen, und schauen uns $\lim\limits_{\rho\downarrow 0}\int_{-1+\rho}^{-\frac12}\frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}}dx$ an. Um zu verstehen was bei $x=-1$ passiert, müssen wir die Funktion $g(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$ untersuchen rund $x=-1$. Um abzuleiten schreiben wir

$$g(x)=x^2-(-x)^{\frac13}$$

und finden so

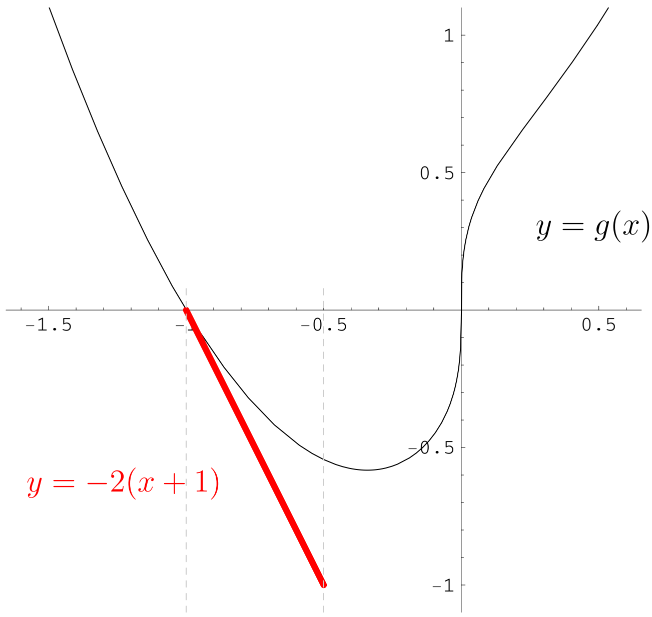
$$g'(x)=2x+\tfrac13\,(-x)^{-\frac23}\,.$$

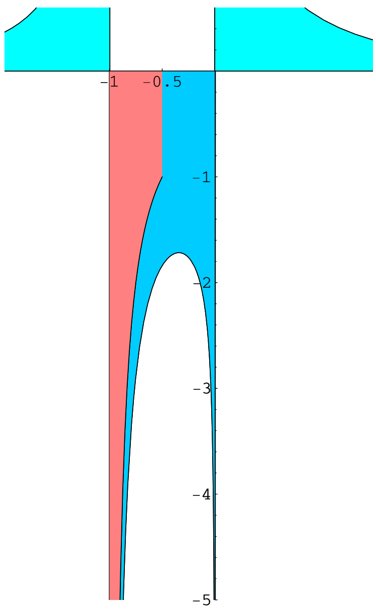
Dann folgt $g'(-1) = -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} > -2$. *Aus der Stetigkeit von* g' *auf* $(-\infty, 0)$ *finden wir, dass* $g'(x) > -2$ *in einer rechten Umgebung von* $x = -1$ *und mit dem Mittelwertsatz, dass in dieser rechter Umgebung gilt*

$$g(x) - g(-1) = g'(\theta)\,(x - -1) > -2\,(x+1)\,.$$

Man kann sogar zeigen, dass

$$g(x) > -2\,(x+1) \text{ für } x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right).$$





Ausschnitt vom Bild auf Seite 153 mit der Abschätzung.

Dann gilt auch

$$\frac{1}{-2\,(x+1)} > \frac{1}{g(x)} \text{ für } x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

und das liefert

$$\int_{-1+\rho}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}} dx \leq \int_{-1+\rho}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{-2\,(x+1)} dx = \left[-\tfrac{1}{2}\ln(x+1)\right]_{-1+\rho}^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\ln(\rho).$$

Weil $\ln(\rho) \to -\infty$ *wenn* $\rho \downarrow 0$, *folgt*

$$\int_{-1+\rho}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x}} dx \to -\infty \text{ für } \rho \downarrow 0$$

und existiert $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+\sqrt[3]{x}} dx$ *nicht als uneigentliches Integral.*

15.2 Reihen und uneigentliche Riemann-Integrale

Manchmal lassen Reihen und uneigentliche Riemann-Integrale sich vergleichen.

Lemma 15.13 *Wenn* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *folgende Bedingungen erfüllt:*

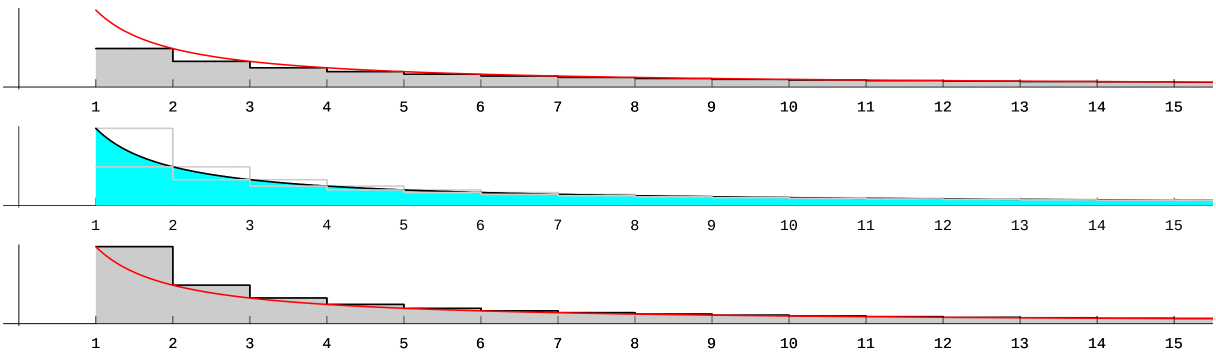
1. f *ist positiv:* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^+$;

2. *f ist monoton fallend: $x > y > 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;*

3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,

dann gilt für jede $N \in \mathbb{N}^+$

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \tag{15.1}$$



Beweis. Man bemerke, dass für die Ganzzahlfunktion $x \mapsto [x]$ folgendes gilt:

$$[x] + 1 \geq x \geq [x]\,.$$

Weil f monoton fallend ist, gilt

$$f([x]+1) \leq f(x) \leq f([x]) \text{ für } x \geq 1.$$

So gilt auch

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = \int_1^N f([x]+1)dx \leq \int_1^N f(x)dx \leq \int_1^N f([x])dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Die Bedingung $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ wird nicht benutzt. ■

Korollar 15.14 *Sei f als in Lemma 15.13. Dann gilt folgendes.*
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert, dann und nur dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergiert.

Beweis. Man benutze die Abschätzung (15.1) aus Lemma 15.13. ■

Beispiel 15.15 *So können wir nun sofort sehen, dass die harmonische Reihe divergiert:*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^N \frac{1}{x} dx = \ln(N) \to \infty \text{ wenn } N \to \infty.$$

Literaturverzeichnis

[1] Amann, Herbert; Escher, Joachim. Analysis 1. Birkhäuser.

[2] Bröcker, Theodor. Analysis 1. Bibliographisches Institut.

[3] Forster, Otto. Analysis 1 Vieweg Studium.

[4] Königsberger, Konrad. Analysis 1. Springer-Lehrbuch.

[5] Spivak, Michael. Calculus. Publish or Perish Inc/Cambridge University Press.

[6] Walter, Wolfgang. Analysis 1. Springer-Lehrbuch.