

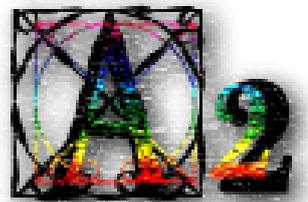
Inhaltsverzeichnis

1	Kurven I	1
1.1	Der n -dimensionale Euklidische Raum	1
1.2	Die Definition einer Kurve	4
1.3	Bogenlänge	5
1.4	Flächeninhalt	8
2	Kurven II	11
2.1	Definition der Krümmung	11
2.2	Krümmung bei beliebigen Kurven	12
3	Differentialgleichungen I	17
3.1	Eine Einleitung	17
3.2	Lineare Gleichungen, konstante Koeffizienten	21
3.2.1	Einfache Beispiele	21
3.3	Lineare Systeme, konstanten Koeffizienten	24
3.4	Berechnung des Exponenten einer Matrix	28
4	Differentialgleichungen II	35
4.1	Lineare Stabilität	35
4.1.1	Klassifizierung in zwei Dimensionen	37
4.1.2	Geometrische Zusammenhänge	38
4.2	Linear, höhere Ordnung, konstante Koeffizienten	40
5	Differentialgleichungen III	43
5.1	Linear, erste Ordnung, variable Koeffizienten	43
5.2	Nicht-linear, konstruktiv lösbar, erster Ordnung	45
5.2.1	Trennbare Differentialgleichungen	45
5.2.2	Homogene Differentialgleichungen	48
5.2.3	Differentialgleichungen von Bernoulli und Riccati	49
5.2.4	Exakte Differentialgleichungen	50
6	Grundbegriffe I	53
6.1	Topologische Begriffe	53
6.2	Darstellung Funktionen mehrerer Veränderlichen	56
6.3	Mehrere Veränderliche, Konvergenz, Stetigkeit	56
6.3.1	Der Limes bei Folgen	57
6.3.2	Der Limes bei Funktionen	58
6.3.3	Stetigkeit	58

7	Grundbegriffe II	63
7.1	Noch mehr Dimensionen	63
7.1.1	Neu aus alt	66
7.1.2	Alternativ bei Stetigkeit	67
8	Extremwerte	69
8.1	Definition vom Extremum	69
8.2	Kompaktheit	69
8.3	Zusammenhang	72
8.4	Partielle Ableitungen	74
8.5	Richtungsableitungen	78
9	Mehrdimensionale Diff...rechnung I	81
9.1	Differenzierbarkeit	81
9.1.1	Zusammenfassung	86
9.2	Rechenregeln	86
9.3	Extremum	88
9.4	Algebraisches Intermezzo	88
10	Mehrdimensionale Diff...rechnung II	93
10.1	Zweite Ableitungen und Extrema bei Polynomen	93
10.2	Approximation durch Polynome	95
10.2.1	Das Taylorpolynom	95
10.2.2	Die Taylorreihe	98
10.3	Hesse-Matrix und Extremum	99
11	Inverse Funktionen	103
11.1	Gleichungen lösen durch Approximation	103
11.2	Kontraktionen	108
11.3	Umkehrfunktionen	110
12	Implizite Funktionen	115
12.1	Implizite Funktionen in 2D	115
12.2	Implizite Funktionen in höheren Dimensionen	118
12.3	Extrema unter Nebenbedingungen	121
13	Integrale in m.D. I	127
13.1	Volumen	127
13.2	Integrale durch Ober- und Untersummen	129
13.3	Berechnen von mehrdimensionalen Integralen	133
13.3.1	Integrale auf rechteckigen Gebieten	133
13.3.2	Integrale auf allgemeineren Gebieten	135
13.3.3	Volumen in Scheiben	137
13.4	Alternative Koordinatensysteme	138
13.4.1	Polarkoordinaten	139
13.4.2	Zylinderkoordinaten	140
13.4.3	Kugelkoordinaten	141
14	Integrale in m.D. II	145
14.1	Volumenabschätzungen	145
14.2	Transformationssatz	149

Analysis 2, Woche 1

Kurven I



1.1 Der n -dimensionale Euklidische Raum

Darunter versteht man für eine Zahl $n \in \mathbb{N}^+$

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n); \text{ mit } x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Ebenso gibt es auch

$$\mathbb{C}^n := \{(z_1, z_2, \dots, z_n); \text{ mit } z_i \in \mathbb{C} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Elemente von \mathbb{R}^n nennt man Vektoren. Man kann Vektoren untereinander addieren und man kann sie multiplizieren mit Zahlen aus \mathbb{R} :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad (1.1)$$

$$t (x_1, x_2, \dots, x_n) := (t x_1, t x_2, \dots, t x_n). \quad (1.2)$$

Die Struktur, die man so bekommt, werden wir allgemeiner beschreiben.

Definition 1.1 $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ heißt ein **Vektorraum** über \mathbb{K} (\mathbb{K} ist \mathbb{R} oder \mathbb{C}), wenn folgendes gilt: die Addition und die Multiplikation mit Skalaren sind gut definiert:

$$t \in \mathbb{K} \text{ und } x, y \in V \Rightarrow x + y \in V \text{ und } t \cdot x \in V$$

und $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe:

1. **Assoziativität:** für alle $x, y, z \in V$ gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$,
2. **Neutrales Element:** es gibt $0 \in V$ derart, dass für alle $x \in V$ gilt $x + 0 = x$,
3. **Inverses Element:** für jedes $x \in V$ gibt es $-x \in V$ derart, dass $x + (-x) = 0$,
4. **Kommutativität:** für alle $x, y \in V$ gilt $x + y = y + x$.

Für die Multiplikation mit Skalaren gilt außerdem:

5. **Assoziativität:** für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ gilt $t_1 \cdot (t_2 \cdot x) = (t_1 t_2) \cdot x$,
6. **Unitäres Element:** für alle $x \in V$ gilt $1 \cdot x = x$,
7. **Distributivität:** für alle $t \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V$ gilt $t \cdot (x + y) = (t \cdot x) + (t \cdot y)$.

Lemma 1.2 $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ mit der Addition in (1.1) und der Multiplikation mit Skalaren in (1.2) ist ein Vektorraum.

Bemerkung 1.2.1 Auch $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot)$ mit der Addition in (1.1) und der Multiplikation mit Skalaren in (1.2) ist ein Vektorraum.

Beweis. Der Beweis ist direkt und wird den Lesern überlassen. ■

Weiter definiert man:

- die **Länge** (oder **Größe**) von $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (1.3)$$

- die **Distanz** zwischen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

- das **innere Produkt** von $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \quad (1.4)$$

Definition 1.3 Sei $(V, +, \mathbb{K}, \cdot)$ ein Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften hat, nennt man eine **Norm**:

1. **Positiv Definitheit:** für alle $x \in V$ gilt $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. **Homogenität:** für alle $t \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ gilt $\|t \cdot x\| = |t| \|x\|$,
3. **Dreiecksungleichung:** für alle $x, y \in V$ gilt $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definition 1.4 Ein **inneres Produkt** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ hat folgende Eigenschaften:

1. **Symmetrie:** $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in V$,
2. **Linearität:** $(sx + ty) \cdot z = s(x \cdot z) + t(y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in V$ und $s, t \in \mathbb{R}$,
3. **Positiv Definitheit:** $x \cdot x \geq 0$ und $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ für alle $x \in V$.

Bemerkung 1.4.1 Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt $x \cdot x = \|x\|^2$.

Bemerkung 1.4.2 Für $z \in \mathbb{C}^n$ wird die Definition der Länge und des komplexen inneren Produktes folgendermaßen gemacht:

$$\|z\|_{\mathbb{C}} := \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n}, \quad (1.5)$$

$$\langle z, w \rangle := z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n. \quad (1.6)$$

Es folgt, dass $\langle w, z \rangle = \overline{\langle z, w \rangle}$ für $z, w \in \mathbb{C}^n$.

Wenn wir $x \in \mathbb{R}^n$ schreiben, werden wir ab jetzt mit x_i die i -te Koordinate andeuten.

Lemma 1.5 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x \cdot y \leq \|x\| \|y\|. \quad (1.7)$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $\|y\| \neq 0$. Man betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) = \|x + ty\|^2$. Man findet

$$\begin{aligned} f(t) &= (x_1 + ty_1)^2 + \cdots + (x_n + ty_n)^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2t x \cdot y + t^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

Das Minimum wird erreicht, wenn $2x \cdot y + 2t\|y\|^2 = 0$. Also wenn wir

$$t_0 = -\frac{x \cdot y}{\|y\|^2}$$

nehmen, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x + t_0 y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \left(-\frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \right) x \cdot y + \left(-\frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \right)^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \frac{(x \cdot y)^2}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

und so auch

$$(x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Man findet $-\|x\| \|y\| \leq x \cdot y \leq \|x\| \|y\|$ und damit ist (1.7) bewiesen. ■

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt so

$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

und das erlaubt uns den Winkel zwischen zwei nicht trivialen Vektoren wie folgt zu definieren:

$$\theta = \angle(x, y) := \arccos \left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right).$$

Diese Definition stimmt überein mit unserer geometrischen Vorstellung vom Winkel zwischen zwei Vektoren.

Lemma 1.6 (Die Dreiecksungleichung) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Beweis. Wir quadrieren, benutzen Bemerkung 1.4.1 und Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

■

Lemma 1.7 $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ mit $\|\cdot\|$ in (1.3) ist ein normierter Vektorraum.

Bemerkung 1.7.1 Auch $(\mathbb{C}^n, +, \mathbb{C}, \cdot)$ mit $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ in (1.5) ist ein normierter Vektorraum.

Beweis. Die positive Definitheit und die Homogenität gehen direkt hervor aus der Definition. Die Dreiecksungleichung haben wir soeben bewiesen. ■

1.2 Die Definition einer Kurve

Definition 1.8 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

- Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt stetig, wenn jede Komponente $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.
- Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt differenzierbar, wenn jede Komponente $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Die Ableitung f' in $t \in I$ wird wie folgt definiert:

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)).$$

Bemerkung 1.8.1 Ebenso lässt sich stetig differenzierbar, zweimal differenzierbar, stückweise differenzierbar, rechtsdifferenzierbar usw. definieren.

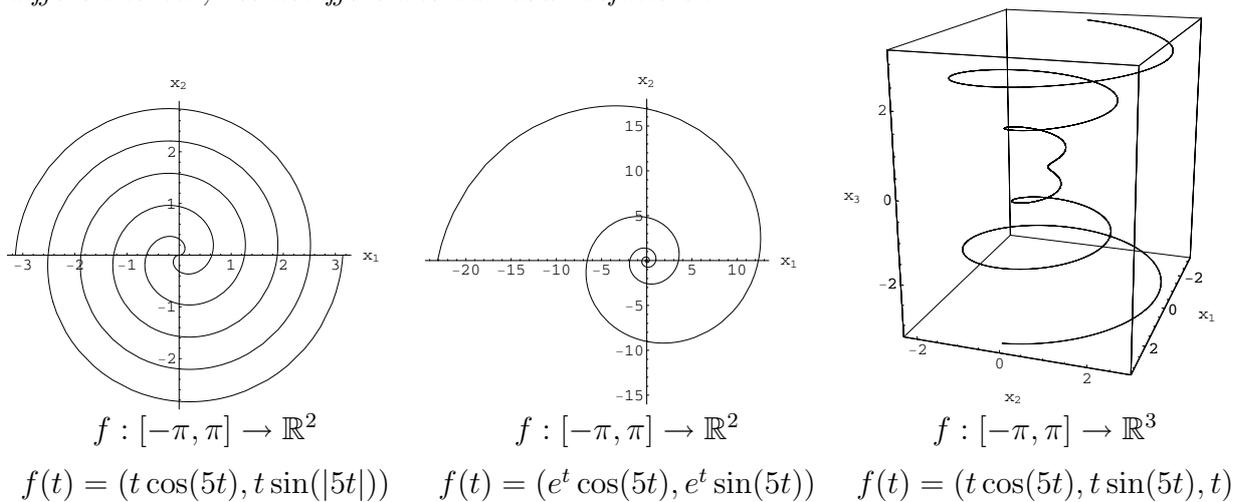


Abbildung 1.1: Drei Beispiele von Kurven und ihre Spuren

Definition 1.9 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nennen wir eine **Kurve**. Das Bild $f(I)$ nennt man die **Spur**.

- Wenn f differenzierbar ist auf I , nennen wir die Kurve differenzierbar. Der Vektor $f'(t)$ heißt der **Tangentenvektor** zur Kurve f an Parameterstelle t .
- Wenn f stetig differenzierbar ist auf I und $\|f'(t)\| \neq 0$ für alle $t \in I$, nennen wir die Kurve **glatt**.

Definition 1.10 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve und $y = f'(t) \in \mathbb{R}^n$ der Tangentenvektor an der Parameterstelle t .

- $\tau = \frac{y}{\|y\|}$ nennt man den **Tangentialeinheitsvektor** zur Kurve f an Parameterstelle t ;
- jeden Vektor $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\| = 1$ und $\nu \cdot \tau = 0$, nennt man einen **Normaleinheitsvektor** zur Kurve f an Parameterstelle t .

In zwei Dimensionen kann man aus einem Tangentialeinheitsvektor τ sehr einfach einen Normaleinheitsvektor konstruieren:

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tau_2 \\ \tau_1 \end{pmatrix}.$$

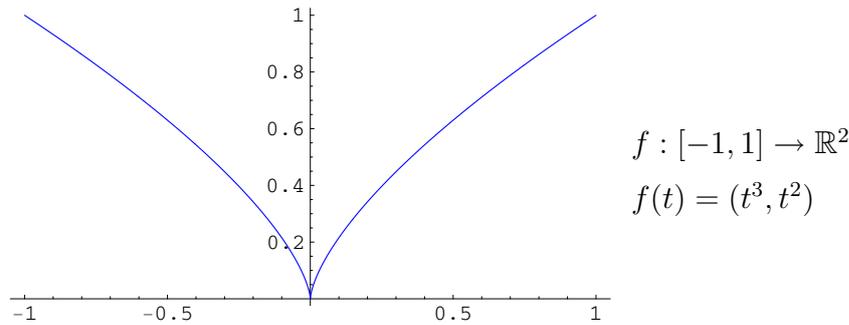


Abbildung 1.2: Die Neilsche Parabel

Beispiel 1.11 Die Neilsche Parabel $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t^3, t^2)$ ist eine differenzierbare Kurve, ist aber nicht glatt. Auch sieht man in der Spur einen Umkehrpunkt.

Wenn t die Zeit darstellt und $f(t)$ die Position eines Teilchens in einem Koordinatensystem \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 zur Zeit t , dann stellt $f'(t)$ den Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t dar. Die Geschwindigkeit, genauer gesagt die Geschwindigkeitsgröße, ist $\|f'(t)\|$. Die zweite Ableitung $f''(t)$ stellt den Beschleunigungsvektor zur Zeit t dar und $\|f''(t)\|$ die Beschleunigung.

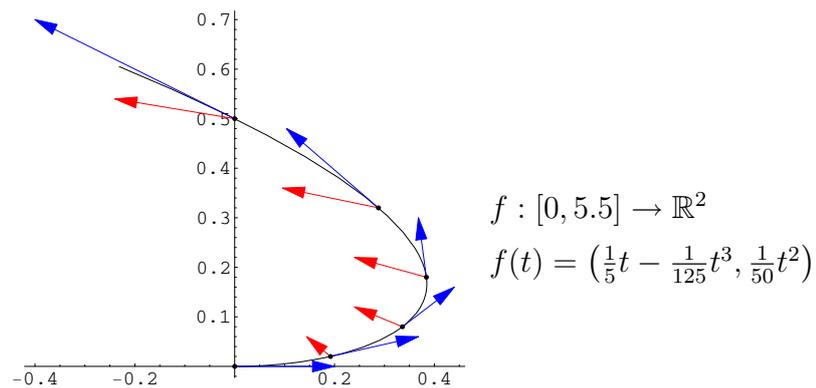


Abbildung 1.3: Position, Geschwindigkeit (blau) und Beschleunigung (rot)

Bemerkung 1.11.1 Die gleiche Spur kann man durch mehrere Kurven bekommen. Zum Beispiel liefern $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\cos t, \sin t)$ und $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$ die gleiche Spur.

1.3 Bogenlänge

Ein **Polygonzug** ist eine Kette von Geraden, die man benutzen kann, um die Länge einer Kurve zu approximieren. Siehe Abbildung 1.4.

Setzt man die Knotenpunkte $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$, dann ist die Länge dieses Polygonzuges gleich

$$\ell = \sum_{j=1}^k \|x^{(j)} - x^{(j-1)}\|.$$

Wenn man solche Knotenpunkte verteilt über eine Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, indem man das Intervall $[a, b]$ aufspaltet in $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$, dann hat der dazugehörige

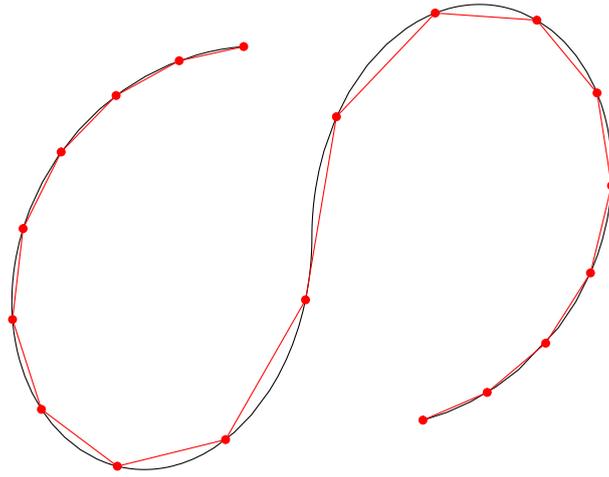


Abbildung 1.4: Eine Spur mit einem Polygonzug

Polygonzug durch die Knotenpunkte $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_k)$ die Länge

$$\ell_k = \sum_{j=1}^k \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \approx \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) \|f'(t_{j-1})\| \approx \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Formulierungen wie \approx vermitteln eine Idee, aber bedeuten mathematisch eigentlich nichts. Man kann es sich jedoch etwas genauer überlegen. Wenn die Komponenten f_i zweimal differenzierbar sind auf $[a, b]$, dann sagt der Satz von Taylor

$$f_i(t_j) - f_i(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1}) f'_i(t_{j-1}) + (t_j - t_{j-1})^2 R_{i,j}$$

wobei die $R_{i,j}$ gleichmäßig beschränkt sind. Angenommen $|R_{i,j}| \leq M$, dann gilt genau gesagt

$$\left| \ell_k - \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) \|f'(t_{j-1})\| \right| \leq nM \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1})^2 \leq nM (b - a) \max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1}).$$

Indem wir die t_j genügend nahe zusammen legen, kann man die rechte Seite so klein kriegen wie man möchte. Die Approximation $\sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) \|f'(t_{j-1})\|$ ist eine Riemannsumme, die wenn man wiederum $\max_{1 \leq j \leq k} (t_j - t_{j-1})$ nach 0 gehen lässt, folgendes Integral approximiert:

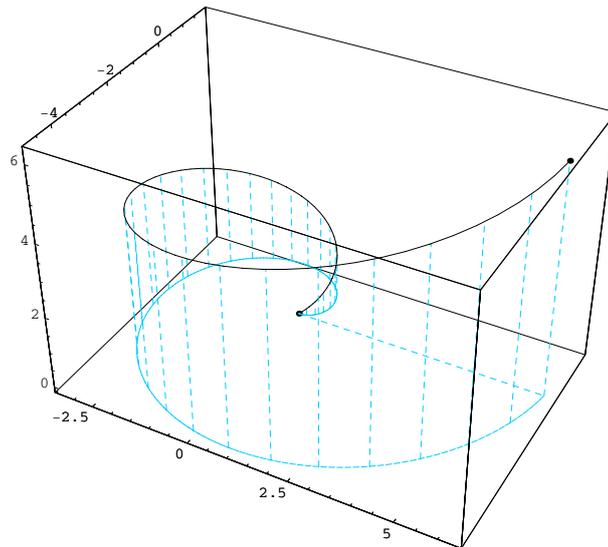
$$\sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) \|f'(t_{j-1})\| \rightarrow \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Diese Überlegungen führen zu folgender Definition.

Definition 1.12 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. Die Bogenlänge von f über das Intervall $[a, b]$ wird definiert durch

$$\ell = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Beispiel 1.13 Wir möchten die Bogenlänge von $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ berechnen.



Man hat $f'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$ und es folgt

$$\|f'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{t^2 + 2}.$$

So bekommt man

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2} dt = \ln(\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi^2 + 1}) + \sqrt{2\pi} \sqrt{2\pi^2 + 1}.$$

Beim Berechnen des Integrals kann man die Substitution $t = \sqrt{2} \sinh x$ verwenden.

Wenn zwei Kurven die gleiche Spur liefern, sind die dazu gehörenden Bogenlängen gleich? Wenn das Wort Bogenlänge vernünftig gewählt ist, sollte das so sein.

Beispiel 1.14 Die Kurven $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\cos(2\pi t^2), \sin(2\pi t^2))$ und $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t))$ liefern beide den Einheitskreis als Spur. Trotzdem gilt

$$\begin{aligned} \ell_f &= \int_{-1}^1 \sqrt{(-4\pi t \sin(2\pi t^2))^2 + (4\pi t \cos(2\pi t^2))^2} dt = \int_{-1}^1 4\pi |t| dt = 4\pi, \\ \ell_g &= \int_{-1}^1 \sqrt{(\pi \sin(\pi t))^2 + (\pi \cos(\pi t))^2} dt = \int_{-1}^1 \pi dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Was ist hier los?

Die Bogenlänge ist nur gleich bei Kurven, bei denen die Spur genau einmal durchlaufen wird. Genauer wird es formuliert im nächsten Lemma.

Lemma 1.15 Wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatte Kurven sind und außerdem gilt:

- die Spur ist identisch: $f([a, b]) = g([c, d])$,
- f und g sind injektiv,

dann sind auch die Bogenlängen identisch.

Statt dieses Lemma direkt zu beweisen, parametrisieren wir auf Bogenlänge um. Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve, setzen wir

$$s(t) := \int_a^t \|f'(\tau)\| d\tau.$$

Für die Bogenlänge von f gilt dann $\ell_f = s(b)$. Weil f glatt ist, sind die Komponenten differenzierbar und es gilt

$$s'(t) = \|f'(t)\| > 0.$$

Dann ist $\sigma = s^{inv}$ wohldefiniert und es gilt

$$\sigma(0) = a, \sigma(\ell_f) = b \text{ und } \sigma'(t) = \frac{1}{s'(\sigma(t))} = \frac{1}{\|f'(\sigma(t))\|}.$$

- Wir setzen

$$\varphi : [0, \ell_f] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi(t) = f \circ \sigma(t). \quad (1.8)$$

Diese Kurve φ heißt die **Umparametrisierung auf Bogenlänge** von f .

Physikalisch gesagt: φ beschreibt die gleiche Spur wie f , läuft aber mit konstanter Geschwindigkeit durch die Spur:

$$\|\varphi'(t)\| = \|(f \circ \sigma)'(t)\| = \|f'(\sigma(t)) \sigma'(t)\| = \sigma'(t) \|f'(\sigma(t))\| = 1,$$

und $\int_0^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau = t$.

- Wir können eine Parametrisierung auch **umorientieren**. Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt, setzt man

$$f^{umkehr} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } f^{umkehr}(t) = f(b + a - t). \quad (1.9)$$

Die Spur von f^{umkehr} ist gleich der Spur von f , wird aber umgekehrt durchlaufen.

Um auf einen Beweis vom Lemma zurückzukommen: man hat für die zu f , φ , f^{umkehr} und φ^{umkehr} gehörenden Bogenlängen, dass

$$\ell_\varphi = \ell_f = \ell_{f^{umkehr}} = \ell_{\varphi^{umkehr}}.$$

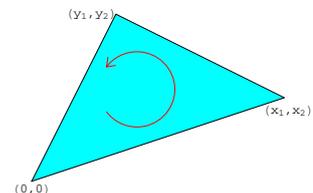
Weil ℓ_φ nicht abhängt von der spezifischen glatten Kurve f , sondern nur von der Spur und der Bedingung, dass sie glatt und injektiv durchlaufen wird, folgt das Ergebnis im Lemma.

1.4 Flächeninhalt

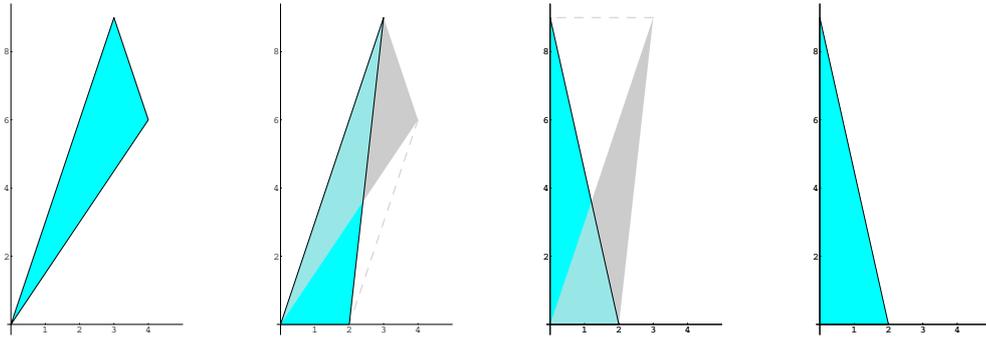
In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf die zweidimensionale Ebene.

Lemma 1.16 *Ein Dreieck mit $(0, 0)$, (x_1, x_2) und (y_1, y_2) als Ecken, orientiert gegen Uhrzeigersinn, hat den Flächeninhalt*

$$I = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$



Beweis. Man benutze die Eigenschaften von Determinanten und schaut sich folgende Bilder an.



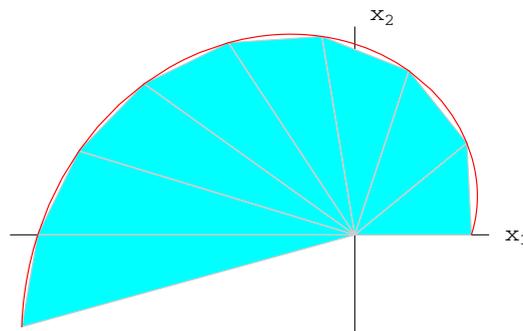
Die Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt. Für die dazu gehörende Determinanten gilt

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_2}{y_2} y_1 & 0 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_2}{y_2} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} b h.$$

■

Wenn man einen Polygonzug mit Knotenpunkten $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ hat, dann wird der von dem Fahrstrahl aus $(0, 0)$ überstreichte Flächeninhalt die Summe der Flächeninhalte von Dreiecken und das liefert:

$$I = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1^{(j-1)} & x_2^{(j-1)} \\ x_1^{(j)} & x_2^{(j)} \end{pmatrix}.$$



Verwendet man eine der Eigenschaften von der Determinante, folgt

$$I = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1^{(j-1)} & x_2^{(j-1)} \\ x_1^{(j)} - x_1^{(j-1)} & x_2^{(j)} - x_2^{(j-1)} \end{pmatrix}.$$

Wie im letzten Paragraphen bei der Bogenlänge setzt man $x^{(i)} = f(t_i)$ und findet

$$I \approx \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} (t_j - t_{j-1}) \det \begin{pmatrix} f_1(t_i) & f_2(t_i) \\ f_1'(t_j) & f_2'(t_j) \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} dt$$

Lemma 1.17 (Sektorformel von Leibniz) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve. Dann überstreicht der Fahrstrahl aus $(0, 0)$ an dieser Kurve ein Gebiet mit dem orientierten¹ Flächeninhalt

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} dt. \quad (1.10)$$

¹Der orientierte Flächeninhalt heißt: von dem in einer Bewegung nach links überstreichten Gebiet wird der standard Flächeninhalt genommen und von dem in einer Bewegung nach rechts überstreichten Gebiet wird der Flächeninhalt mit einem Minuszeichen genommen.

Bemerkung 1.17.1 Die Determinante ausschreiben liefert

$$\frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_a^b (f_1(t)f_2'(t) - f_2(t)f_1'(t)) dt.$$

Wir werden keinen Beweis vom Lemma geben und es bei dieser heuristischen Erklärung belassen.

Bemerkung 1.17.2 Dieser und der letzte Paragraph haben eine ähnliche Struktur. Ein wesentlicher Unterschied ist, dass Bogenlänge als Definition erscheint und dass der Flächeninhalt in einer Behauptung auftaucht. Der Grund ist, dass Bogenlänge neu ist, und Flächeninhalt, jedenfalls für Flächen $\{(x_1, x_2); a \leq x_1 \leq b \text{ und } 0 \leq x_2 \leq f(x_1)\}$, schon als Integral definiert worden ist. Diese alte Definition könnte man erweitern auf Flächen, die definiert sind mit Hilfe eines Fahrstrahls an einer Kurve. Ein Beweis von Lemma 1.17 würde dann bedeuten, dass man zeigt, dass das Ergebnis dieser alten Definition übereinstimmt mit dem Ergebnis in (1.10).

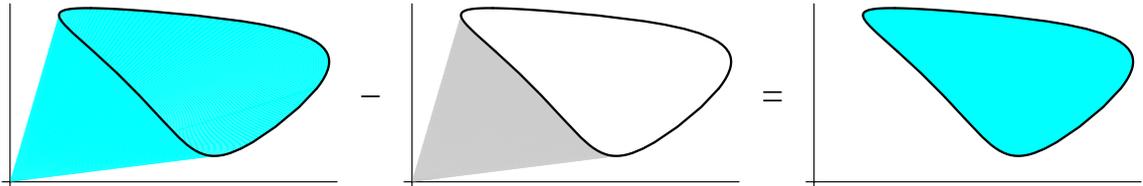
Bemerkung 1.17.3 Wenn man eine Kurve mit Polarkoordinaten beschreibt, das heißt $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(t) = (r(t) \cos(t), r(t) \sin(t)),$$

wobei $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, dann vereinfacht sich die Formel in (1.10) zu

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{pmatrix} r(t) \cos t & r(t) \sin t \\ r'(t) \cos t - r(t) \sin t & r'(t) \sin t + r(t) \cos t \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_a^b (r(t))^2 dt.$$

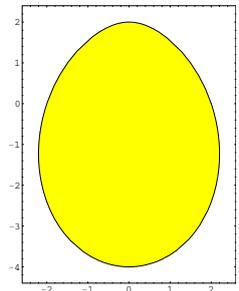
Korollar 1.18 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine glatte geschlossene Kurve. Geschlossen heißt $f(a) = f(b)$. Wenn sie linksherum orientiert ist und $f|_{[a,b]}$ ist injektiv, dann gilt für den Flächeninhalt I vom umschlossenen Gebiet die Formel in (1.10).



Beispiel 1.19 Betrachten wir die Kurve $\text{oeuf} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\text{oeuf}(t) = \begin{pmatrix} (2 - \sin t) \cos t \\ (3 - \sin t) \sin t \end{pmatrix}.$$

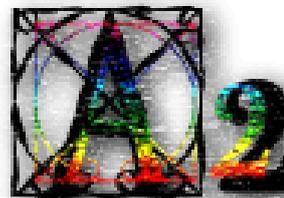
Diese Kurve ist geschlossen und linksherum orientiert. Wir möchten den Flächeninhalt vom umschlossenen Gebiet berechnen. Mit der Formel aus (1.10) findet man



$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} (2 - \sin t) \cos t & (3 - \sin t) \sin t \\ -(2 - \sin t) \sin t - (\cos t)^2 & (3 - \sin t) \cos t - \cos t \sin t \end{pmatrix} dt = \\ &= \dots = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{13}{2} - \frac{19}{4} \sin t - \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{4} \sin 3t \right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{13}{4} dt = \frac{13}{2} \pi. \end{aligned}$$

Analysis 2, Woche 2

Kurven II



2.1 Definition der Krümmung

Für eine Kurve $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ haben wir die Bedeutung von der ersten Ableitung angeschaut. Physikalisch gesehen bedeutet die zweite Ableitung die Beschleunigung. Wenn man statt f die Umparametrisierung auf Bogenlänge φ betrachtet, bekommt man mit φ'' einige geometrische Größen. Wenn die Geschwindigkeitsgröße konstant ist, muss der Beschleunigungsvektor seitwärts gerichtet sein. Das sieht man auch wie folgt: wenn $\|f'\| = 1$ gilt auf I , dann folgt

$$f' \cdot f'' = \frac{1}{2} (f' \cdot f')' = \frac{1}{2} (\|f'\|^2)' = 0.$$

Man findet nicht nur so einen Normalenvektor, sondern die Beschleunigungsgröße muss ein Maß für die Krümmung der Spur sein. Die folgende Definition gibt so etwas. Für eine ebene, zweimal differenzierbare Kurve f setzt man in $f(t)$ die Krümmung als $1/R$. Dabei soll R der Radius sein vom Kreis, der sich 'am besten anschmiegen' lässt an diese Kurve.

Definition 2.1 Sei $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve mit $\|\varphi'(t)\| = 1$ für $t \in [0, T]$. Dann definiert man an der Parameterstelle t :

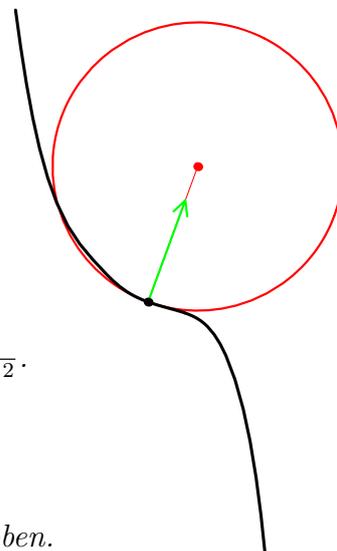
- die **Krümmung**: $\kappa(t) = \|\varphi''(t)\|$,

und falls $\varphi''(t) \neq 0$:

- den **Hauptnormalenvektor**: $\nu(t) = \frac{\varphi''(t)}{\|\varphi''(t)\|}$,
- den **Krümmungsradius**: $r(t) = \frac{1}{\|\varphi''(t)\|}$,
- den **Krümmungsmittelpunkt**: $m(t) = \varphi(t) + \frac{\varphi''(t)}{\|\varphi''(t)\|^2}$.

Falls $\varphi''(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$

- die **Evolute**: die Kurve $m : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $m(t)$ wie oben.



Betrachten wir den Kreis um $y \in \mathbb{R}^2$ mit Radius R . Dieser wird parametrisiert auf Bogenlänge durch $\psi : [0, 2\pi R] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\psi(t) = y + (R \cos(t/R), R \sin(t/R))$. Man findet $\kappa(t) = 1/R$, $\nu(t) = (y - \psi(t))/R$, $r(t) = R$ und $m(t) = y$. Das heißt, für einen Kreis stimmen die oben definierten Begriffe mit unseren Erwartungen überein. Wenn wir eine beliebige nach links drehende Kurve φ haben und $\phi(t_1) = \psi(t_2)$ der Berührungspunkt ist, dann gilt für den Kreis ' ψ ', der sich wie oben definiert 'am besten anschmiegt' an ' φ ', dass

$$\varphi'(t_1) = \psi'(t_2) \text{ und } \varphi''(t_1) = \psi''(t_2).$$

Beispiel 2.2 Wir betrachten die Kurve $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t^2 - 1, \frac{1}{3}t^3 - t)$. Man findet

$$\|f'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (t^2 - 1)^2} = t^2 + 1$$

und

$$s(t) = \int_{-2}^t \|f'(t)\| dt = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{14}{3}.$$

Die Inverse¹ s^{inv} ist definiert von $[0, \frac{28}{3}]$ nach \mathbb{R} und wird verwendet für die Parametrisierung auf Bogenlänge: $\varphi : [0, \frac{28}{3}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(\tau) = f(s^{inv}(\tau))$. In Abbildung 2.1 sieht man die Spur von f , φ und die dazu gehörende Evolute m .

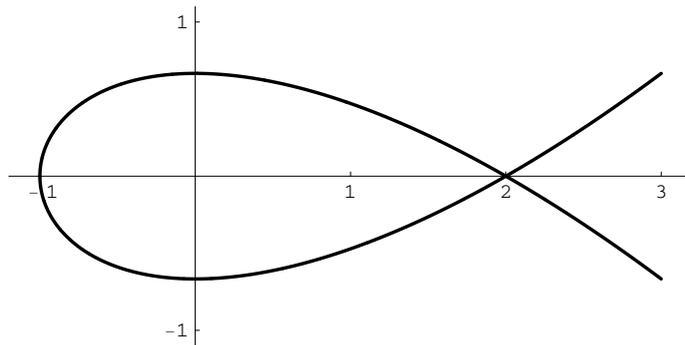


Abbildung 2.1: Die Spur zu f , φ in schwarz und rechts mit ihrer Evolute m in grün

2.2 Krümmung bei beliebigen Kurven

Die Integrale, die erscheinen wenn man eine Kurve auf Bogenlänge umparametrisiert, sind selten explizit zu lösen. Deshalb möchte man die Krümmung berechnen ohne umzuparametrisieren. Das gehen wir in diesem Paragraphen an.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte, zweimal stetig differenzierbare Kurve und $\varphi : [0, \ell_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die auf Bogenlänge umparametrisierte. Das heißt, für

$$s(t) = \int_a^t \|f'(\tau)\| d\tau$$

¹Die Formel von Cardano gibt sogar eine explizite Lösung:

$$s^{inv}(\tau) = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\sqrt{9\tau^2 - 84\tau + 200} + 14 - 3\tau}} - \frac{\sqrt[3]{\sqrt{9\tau^2 - 84\tau + 200} + 14 - 3\tau}}{\sqrt[3]{2}}.$$

hat man

$$f(t) = (\varphi \circ s)(t).$$

Daraus folgt

$$f'(t) = (\varphi' \circ s)(t) s'(t) \text{ und } f''(t) = (\varphi'' \circ s)(t) (s'(t))^2 + (\varphi' \circ s)(t) s''(t)$$

Lassen wir die Variable t weg. Man hat

$$s' = \|f'\| > 0$$

und mit $(s')^2 = \|f'\|^2 = f' \cdot f'$, folgt $2s's'' = 2f' \cdot f''$ (siehe Fußnote²). Zusammen bekommt man

$$\varphi'' \circ s = \frac{f''}{(s')^2} - \frac{(\varphi' \circ s) s'' (s')^2}{(s')^2} = \frac{f''}{\|f'\|^2} - \frac{f'(f' \cdot f'')}{\|f'\|^4} = \frac{f'' \|f'\|^2 - f'(f' \cdot f'')}{\|f'\|^4}. \quad (2.1)$$

Mit Hilfe dieser Formel, mit der φ'' sich durch f -abhängige Termen ersetzen lässt, können wir alle in Paragraph 2.1 definierten Größen jetzt allein mit Hilfe von f schreiben. Wir brauchen also φ nicht explizit zu berechnen.

- Weil man für den Zähler in (2.1) folgendes hat

$$\begin{aligned} \left\| f'' \|f'\|^2 - f'(f' \cdot f'') \right\|^2 &= \left(f'' \|f'\|^2 - f'(f' \cdot f'') \right) \cdot \left(f'' \|f'\|^2 - f'(f' \cdot f'') \right) = \\ &= \|f''\|^2 \|f'\|^4 - (f' \cdot f'')^2 \|f'\|^2, \end{aligned}$$

gilt für die Krümmung am Punkt $\varphi(s(t)) = f(t)$, dass

$$\kappa = \|\varphi'' \circ s\| = \frac{\left\| f'' \|f'\|^2 - f'(f' \cdot f'') \right\|}{\|f'\|^4} = \frac{\sqrt{\|f''\|^2 \|f'\|^2 - (f' \cdot f'')^2}}{\|f'\|^3} \quad (2.2)$$

- Den Hauptnormalenvektor findet man, wenn man (2.1) dividiert durch (2.2).
- Der Krümmungsradius ist immer noch κ^{-1} und κ kennen wir aus (2.2).
- Für den Krümmungsmittelpunkt bekommt man

$$m = f + \|f'\| \frac{f'' \|f'\|^2 - f'(f' \cdot f'')}{\|f''\|^2 \|f'\|^2 - (f' \cdot f'')^2}.$$

Fassen wir zusammen:

²Für zwei differenzierbare Vektorfunktionen $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$(\alpha \cdot \beta)' = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \right)' = \sum_{k=1}^n (\alpha'_k \beta_k + \alpha_k \beta'_k) = \alpha' \cdot \beta + \alpha \cdot \beta'.$$

Lemma 2.3 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Kurve. Dann gilt für die Krümmung

$$\kappa = \frac{\sqrt{\|f''\|^2 \|f'\|^2 - (f' \cdot f'')^2}}{\|f'\|^3}, \quad (2.3)$$

für den Hauptnormalenvektor

$$\nu = \frac{f'' \|f'\|^2 - f' (f' \cdot f'')}{\|f'' \|f'\|^2 - f' (f' \cdot f'')\|}$$

und für den Krümmungsmittelpunkt

$$m = f + \|f'\|^2 \frac{f'' \|f'\|^2 - f' (f' \cdot f'')}{f'' \cdot (f'' \|f'\|^2 - f' (f' \cdot f''))}. \quad (2.4)$$

Beispiel 2.4 Wir betrachten $f : [0, 6\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$. Die Spur der Kurve und deren Evolute sind in Abbildung 2.2 dargestellt.

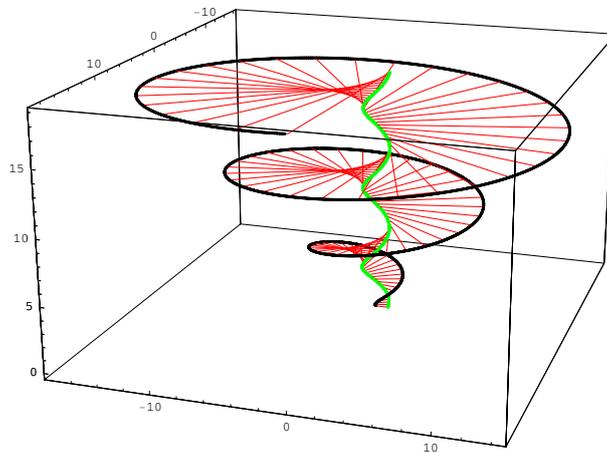


Abbildung 2.2: Spur und Evolute in 3D.

Bemerkung 2.4.1 Diese Formeln lassen sich vereinfachen für die Ebene. Die Krümmung wird

$$\kappa = \frac{\sqrt{((f_1'')^2 + (f_2'')^2)((f_1')^2 + (f_2')^2) - (f_1' f_1'' + f_2' f_2'')^2}}{((f_1')^2 + (f_2')^2)^{3/2}} = \frac{|f_1' f_2'' - f_2' f_1''|}{((f_1')^2 + (f_2')^2)^{3/2}}.$$

Für den Hauptnormalenvektor gilt

$$\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \frac{\text{sign}(f_1' f_2'' - f_2' f_1'')}{\sqrt{(f_1')^2 + (f_2')^2}} \begin{pmatrix} -f_2' \\ f_1' \end{pmatrix},$$

und für den Krümmungsmittelpunkt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \frac{(f_1')^2 + (f_2')^2}{(f_1' f_2'' - f_2' f_1'')^2} \begin{pmatrix} f_1'' ((f_1')^2 + (f_2')^2) - f_1' (f_1' f_1'' + f_2' f_2'') \\ f_2'' ((f_1')^2 + (f_2')^2) - f_2' (f_1' f_1'' + f_2' f_2'') \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \frac{(f_1')^2 + (f_2')^2}{(f_1' f_2'' - f_2' f_1'')^2} \begin{pmatrix} f_1'' (f_2')^2 - f_1' f_2' f_2'' \\ f_2'' (f_1')^2 - f_2' f_1' f_1'' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} + \frac{(f_1')^2 + (f_2')^2}{f_1' f_2'' - f_2' f_1''} \begin{pmatrix} -f_2' \\ f_1' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die sign-Funktion ist definiert durch

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} +1 & \text{falls } t > 0, \\ 0 & \text{falls } t = 0, \\ -1 & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

Bemerkung 2.4.2 Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine glatte, zweimal differenzierbare Kurve. Am Punkt $f(t)$ kann man jetzt einen Tangentialvektor und einen Hauptnormalenvektor konstruieren. Will man ein komplettes Dreibein an dieser Stelle $f(t)$ haben, kann man einen zweiten Normalenvektor bekommen durch das **Vektorprodukt**:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \hat{e}_1 \\ u_2 & v_2 & \hat{e}_2 \\ u_3 & v_3 & \hat{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Hier sind $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ die drei standard Einheitsvektoren. Wenn φ eine Parametrisierung auf Kurvenlänge ist, dann hat man ein Dreibein $\{\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'(t) \times \varphi''(t)\}$.

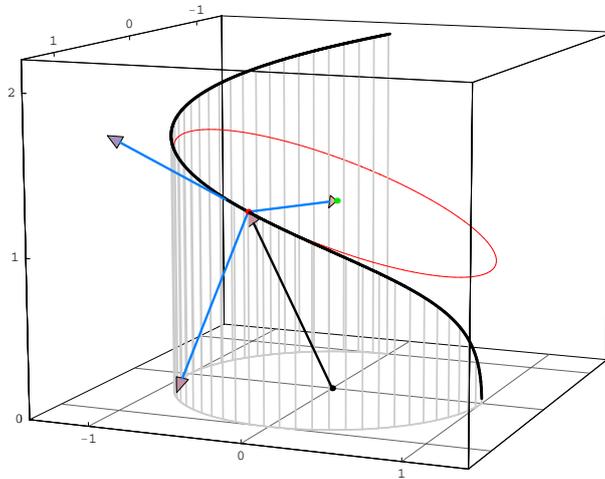


Abbildung 2.3: Die Spur einer Kurve mit Parametrisierung auf Bogenlänge φ und das Dreibein $\{\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'(t) \times \varphi''(t)\}$ an der Stelle $\varphi(t)$.

Das **Vektorprodukt** in \mathbb{R}^3 , auch Kreuzprodukt genannt, hat folgende Eigenschaften: Sei $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ und $s, t \in \mathbb{R}$.

- $u \times v = -v \times u$, also $u \times u = 0$;
- $(su + tv) \times w = s(u \times w) + t(v \times w)$;
- $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin(\angle uOv)$ ist der Flächeninhalt vom Parallelogramm mit den Ecken $O, u, u + v$ und v ;
- $\{u, v, u \times v\}$ ist positiv orientiert (Rechterhandregel);
- $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$, die Graßman-Identität;
- $(u \times v) \cdot w = \det(u, v, w)$ mit u, v, w als Spaltenvektoren. Wenn $\{u, v, w\}$ positiv orientiert ist, gleicht $\det(u, v, w)$ dem Inhalt des Parallelepipeds (wird auch Spat genannt),

$$P = \{c_1 u + c_2 v + c_3 w; 0 \leq c_i \leq 1\}.$$

Beweise finden Sie bei der Linearen Algebra.

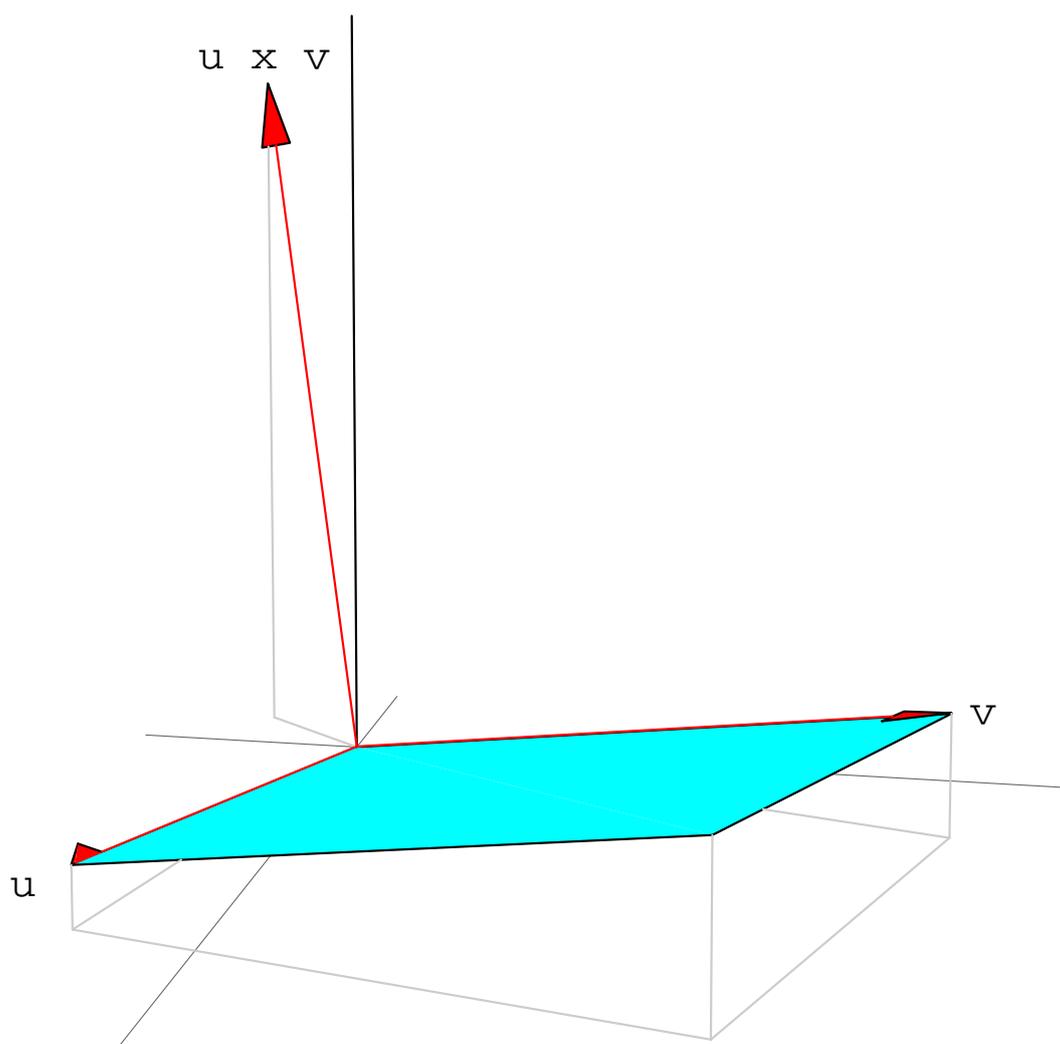
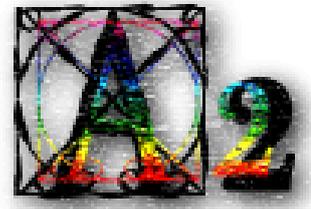


Abbildung 2.4: Darstellung vom Vektorprodukt (Kreuzprodukt) in \mathbb{R}^3

Analysis 2, Woche 3

Differentialgleichungen I



3.1 Eine Einleitung

Eine Differentialgleichung beschreibt eine Beziehung zwischen Ableitungen einer Funktion oder Vektorfunktion und dieser Funktion selbst. Die Gleichung wird meistens geliefert durch ein physikalisches Modell. Das Finden des richtigen Modells oder das Modellieren ist eine Kunst an sich, ist aber keinesfalls unabhängig von den mathematischen Ergebnissen, die aus der Differentialgleichung folgen. Nur wenn diese Ergebnisse sich umsetzen lassen in vernünftige Aussagen für das physikalische Problem, kann das Modell passend sein.

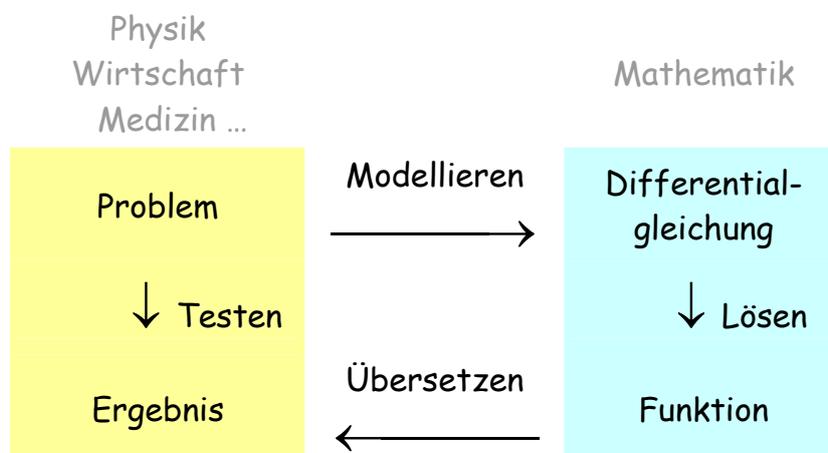


Abbildung 3.1: Das Modell ist nicht die DGL und die Lösung ist nicht das Ergebnis.

Beispiel 3.1 *Beschränktes Wachstum liefert die logistische Differentialgleichung:*

$$d'(t) = d(t) (1 - d(t)). \quad (3.1)$$

Beispiel 3.2 *Das idealisierte Federpendel ohne Reibung:*

$$u''(t) = g - c_{Hooke} u(t). \quad (3.2)$$

Beispiel 3.3 *Das Pendel einer Uhr (ohne Reibung):*

$$\varphi''(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\varphi(t)). \quad (3.3)$$

Beispiel 3.4 *Das Auto bei einer Vollbremsung:*

$$x''(t) = -c_{Reifen} \operatorname{sign}(x'(t)). \tag{3.4}$$

Statt selber Lösungen zu suchen, könnte man Computer-Algebra-Systeme verwenden. Für diese vier ersten Beispiele folgen die Ergebnisse von Mathematica und Maple in Abbildung 3.2 und 3.3. Ein totales Vergnügen ist es nicht.

```

> dsolve(diff(d(t), t) = d(t) · (1 - d(t)));
                                     d(t) =  $\frac{1}{1 + e^{(-t) \_C1}}$ 
> dsolve(diff(d(t), t) = g - c · d(t));
                                     d(t) =  $\sin(\sqrt{c} t) \_C2 + \cos(\sqrt{c} t) \_C1 + \frac{g}{c}$ 
> dsolve(diff(phi(t), t) = - $\frac{g}{l}$  sin(phi(t)));
     $\int^{\phi(t)} \frac{l}{\sqrt{l(2g \cos(\_a) + \_C1 l)}} d\_a - t - \_C2 = 0, \int^{\phi(t)} -\frac{l}{\sqrt{l(2g \cos(\_a) + \_C1 l)}} d\_a - t - \_C2 = 0$ 
> dsolve(diff(x(t), t) = -c · sign(diff(x(t), t)));
                                     x(t) =  $-\frac{1}{2} c t^2 + \_C1 t + \_C2$ 

```

Abbildung 3.2: Die Lösungen von Maple

```

In[1]= DSolve[d'[t] == d[t] (1 - d[t]), d[t], t]
Out[1]= {{d[t] ->  $\frac{e^t}{e^t - e^{C[1]}}$ }}
In[2]= DSolve[u''[t] == g - C_Hooke u[t], u[t], t]
Out[2]= {{u[t] -> C[2] Cos[t Sqrt[C_Hooke]] + C[1] Sin[t Sqrt[C_Hooke]] +  $\frac{g}{C_Hooke}$ }}
In[3]= DSolve[phi''[t] == - $\frac{g}{l}$  Sin[phi[t]], phi[t], t]
Solve::ifun :
Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not
be found; use Reduce for complete solution information. More...
Out[3]= {{phi[t] -> 2 JacobiAmplitude[
 $\frac{\sqrt{2 g t^2 + 1 t^2 C[1] + 4 g t C[2] + 2 1 t C[1] C[2] + 2 g C[2]^2 + 1 C[1] C[2]^2}}{2 \sqrt{1}}$ ,
 $\frac{4 g}{2 g + 1 C[1]}$ ], {phi[t] -> 2 JacobiAmplitude[
 $\frac{\sqrt{2 g t^2 + 1 t^2 C[1] + 4 g t C[2] + 2 1 t C[1] C[2] + 2 g C[2]^2 + 1 C[1] C[2]^2}}{2 \sqrt{1}}$ ,
 $\frac{4 g}{2 g + 1 C[1]}$ ]}]}
In[4]= DSolve[x'[t] == -C_Reifen Sign[x[t]], x[t], t]
Solve::eqf : -Re[ $\frac{1}{1 - x[t]}$ ] < 0 is not a well-formed equation. More...

```

Abbildung 3.3: Die Lösungen von Mathematica

Weil diese Differentialgleichungen verwendet werden beim Modellieren von physikalischen Größen ist es üblich, dass man Lösungen versteht als Funktionen, die nicht nur die Differentialgleichungen erfüllen, sondern auch auf eine zusammenhängende Menge definiert sind.

Definition 3.5 Sei $F : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man nennt die Funktion x eine Lösung der Differentialgleichung k -ter Ordnung

$$x^{(k)}(t) = F(x^{(k-1)}(t), x^{(k-2)}(t), \dots, x'(t), x(t), t), \quad (3.5)$$

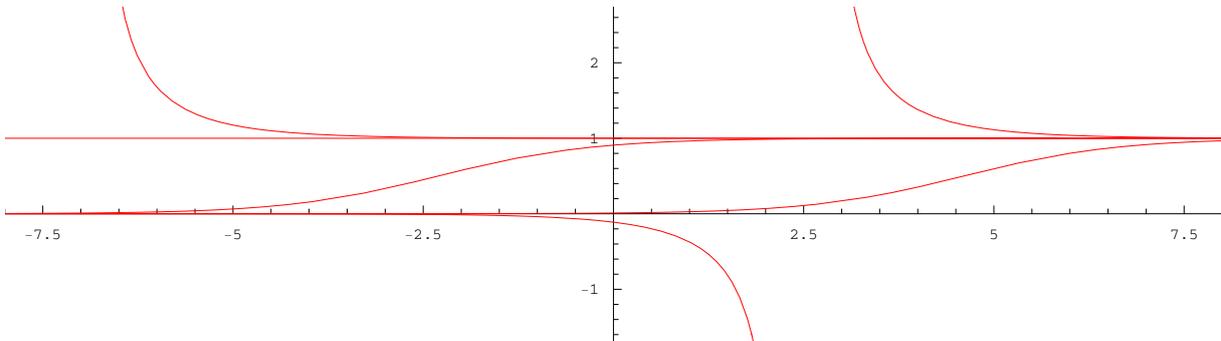
wenn es ein Intervall I in \mathbb{R} gibt derart, dass $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -mal differenzierbare Funktion ist und dass für alle $t \in I$ die Gleichung (3.5) erfüllt ist.

Schauen wir uns jetzt mal an, welche Resultate diese Computer Algebra Systemen uns gebracht haben und vergleichen wir sie mit den möglichen Lösungen.

Fortsetzung von Beispiel 3.1 Die Lösungen, die Mathematica und Maple gefunden haben für $d'(t) = d(t)(1 - d(t))$, sind als Formeln erschienen. Klar fehlt bei Maple und Mathematica die Lösung $d(t) = 0$. bei Mathematica fehlt noch mehr, es sei denn, man erlaubt $C[1] \in \mathbb{C}$. Wenn man alle Lösungen von (3.1) betrachtet, das heißt als Funktionen $d : I \rightarrow \mathbb{R}$, mit $I \subset \mathbb{R}$ einem Intervall, dann bekommt man:

- | | | | | |
|------|---------------|--|-----|------------------------------|
| I. | für $c < 0$, | $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | mit | $d(t) = \frac{e^t}{e^t - c}$ |
| II. | für $c > 0$, | $d : (\log c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ | mit | $d(t) = \frac{e^t}{e^t - c}$ |
| III. | für $c > 0$, | $d : (-\infty, \log c) \rightarrow \mathbb{R}$ | mit | $d(t) = \frac{e^t}{e^t - c}$ |
| IV. | | $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | mit | $d(t) = 0$ |
| V. | | $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | mit | $d(t) = 1$ |

Man sieht, dass es Lösungen gibt mit (einseitig) beschränktem Definitionsgebiet und mit dem ganzen \mathbb{R} als Definitionsgebiet. Das zusammenhängende Definitionsgebiet für eine Lösung wird das **Existenzintervall** genannt. Ein Bild mit der Skizze einiger Lösungen folgt. Obwohl sich diese unterschiedliche Lösungen der Anschein nach berühren, sind sie in Wirklichkeit überall verschieden.



Fortsetzung von Beispiel 3.2 Die Differentialgleichung $u''(t) = g - c_{\text{Hooke}} u(t)$ enthält Ableitungen zweiter Ordnung und in der Lösungsformel stehen 2 Konstanten. Wenn die Differentialgleichung nicht entartet ist, gilt solches allgemein. Eine nicht-entartete Differentialgleichung, die eine Ableitung n -ter Ordnung enthält, hat n freie Konstanten in ihrer allgemeinen Lösungsformel.

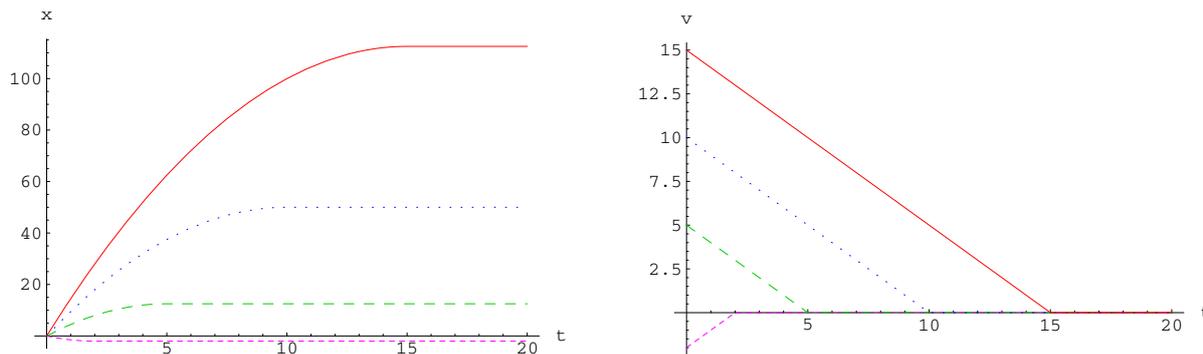
Fortsetzung von Beispiel 3.3 Diese Differentialgleichung $\varphi''(t) = -\frac{g}{l} \sin(\varphi(t))$ lässt sich nicht explizit lösen mit Hilfe der üblichen Funktionen. Anscheinend kennt Mathematica eine Funktion, die Maple nicht kennt.

Fortsetzung von Beispiel 3.4 Für dieses Beispiel gibt Mathematica eine unverständliche Antwort, die eine ganze Seite braucht (und weggelassen ist) und Maple gibt eine falsche

Lösung. Man muss gestehen, dass man den Standardlösungsbegriff für diese letzte Differentialgleichung $x''(t) = -c_{Reifen} \text{sign}(x'(t))$ erweitern muss. Die Funktionen, die man als Lösung zulassen möchte, sind nämlich nicht überall zweimal differenzierbar:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \text{sign}(v_0) c_{Reifen} t^2 & \text{für } 0 \leq t < \frac{|v_0|}{c_{Reifen}}, \\ x_0 + \frac{v_0 |v_0|}{2c_{Reifen}} & \text{für } t \geq \frac{|v_0|}{c_{Reifen}}, \end{cases}$$

wo v_0 die Anfangsgeschwindigkeit ist. Man sieht, dass sich der Bremsweg 'quadratisch' zu v_0 verhält. Ein Bild mit Skizzen von einigen x und die dazugehörige $v = x'$ findet man anschließend. Für die Konstante c_{Reifen} ist 1 gewählt. Und wer fuhr rückwärts?



Beispiel 3.6 Das Sprungbrett im Schwimmbad, auf dem jemand bewegungslos steht:

$$u''''(x) = f(x).$$

Lösungen findet man durch vier mal Integrieren, oder auch als

$$u(x) = \frac{1}{6} \int_0^x (x-s)^3 f(s) ds + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3.$$

Beispiel 3.7 Das Lorenz-System:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \alpha (y(t) - x(t)) \\ y'(t) &= \beta x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) &= x(t)y(t) - \gamma z(t) \end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ (meistens \mathbb{R}^+). Explizite Lösungen gibt es kaum. Für bestimmte Parameter zeigen die Lösungen (numerische Approximation) chaotisches Verhalten. Es hat viele Mathematiker dazu gebracht, derartige Systeme genauer zu studieren.

Im allgemeinen sieht so eine gewöhnliche¹ Differentialgleichung aus wie

$$F(x^{(n)}(t), x^{(n-1)}(t), \dots, x''(t), x'(t), t) = 0.$$

Die höchste Ableitung die erscheint, heißt die **Ordnung** der Differentialgleichung. Wenn man so eine Dgl. in **expliziter Form** schreiben kann:

$$x^{(n)}(t) = G(x^{(n-1)}(t), \dots, x''(t), x'(t), t)$$

hat diese Dgl. Ordnung n .

¹Gewöhnlich wird als Gegensatz zu partiell benutzt. Eine partielle Differentialgleichung gibt eine Beziehung zwischen partiellen Ableitungen einer Funktion mehrerer Veränderlichen. Zum Beispiel $\frac{\partial}{\partial t}x(t, s) + \frac{\partial}{\partial s}x(t, s) = x(t, s)$. Wir werden hier nur gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten.

Problem 3.8 Wenn man eine Differentialgleichung vorgesetzt bekommt, hätte man am liebsten, dass es eine explizit bekannte Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{R}^n bei einem System von mehreren Differentialgleichungen) gibt derart, dass die Gleichung erfüllt ist. Leider passiert das recht selten. Meistens muss man sich zufrieden geben, wenn man die folgenden Fragen beantworten kann:

1. Gibt es eine Lösung?
2. Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig?
3. Kann man qualitative Ergebnisse für diese Lösung finden?

Obwohl für die meisten Dgl. keine explizite Lösung zu finden ist, ist es doch vernünftig, sich die Fälle, bei denen es eine explizite Lösungsmöglichkeit gibt, mal genauer anzugehen. Einige wichtige Klasse sind die linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

3.2 Lineare Gleichungen, konstante Koeffizienten

Definition 3.9 Eine Differentialgleichung der Form

$$x^{(n)}(t) = a_1(t)x^{(n-1)}(t) + a_2(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) + f(t)$$

nennt man **linear**.

- Man sagt '**mit konstanten Koeffizienten**', wenn $a_i(t) = a_i \in \mathbb{R}$ für jede $i = 1, \dots, n$ und $t \in \mathbb{R}$.
- Man nennt diese lineare Gleichung **homogen**, wenn $f = 0$.

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind wichtig aus zwei Gründen: 1) die Lösungen sind relativ einfach und ziemlich explizit zu konstruieren, 2) man kann sie verwenden, das Benehmen von nicht-linearen Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung zu studieren.

3.2.1 Einfache Beispiele

Die einfachste Differentialgleichung die man sich vorstellen kann, ist

$$x'(t) = f(t). \tag{3.6}$$

Die Frage, die man sich stellt, heißt:

Wenn die Funktion f gegeben ist, welche Funktion ist x ?

Bemerkung 3.9.1 Die erste Frage sollte eigentlich nicht lauten, welche Funktion dieses x ist, sondern ob es sie gibt und ob es die einzige ist? Weil wir diese Differentialgleichung auf eine konstruktive Art lösen können, werden all diese Fragen gleichzeitig beantwortet.

Der Hauptsatz der Integralrechnung sagt dass, wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds$$

eine differenzierbare Funktion ist und, dass sogar gilt

$$F'(t) = f(t).$$

Das heißt, eine Lösung für (3.6) haben wir gefunden, nämlich $x = F$. Man sieht auch sofort, dass es auch eine Lösung sein wird, wenn man eine Konstante addiert zu diesem F . Um eine eindeutige Lösung zu haben, muss man wohl x an irgendeiner Stelle $t \in [a, b]$ festlegen.

Lemma 3.10 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$, dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t) \text{ für } t \in [a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases} . \quad (3.7)$$

genau eine Lösung, nämlich

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s) ds.$$

Bemerkung 3.10.1 Eine Lösung heißt hier eine differenzierbare Funktion $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die beide Gleichungen in (3.7) erfüllt.

Beweis. Der Hauptsatz der Integralrechnung besagt, dass $x(t) = x_0 + \int_a^t f(s) ds$ eine Lösung ist. Diese Funktion ist die einzige Lösung. Wenn x und \tilde{x} beide Lösungen wären, dann gilt für $y := x - \tilde{x}$, dass

$$y' = x' - \tilde{x}' = f - f = 0.$$

Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass y konstant ist. Also gilt

$$y(t) = y(a) = x(a) - \tilde{x}(a) = x_0 - x_0 = 0$$

und es folgt $x = \tilde{x}$. ■

Die zweit-einfachste Differentialgleichung die man sich vorstellen kann, ist

$$x'(t) = x(t). \quad (3.8)$$

Aus seiner Kindheit kann man sich vielleicht noch daran erinnern, dass

$$x(t) = e^t$$

eine Lösung ist und dass man sogar mehrere Lösungen hat. Sei $c \in \mathbb{R}$, dann ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x(t) = ce^t$ Lösung von (3.8). Wenn $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x(0) = x_0$ gegeben ist, findet man $x(t) = e^t x_0$.

Dass man auf diese Weise alle Lösungen bekommt sieht man, indem man $x(t)$ ersetzt durch $y(t) = e^{-t}x(t)$. Dann folgt $x(t) = e^t y(t)$ und (3.8) ändert sich in

$$e^t y(t) + e^t y'(t) = e^t y(t).$$

Das heißt, $y'(t) = 0$ und $y(t) = y(0) = e^0 y(0) = x_0$ ist die einzige Möglichkeit. Also ist auch $x(t) = e^t y(t) = e^t x_0$ die einzige Lösung.

Ebenso findet man für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) \text{ für } t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases} . \quad (3.9)$$

hat als einzige Lösung die Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = e^{\lambda t} x_0.$$

Die dritt-einfachste Differentialgleichung die man sich vorstellen kann², ist die Kombination von beiden vorhergehenden

$$x'(t) = x(t) + f(t). \quad (3.10)$$

Substituieren wir wie vorhin $x(t) = e^t y(t)$, dann folgt

$$e^t y(t) + e^t y'(t) = e^t y(t) + f(t).$$

Das lässt sich vereinfachen zu $y'(t) = e^{-t} f(t)$ und formal können wir diese Differentialgleichung lösen:

$$y(t) = \int_a^t e^{-s} f(s) ds + c.$$

Für x finden wir

$$x(t) = e^t x_0 + e^t \int_a^t e^{-s} f(s) ds.$$

Lemma 3.11 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$, dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + f(t) \text{ für } t \in [a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases}. \quad (3.11)$$

genau eine Lösung, nämlich

$$x(t) = e^{\lambda t} x_0 + \int_a^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds. \quad (3.12)$$

Wenn man die vorhin erklärten Schritte verfolgt, kann man sofort einen Beweis bekommen. Normalerweise lernt man die Formel in (3.12) nicht auswendig, sondern man wendet den folgenden Trick an. Man nennt diesen Trick: Variation der Konstante.

Algorithmus 3.1 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Man sucht eine Lösung x von

$$x'(t) = \lambda x(t) + f(t). \quad (3.13)$$

1. Das Lösen des homogenen Problems $x'(t) = \lambda x(t)$ liefert $x(t) = e^{\lambda t} c$ mit $c \in \mathbb{R}$.
2. Man sucht die Lösungen von (3.13) durch Substitution $x(t) = e^{\lambda t} c(t)$.

Beispiel 3.12 Gefragt sind die Lösungen von $x'(t) = 4x(t) + 2 \sinh(4t)$.

Die homogene Gleichung $x'(t) = 4x(t)$ hat $x(t) = e^{4t} c$ mit $c \in \mathbb{R}$ als Lösungen.

Die Substitution $x(t) = e^{4t} c(t)$ liefert

$$4e^{4t} c(t) + e^{4t} c'(t) = 4e^{4t} c(t) + 2 \sinh(4t) = 4e^{4t} c(t) + e^{4t} - e^{-4t}.$$

Das heißt $c'(t) = 1 - e^{-8t}$ und

$$c(t) = c_1 + \int_0^t (1 - e^{-8s}) ds = c_1 + t + \frac{1}{8} (e^{-8t} - 1)$$

liefert

$$x(t) = \tilde{c}_1 e^{4t} + t e^{4t} + \frac{1}{8} e^{-4t}.$$

Die Funktion x ist wohldefiniert auf \mathbb{R} .

²Es soll schon mehr originelle Texte gegeben haben ...

Beispiel 3.13 Gefragt sind die Lösungen von $x'(t) = -x(t) + \log(t)$.

Die homogene Gleichung $x'(t) = -x(t)$ hat $x(t) = e^{-t}c$ mit $c \in \mathbb{R}$ als Lösungen.

Die Substitution $x(t) = e^{-t}c(t)$ liefert

$$-e^{-t}c(t) + e^{-t}c'(t) = -e^{-t}c(t) + \log(t).$$

Das heißt $c'(t) = e^t \log(t)$ und

$$c(t) = c_1 + \int_1^t e^s \log(s) ds$$

liefert

$$x(t) = c_1 e^{-t} + \int_1^t e^{s-t} \log(s) ds.$$

Die Funktion x ist wohldefiniert auf $(0, \infty)$.

3.3 Lineare Systeme, konstanten Koeffizienten

Mit dieser Überschrift werden folgende Probleme gemeint. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ gegeben und man versucht $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu finden derart, dass das folgende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \cdots + a_{1n} x_n(t) + f_1(t), \\ x_2'(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \cdots + a_{2n} x_n(t) + f_2(t), \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \cdots + a_{nn} x_n(t) + f_n(t). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Das homogene Problem hat folgende Form:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11} x_1(t) + a_{12} x_2(t) + \cdots + a_{1n} x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21} x_1(t) + a_{22} x_2(t) + \cdots + a_{2n} x_n(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1} x_1(t) + a_{n2} x_2(t) + \cdots + a_{nn} x_n(t) \end{aligned} \tag{3.15}$$

oder, wenn wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

verwenden, kürzt sich (3.15) auf

$$x'(t) = A x(t),$$

wobei nicht zu vergessen ist, dass $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gesucht wird.

Diese Gleichung sieht sehr ähnlich aus wie (3.9).

Kann man die exp-Funktion verwenden?

Wir erinnern noch mal daran, dass die Exponentialfunktion als eine Potenzreihe definiert ist:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (3.16)$$

und dass diese Potenzreihe den Konvergenzradius ∞ hat. Außerdem gilt innerhalb des Konvergenzradius, dass

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^k}{k!} \right)'.$$

Statt in (3.16) $z \in \mathbb{C}$, könnte man auch $z \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ nehmen; $M^{n \times n}(\mathbb{R})$ sind die $n \times n$ Matrizen mit reellen Koeffizienten.

Definition 3.14 Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$. Man definiert

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Bemerkung 3.14.1 Statt $\exp(A)$ schreibt man auch e^A .

Lemma 3.15 Für alle $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ konvergiert $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k$ in $M^{n \times n}(\mathbb{C})$. Oder anders gesagt: $\exp(A)$ ist wohldefiniert.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede Komponente $\left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k \right)_{i,j}$ konvergiert für $\ell \rightarrow \infty$. Setzen wir

$$m = \max \{ |A_{ij}| ; 1 \leq i, j \leq n \}.$$

Dann gilt für den i, j -Eintrag von $\frac{1}{k!} A^k$, dass

$$\left| \left(\frac{1}{k!} A^k \right)_{i,j} \right| \leq \left(\frac{1}{k!} \begin{pmatrix} m & m & \cdots & m \\ m & m & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & \cdots & m \end{pmatrix}^k \right)_{i,j} = \frac{m^k n^{k-1}}{k!}.$$

Weil die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k n^{k-1}}{k!}$$

konvergiert, nämlich nach $\frac{1}{n} e^{mn}$, ergibt das Majorantenkriterium, dass auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} A^k \right)_{i,j}$$

konvergiert. ■

Lemma 3.16 Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.17)$$

genau eine Lösung, nämlich die Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$x(t) = \exp(At) x_0.$$

Beweis. Durch Lemma 3.15 wissen wir, dass jede Komponente von $\exp(At)$ Konvergenzradius ∞ hat. Auch wissen wir, dass man innerhalb des Konvergenzradius die Folge von Summe und Ableitung ändern darf, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Das heißt:

$$\begin{aligned} (\exp(At)x_0)' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (At)^k x_0 \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} (At)^k x_0 \right)' = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} A^k t^{k-1} x_0 = A \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell t^\ell x_0 = A \exp(At)x_0. \end{aligned}$$

Weil³

$$(\exp(At)x_0)_{t=0} = e^O x_0 = I x_0 = x_0$$

gilt, ist $x(t) := e^{At}x_0$ eine Lösung von (3.17).

Ist es die einzige Lösung? Nehmen wir an, es gibt mindestens zwei Lösungen x und \tilde{x} . Dann erfüllt $\hat{x} = x - \tilde{x}$ das Anfangswertproblem (3.17) mit $\hat{x}(0) = 0$. Wir betrachten $y(t) := e^{-At}\hat{x}(t)$. Es folgt, dass

$$y(0) = e^O \hat{x}(0) = I 0 = 0$$

und, weil wie oben $(e^{-At})' = -Ae^{-At}$, gilt auch

$$\begin{aligned} y'(t) &= (e^{-At}\hat{x}(t))' = -Ae^{-At}\hat{x}(t) + e^{-At}\hat{x}'(t) = \\ &= e^{-At}(\hat{x}'(t) - A\hat{x}(t)) = e^{-At} 0 = 0, \end{aligned}$$

und wir finden $y'_i(t) = 0$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Das heißt, jede Komponente, also auch y ist konstant und wegen des Anfangswertes sogar 0. Weil⁴

$$e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$$

gilt auch

$$\hat{x}(t) = e^{At}e^{-At}\hat{x}(t) = e^{At}y(t) = e^{At}0 = 0.$$

Weil wir angenommen haben, dass x und \tilde{x} unterschiedlich sind, haben wir einen Widerspruch erzeugt. ■

³Hier ist $I \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ die Identitätsmatrix und $O \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ die Nullmatrix:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

⁴Wir haben hier folgendes Ergebnis benutzt:

Lemma 3.17 Seien $A, B \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ (oder $M^{n \times n}(\mathbb{C})$). Dann gilt

$$e^{tA}e^{sB} = e^{tA+sB} \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R}$$

dann und nur dann, wenn

$$AB = BA.$$

Das allgemeine Problem in (3.14), bei dem man auch eine rechte Seite $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zulässt, das heißt

$$x'(t) = A x(t) + f(t),$$

bei dem wiederum $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gesucht wird, kann man genau so lösen wie in Lemma 3.11.

Satz 3.18 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t) \text{ für } t \in [a, b] \\ x(a) = x_0 \end{cases} . \quad (3.18)$$

genau eine Lösung $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, nämlich

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_a^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (3.19)$$

Bemerkung 3.18.1 Das Integral über einer Vektorfunktion ist definiert als Vektor von den Integralen der einzelnen Komponenten. Also für $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit integrierbaren Komponenten g_i , $i = 1, \dots, n$

$$\int_a^b g(s)ds = \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(s)ds \\ \int_a^b g_2(s)ds \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(s)ds \end{pmatrix}.$$

Auf der rechten Seite von (3.19) steht so ein Integral.

Bemerkung 3.18.2 Das Definitionsgebiet $[a, b]$ von f wird als Definitionsgebiet für x übernommen. Wenn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist, dann findet man für die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ die Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \quad (3.20)$$

Dabei ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig zu wählen. Die Tatsache, dass das Definitionsgebiet übernommen wird, trifft nur zu bei linearen Gleichungen.

3.4 Berechnung des Exponenten einer Matrix

Beispiel 3.19 Wenn man Maple fragt, bekommt man ziemlich schnell, dass

$$\exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{11+\sqrt{33}}{22}e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} + \frac{11-\sqrt{33}}{22}e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} & \frac{2\sqrt{33}}{33}e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} - \frac{2\sqrt{33}}{33}e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} \\ \frac{\sqrt{33}}{11}e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} - \frac{\sqrt{33}}{11}e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} & \frac{11-\sqrt{33}}{22}e^{-\frac{\sqrt{33}-5}{2}t} + \frac{11+\sqrt{33}}{22}e^{\frac{\sqrt{33}+5}{2}t} \end{pmatrix}.$$

Direkt von Hand so ein Ergebnis zu berechnen ist keine besonders erfreuliche Sache. Man soll als (zukünftiger) Mathematiker aber wissen, wie man es berechnen kann, beziehungsweise wieso der Rechner das so einfach schafft.

Wir geben einige Ergebnisse, die man verwenden kann.

Lemma 3.20 Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ und $t \in \mathbb{R}$.

1. Für eine Ähnlichkeitstransformation $B, T \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ mit T invertierbar gilt:

$$A = TBT^{-1} \Rightarrow \exp(tA) = T \exp(tB) T^{-1}$$

2. Für eine Blockmatrix A , mit $B \in M^{k \times k}(\mathbb{C})$ und $C \in M^{(n-k) \times (n-k)}(\mathbb{C})$ gilt:

$$A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(tB) & O \\ O & \exp(tC) \end{pmatrix}$$

3. Für eine Diagonalmatrix gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

4. Für einen Jordanblock gilt:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} \\ \vdots & & \ddots & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Beweis.

1. Man findet sofort

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(tTBT^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tTBT^{-1})^k = \\ &= T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tB)^k \right) T^{-1} = T \exp(tB) T^{-1}. \end{aligned}$$

2. Auch hier

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp\left(t \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(t \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} t^k B^k & O \\ O & t^k C^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(tB) & O \\ O & \exp(tC) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Das Ergebnis folgt als wiederholte Anwendung von 2.

4. Wir schreiben

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und finden so $A = \lambda I + E$. Weil $\lambda I E = \lambda E = E \lambda I$, das heißt, λI und E kommutieren, folgt mit Lemma 3.17, dass

$$\exp(tA) = \exp(t\lambda I + tE) = \exp(t\lambda I) \exp(tE) = e^{t\lambda} \exp(tE). \quad (3.22)$$

Weil E nilpotent ist (die Linie mit 1 schiebt sich jedesmal nach rechts in E^2 , E^3 usw.) und $E^n = O$, gilt

$$\begin{aligned} \exp(tE) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tE)^k = I + tE + \frac{t^2}{2} E^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} E^{n-1} + O = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!} t^2 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} t^2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und kombiniert man mit (3.22), folgt so das gewünschte Ergebnis. \blacksquare

Ohne Beweis werden wir ein Ergebnis aus der Linearen Algebra verwenden, nämlich dass jede Matrix einer Jordan-Matrix ähnlich ist. Vorher wird Jordan-Matrix definiert:

Definition 3.21 Eine Matrix $J \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ ist eine Jordan-Matrix, wenn sie wie folgt aus Blöcken zusammengesetzt ist:

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & O & O & \cdots & \cdots & O \\ O & B_2 & O & & & \vdots \\ O & O & B_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & B_{k-1} & O \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & O & B_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Jede Matrix ist ähnlich einer Jordan-Matrix heißt:

Satz 3.22 Für jede $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ gibt es eine invertierbare Matrix $T \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ und eine Jordan-Matrix $J \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ derart, dass

$$A = TJT^{-1}.$$

Einen Beweis sollte man in der Vorlesung Linearen Algebra bekommen. Die Skalare λ_i , die in J erscheinen, sind die Eigenwerte von A .

- Die algebraische Vielfachheit von λ_i , das heißt die Vielfachheit von λ_i als Nullstelle vom Polynom $\det(A - \lambda I)$, liest man ab in J als die Anzahl der λ_i auf der Diagonalen von J .
- Die geometrische Vielfachheit von λ_i ist die Dimension vom Eigenraum

$$\dim \{ \phi \in \mathbb{C}^n; A\phi = \lambda_i \phi \},$$

diese findet man zurück als die Anzahl der Jordan-Blöcke B_j mit λ_i auf der Diagonalen.

- Wenn die geometrische Vielfachheit von λ_i echt kleiner ist als die algebraische, dann gibt es mindestens einen generalisierten Eigenvektor der ersten Ordnung:

- $\phi \in \mathbb{C}^n$ ist ein generalisierter Eigenvektor der k -ten Ordnung für A beim Eigenwert λ_i , wenn

$$(A - \lambda_i I)^{k+1} \phi = 0 \text{ und } (A - \lambda_i I)^k \phi \neq 0.$$

- wenn $\phi \in \mathbb{C}^n$ ein generalisierter Eigenvektor der k -ten Ordnung beim Eigenwert λ_i ist, dann ist $(A - \lambda_i I)\phi$ ein generalisierter Eigenvektor der $(k-1)$ -ten Ordnung beim Eigenwert λ_i . Eigenvektoren soll man auffassen als generalisierter Eigenvektor der 0-ten Ordnung.

- Jede Matrix hat einen Basis aus Eigenvektoren und generalisierten Eigenvektoren.

Wenn man eine Zerlegung der Form $A = TJT^{-1}$ gefunden hat, dann kann man mit Hilfe von Lemma 3.20 $\exp(tA) = T \exp(tJ)T^{-1}$ berechnen.

Beispiel 3.23 Für die Matrix, die wir vorhin benutzt haben, hat man

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3-\sqrt{33}}{4} & \frac{3+\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{33}-11}{22} & -\frac{2\sqrt{33}}{33} \\ \frac{11-\sqrt{33}}{22} & \frac{2\sqrt{33}}{33} \end{pmatrix}$$

und es folgt das Ergebnis von vorhin.

Beispiel 3.24 Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ findet man durch $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$, das heißt

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 - i$ und $\lambda_2 = 1 + i$. Zwei dazugehörige Eigenvektoren sind:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ und } \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

und

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1-i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.25 Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

hat als Lösung $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t + 2e^t \sin t \\ -e^t \sin t + 2e^t \cos t \end{pmatrix}.$

Beispiel 3.26 Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die Eigenwerte λ der Matrix findet man aus

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = 0,$$

nämlich $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$. Dazugehörige Eigenvektoren sind $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Man kann den formellen Weg gehen:

$$\begin{aligned} \exp\left(t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} & \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \\ \frac{4}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Man kann sich auch überlegen, dass $x(0) = \frac{1}{3}\varphi_1 + \frac{2}{3}\varphi_2$ und deshalb

$$x(t) = \frac{1}{3}e^{\lambda_1 t}\varphi_1 + \frac{2}{3}e^{\lambda_2 t}\varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{5t} \\ \frac{4}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

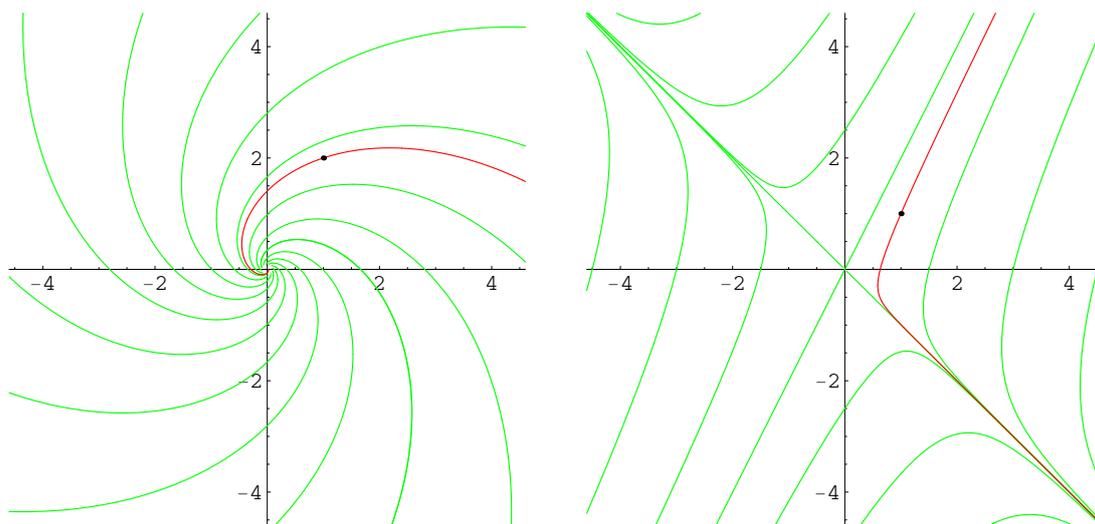


Abbildung 3.4: Links in rot die Spur der Lösung vom Beispiel 3.25. Rechts die Spur der Lösung vom Beispiel 3.26. Einige andere Lösungen zu diesen beiden Differentialgleichungen, also mit anderen Anfangswerten, sind in grün dargestellt. Überlegen Sie, in welcher Richtung diese Spuren durchlaufen werden.

Beispiel 3.27 *Wir betrachten das Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Die Eigenwerte der Matrix sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1 - 2i$ und $\lambda_3 = -1 + 2i$ und dazugehörige Eigenvektoren sind

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man kann den Exponenten berechnen oder direkt den Anfangswert auf eine Basis von Eigenvektoren zerlegen und bekommt schließlich die Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}e^t + \frac{1}{10}e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{10}e^{-t} \sin 2t \\ \frac{3}{20}e^t + \frac{1}{20}e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{20}e^{-t} \sin 2t \\ \frac{3}{5}e^t \end{pmatrix}.$$

Eine Abbildung der Spur folgt:

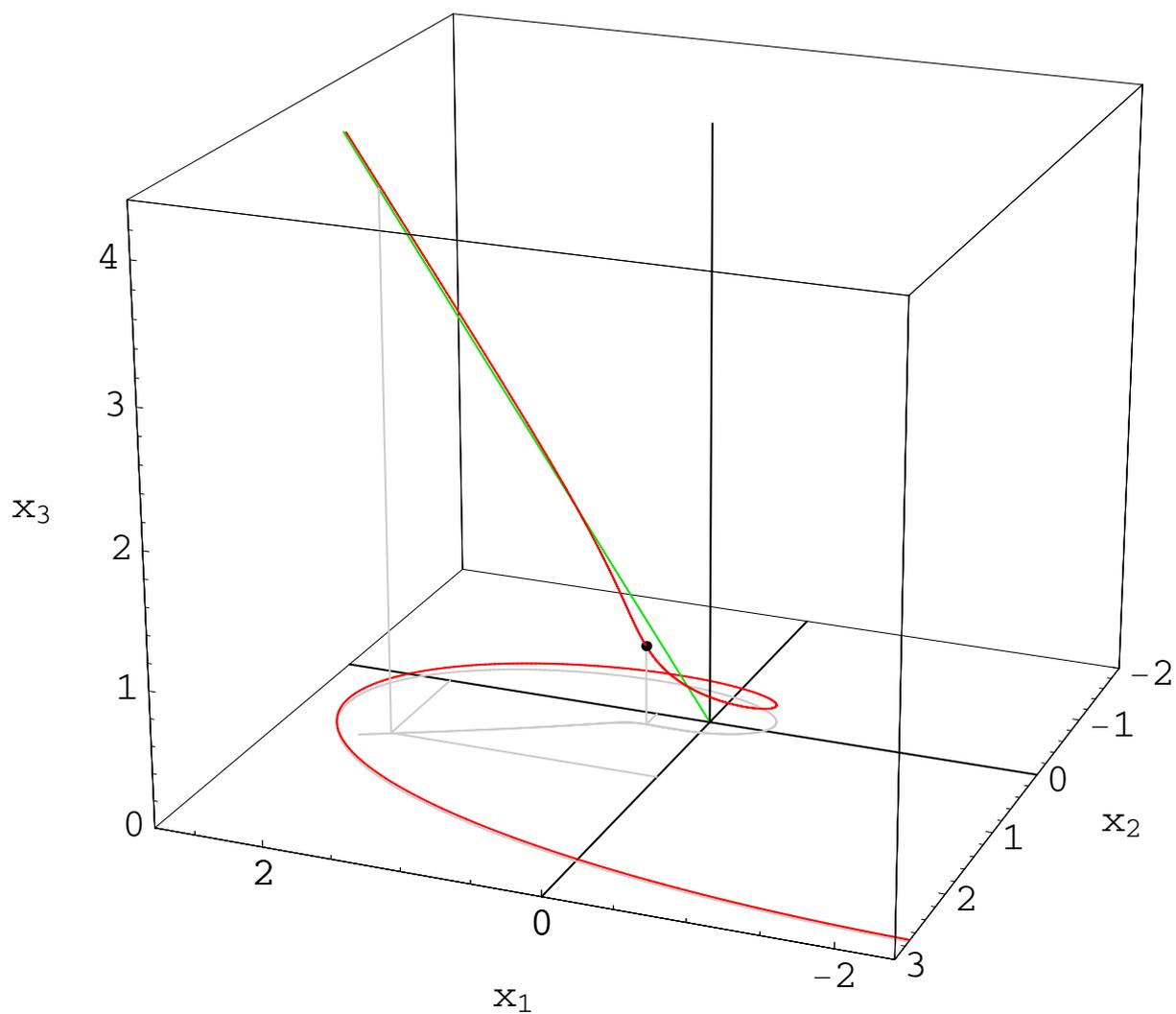
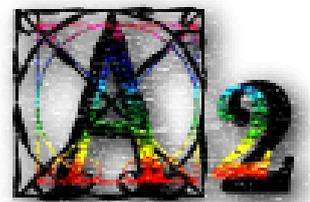


Abbildung 3.5: Die Spur der Lösung vom Beispiel 3.27. Überlegen Sie, in welcher Richtung diese Spur durchlaufen wird. Und was bedeutet die grüne Linie aus $(0,0,0)$ hinauf?

Analysis 2, Woche 4

Differentialgleichungen II



4.1 Lineare Stabilität

Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$. Wir betrachten wiederum ein homogenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$x'(t) = Ax(t). \quad (4.1)$$

Definition 4.1 Das homogene lineare System in (4.1) heißt

- **stabil**, wenn für jede Lösung x gilt, es gibt $M \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\|x(t)\| \leq M \text{ für alle } t \geq 0;$$

- **instabil**, wenn es eine Lösung x gibt derart, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty;$$

- **asymptotisch stabil**, wenn für alle Lösungen x gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0;$$

- **neutral stabil**, wenn das System stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.

Bemerkung 4.1.1 Diese Klassifizierung gilt nur für lineare Systeme. Bei homogenen linearen Systemen ist 0 immer eine Gleichgewichtstelle (= konstante Lösung). Bei Gleichgewichtstellen für nichtlineare Differentialgleichungen werden diese globalen Bedingungen ersetzt durch lokale Bedingungen für eine Umgebung der Gleichgewichtstelle.

In dem letzten Paragraph haben wir gesehen, dass das globale Verhalten bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten eigentlich nur von den Eigenwerten abhängt. Wir bekommen dann auch das folgende Ergebnis.

Lemma 4.2 Sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ und sei $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ die Menge der unterschiedlichen Eigenwerte für A . Nennen wir m_i die geometrische Vielfachheit von λ_i .

1. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt, dann ist (4.1) asymptotisch stabil.

2. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt, dann ist (4.1) instabil.
3. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und die algebraische Vielfachheit für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ mit $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ gleich m_j ist, dann ist (4.1) stabil.
4. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i \geq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt und es außerdem ein $j \in \{1, \dots, k\}$ gibt mit $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, wo die algebraische Vielfachheit nicht m_j gleicht, dann ist (4.1) instabil.

Beweis. Die Lösungstermen die erscheinen, sind $t^{m-1}e^{\lambda_i t}$ mit $m \leq m_i$.

1. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{m-1}e^{\lambda_i t} = 0$.
2. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\lambda_i t}| = \infty$.
3. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, dann gilt $|e^{\lambda_i t}| = 1$ und wenn die algebraische Vielfachheit m_i gleicht für solche λ_i , dann kommt $t^k e^{\lambda_i t}$ mit $k > 0$ nicht vor.
4. Wenn $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ und die algebraische Vielfachheit gleicht nicht m_i für ein solchen λ_i , dann gibt es $t e^{\lambda_i t}$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} |t e^{\lambda_i t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} t = \infty$.

■

Bemerkung 4.2.1 Wenn also gefragt wird, ob alle Lösungen von $x'(t) = Ax(t)$ für $t \rightarrow \infty$ nach 0 konvergieren, braucht man nur die Eigenwerte und gegebenenfalls die Vielfachheiten zu berechnen.

Beispiel 4.3 Das System

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

ist asymptotisch stabil, denn $\lambda_1 = -1 - 3i$ und $\lambda_2 = -1 + 3i$ und $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$.

Beispiel 4.4 Das System

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} x(t)$$

ist instabil, denn es gibt einen Eigenwert¹ $\lambda \approx 4.45087$ und $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

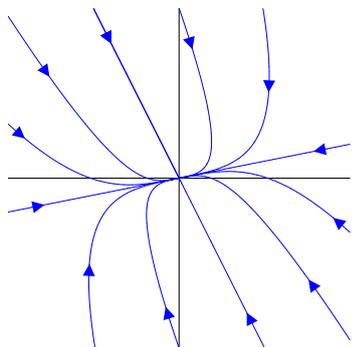
¹Dieser Eigenwert ist numerisch approximiert. Statt numerisch vorzugehen, kann man auch das Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ näher untersuchen. Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von p und für diese Matrix A gilt

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \dots = \lambda^4 + 10\lambda^3 - 200\lambda - 384.$$

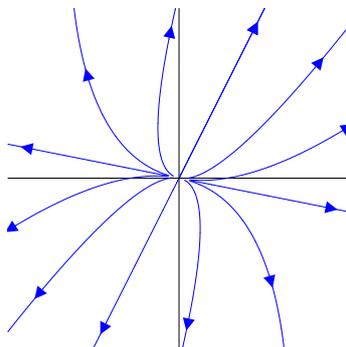
Weil $p(100) > 0$ und $p(0) = -384 < 0$, sagt der Zwischenwertsatz, dass $p(\lambda)$ eine positive Nullstelle besitzt.

4.1.1 Klassifizierung in zwei Dimensionen

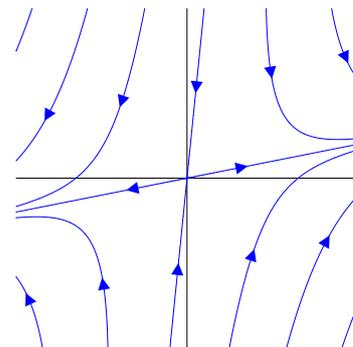
In zwei Dimensionen sind die Möglichkeiten ziemlich übersichtlich. So übersichtlich, dass man sogar individuelle Namen für die auftretenden Fälle² hat.



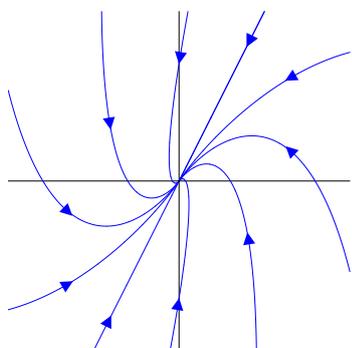
stabiler Knoten
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$
 Basis von Eigenvektoren



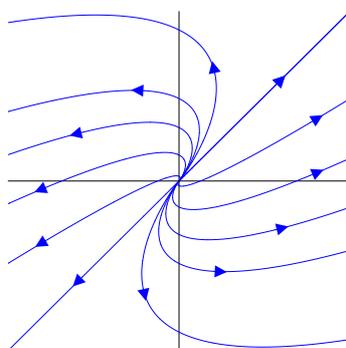
instabiler Knoten
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$
 Basis von Eigenvektoren



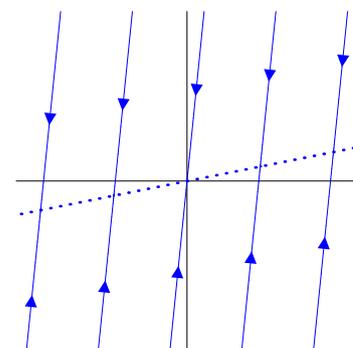
Sattelpunkt
 $\lambda_1 \in \mathbb{R}^-, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$



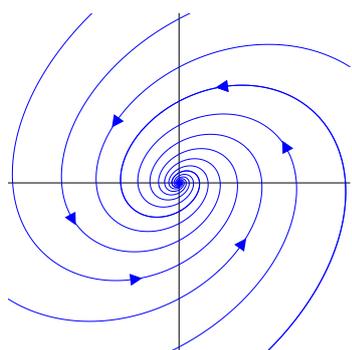
entarteter stabiler Knoten
 $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$
 eindimensionaler Eigenraum



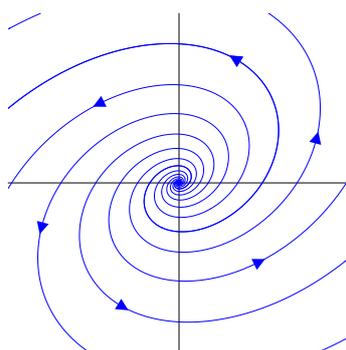
entarteter instabiler Knoten
 $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$
 eindimensionaler Eigenraum



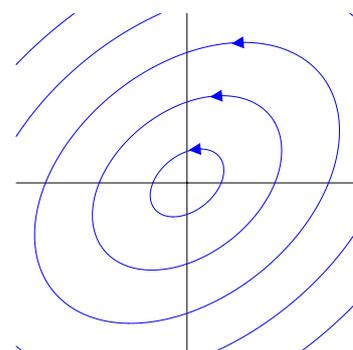
neutral stabiler Knoten
 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$



stabiler Strudel
 $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$



instabiler Strudel
 $\operatorname{Re} \lambda_i > 0, \operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$



Zentrum
 $\operatorname{Re} \lambda_i = 0, \operatorname{Im} \lambda_i \neq 0$

²Für diese Bilder sind folgende Matrizen verwendet worden:

$\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & -13 \\ 49 & 98 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 49 & 49 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -75 \\ 11 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & -25 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -29 \\ 5 & 25 \end{pmatrix},$

4.1.2 Geometrische Zusammenhänge

Das Gleichungssystem

$$x'(t) = A x(t) \quad (4.2)$$

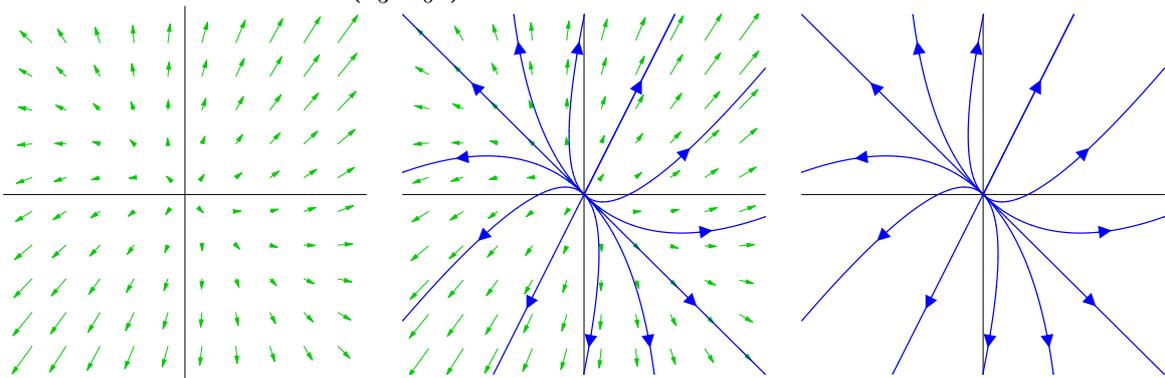
mit $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ gibt eine Beziehung zwischen Position und Richtung einer Lösungskurve. Für $n = 2$ gilt:

Eine Lösung von (4.2) hat an der Stelle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ die Richtung $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Das erlaubt es uns Lösungen zu skizzieren, ohne das System explizit zu lösen, indem wir den Vektoren im Vektorfeld $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 'folgen'.

Formal gesprochen ist ein zweidimensionales Vektorfeld eine Abbildung von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R}^2 . Es lässt sich darstellen, indem man mehrere Punkte in der Ebene nimmt und in jedem Punkt einen Pfeil einzeichnet mit der durch das Vektorfeld angegebenen Größe und Richtung. Man denke an die Wettervorhersage für den Wind.

Beispiel 4.5 Für $x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} x(t)$ hat man:



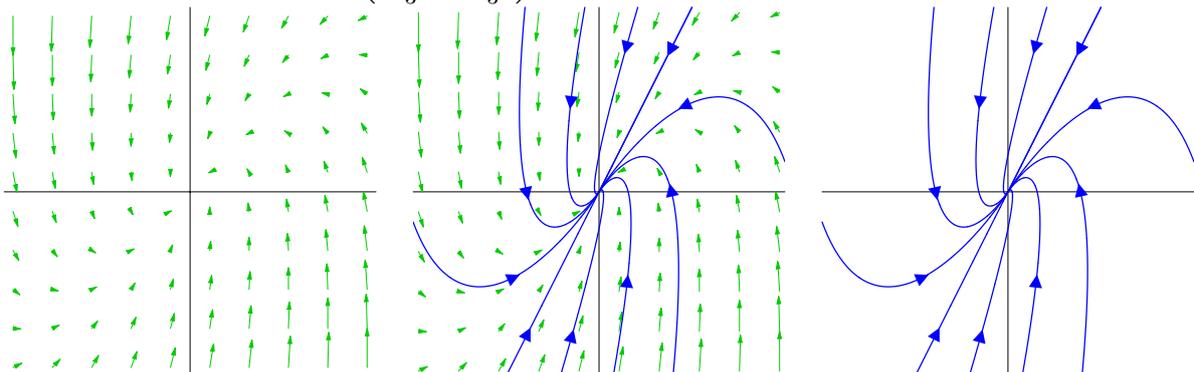
Die Eigenwerte sind 1 und $\frac{1}{2}$ und mit den zugehörigen Eigenvektoren findet man die allgemeine Lösung des Systems:

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{R}.$$

Nach Anfangswert $x(0)$ gelöst wird die Lösung:

$$x(t) = \exp\left(t \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} & \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t} \\ \frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}t} & \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{2}t} \end{pmatrix} x(0).$$

Beispiel 4.6 Für $x'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} x(t)$ hat man:



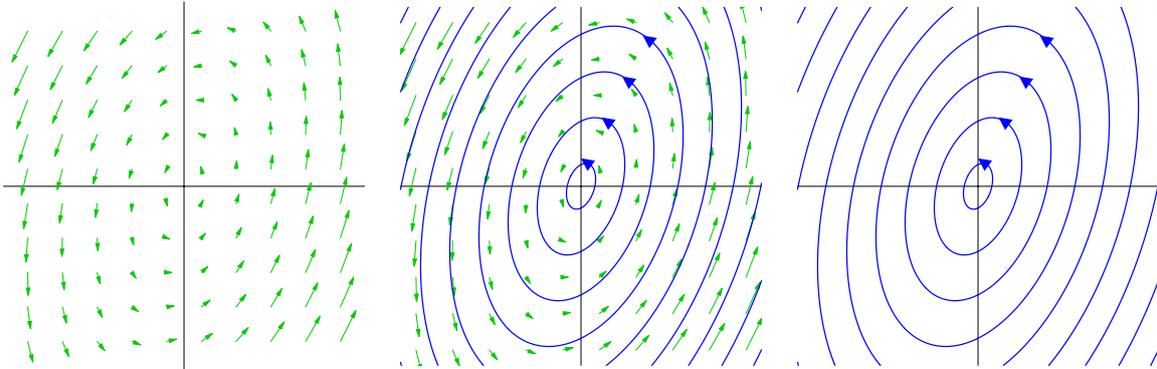
Es gibt hier nur einen Eigenwert: $\lambda = -1$. Verwendet man den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und einen generalisierten Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, wird die allgemeine Lösung des Systems:

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Nach Anfangswert $x(0)$ gelöst wird die Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\right) x(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \exp\left(t \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} x(0) = \begin{pmatrix} e^{-t} + \frac{2}{3}te^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{2}{3}t\left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{4t}e^{-t}\right) \\ \frac{4}{3}te^{-t} & -\frac{4}{3}t\left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{4t}e^{-t}\right) \end{pmatrix} x(0). \end{aligned}$$

Beispiel 4.7 Für $x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} x(t)$ hat man:



Die Lösungen des Systems sind:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \frac{1}{3} \sin t & -\frac{2}{3} \sin t \\ \frac{5}{3} \sin t & \cos t - \frac{1}{3} \sin t \end{pmatrix} x(0).$$

Auch hier kann man die Lösungen mit Eigenvektoren schreiben aber die sind dann in komplexer Form:

$$x(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } c_i \in \mathbb{C}.$$

So eine Lösung ist reell genau dann wenn $c_1 = \overline{c_2}$. Setzt man $c_1 = a + ib$ und $c_2 = a - ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, findet man die reellen Lösungen und erscheinen Termen mit $\cos t$ und $\sin t$. Man erinnere sich, dass $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Bemerkung 4.7.1 In diesen Bilder erkennt man auch die lineare Eigenschaft dieser Systeme. Wenn $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Lösung ist, dann ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ auch $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{x}(t) = cx(t)$ eine Lösung. Für das zugehörige Vektorfeld bedeutet das, dass die Vektoren die auf einer geraden Linie durch den Ursprung liegen parallel sind. Genauer gesagt: an der gleiche Seite zeigen sie in die gleiche Richtung; gegenüber liegend in die entgegengesetzte Richtung.

4.2 Linear, höhere Ordnung, konstante Koeffizienten

Eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann man auch auf diese Art angehen. Sei $f \in C(\mathbb{R})$ und betrachte

$$x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) + f(t). \quad (4.3)$$

Dann setzt man $y_i(t) = x^{(i-1)}(t)$ für $i = 1, \dots, n$ und findet

$$y'(t) = Ay(t) + g(t) \quad (4.4)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Für jeden Eigenwert λ von A gilt $\det(A - \lambda I) = 0$ und das wird jetzt bei der Entwicklung der Determinante nach der letzte Zeile zu

$$(a_1 - \lambda) \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

anders gesagt:

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (4.6)$$

Definition 4.8 Man nennt (4.6) die charakteristische Gleichung für (4.3).

Lemma 4.9 Sei $a_i \in \mathbb{C}$ und sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ wie in (4.5). Jeder Eigenwert von A hat geometrische Vielfachheit gleich 1.

Beweis. Wenn λ ein Eigenwert ist, dann gilt für dazugehörige Eigenvektoren φ

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass

$$\varphi_n = \lambda \varphi_{n-1} = \lambda^2 \varphi_{n-2} = \cdots = \lambda^{n-1} \varphi_1,$$

also höchstens ein unabhängiger Eigenvektor. ■

Satz 4.10 Sei $a_i \in \mathbb{C}$ und sei $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ wie in (4.5). Nehme an, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ sind die Eigenwerte von A mit algebraischen Vielfachheiten $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$.

- Dann ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) \quad (4.7)$$

wie folgt:

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{m_i-1} c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}. \quad (4.8)$$

- Kennt man eine Lösung \tilde{x} von (4.3), dann ist die allgemeine Lösung von (4.3) wie folgt:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{m_i-1} c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}. \quad (4.9)$$

Bemerkung 4.10.1 Um es nochmals genau zu sagen: die Aussagen bedeuten, dass man jede Lösung x schreiben kann, wie es auf der rechten Seite steht und umgekehrt; jede Funktion, die man schreiben kann wie so eine rechte Seite, ist eine Lösung.

Bemerkung 4.10.2 Die Summe der algebraischen Vielfachheiten gleicht n . Die Anzahl der Konstanten in (4.8) gleicht auch der Summe der algebraischen Vielfachheiten. Weil die Funktionen $t^m e^{\lambda_i t}$ (linear) unabhängig sind, bilden die Funktionen in (4.8) einen n -dimensionalen Lösungsraum.

Geht man zurück zum System (4.4) mit A und g wie in (4.5), dann findet man für jeden Anfangswert y_0 genau eine Lösung. Die Übersetzung für (4.3) lautet: für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^n$ hat man genau eine Lösung x vom folgenden Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) + f(t) \\ x(0) = y_0, x'(0) = y_1, x''(0) = y_2, \dots, x^{(n-1)}(0) = y_n. \end{cases}$$

Beweis. Die Lösungen y vom System (4.4) mit A und g wie in (4.5) folgen aus Satz 3.18. Nach Lemma 3.20 enthalten die expliziten Lösungen der homogenen Gleichung nur Termen $c_{m,i} t^m e^{\lambda_i t}$ mit $m \leq m_i - 1$. Das heißt, jede Lösung der homogenen Gleichung kann man schreiben wie auf der rechten Seite von (4.8). Weil man eindeutig hin- und herwechseln kann zwischen der Gleichung n -ter Ordnung für y und dem System erster Ordnung für x , muss auch die Lösung für x in (4.7) n -dimensional sein. Weil die rechte Seite von (4.8) genau n frei zu wählende Konstanten hat, ist jede Funktion auf dieser rechten Seite eine Lösung.

Die Behauptung für die inhomogene Gleichung folgt mit der Bemerkung, dass wenn \tilde{x} und \hat{x} die Gleichung (4.3) erfüllen, die Funktion $x = \tilde{x} - \hat{x}$ eine Lösung von (4.7) ist. ■

Beispiel 4.11 Wir betrachten

$$x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = e^{2t} + t^3. \quad (4.10)$$

Die dazugehörige homogene Gleichung ist $x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = 0$ und die Eigenwerte findet man durch

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Also $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ sind die Eigenwerte und beide haben algebraische Vielfachheit 2 (und geometrische Vielfachheit 1). Das liefert

$$x_{\text{hom}}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}$$

als allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Eine spezielle Lösung für (4.10) findet man durch $x = y_1$ mit

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \exp \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} (t-s) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 + e^{2s} \end{pmatrix} ds.$$

Die explizite Berechnung ist ohne C.A.S. sehr intensiv. Man kann auch versuchen zu raten! Wenn man $\tilde{x}_a(t) = e^{2t}$ versucht, findet man $\tilde{x}_a''''(t) - 2\tilde{x}_a''(t) + \tilde{x}_a(t) = (16 - 8 + 1)e^{2t}$ und das passt nicht. Die Funktion $x_a(t) = \frac{1}{9}e^{2t}$ geht schon besser:

$$x_a''''(t) - 2x_a''(t) + x_a(t) = e^{2t}$$

Mit ein paar Polynomversuchen findet man für $x_b(t) = t^3 + 12t$, dass $x_b''''(t) - 2x_b''(t) + x_b(t) = t^3$. Die schöne Linearitätseigenschaft liefert

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\text{hom}}(t) + x_a(t) + x_b(t) = \\ &= x_a(t) + x_b(t) + c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + c_4 t e^{-t} \text{ mit } c_i \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

als allgemeine Lösung für (4.10).

Beispiel 4.12 Wir betrachten

$$x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = e^t. \quad (4.11)$$

Alles verläuft fast so wie vorher. Bloss für eine spezielle Lösung der Form ce^t besteht keine Hoffnung, weil e^t schon eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Sogar te^t liefert 0 an der rechten Seite. Man hat dann aber Erfolg beim Versuch mit ct^2e^t :

$$x''''(t) - 2x''(t) + x(t) = c(t^2 + 8t + 12)e^t - 2c(t^2 + 4t + 2)e^t + ct^2e^t = 9ce^t.$$

Man nehme $c = \frac{1}{9}$. Die allgemeine Lösung ist $x(t) = \frac{1}{9}t^2e^t + c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + c_4te^{-t}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$.

Algorithmus 4.1 Raten statt Rechnen für eine spezielle Lösung von

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t).$$

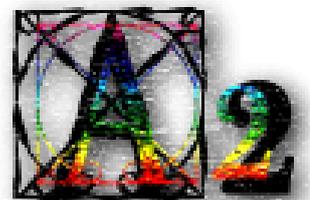
Wenn f keine Lösung der homogenen Gleichung ist:

Sei $f = \dots$, dann versuche man für $x = \dots$	
t^m	$\sum_{k=1}^m c_k t^k$
$e^{\gamma t}$	$ce^{\gamma t}$
$\sin(\gamma t)$	$c_1 \sin(\gamma t) + c_2 \cos(\gamma t)$
$\cos(\gamma t)$	$c_1 \sin(\gamma t) + c_2 \cos(\gamma t)$
$t^m e^{\gamma t}$	$\sum_{k=1}^m c_k t^k e^{\gamma t}$
\vdots	\vdots

Wenn f eine Lösung der homogenen Gleichung ist, versuche man $t^{m_1}\tilde{x}(t)$, bei dem man jetzt \tilde{x} aus der rechten Seite der Tabelle nimmt und m_1 geschickt wählt.

Analysis 2, Woche 5

Differentialgleichungen III



5.1 Linear, erste Ordnung, variable Koeffizienten

Gemeint sind Differentialgleichungen der Form

$$x'(t) = g(t)x(t) + f(t). \quad (5.1)$$

Wir nehmen an $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig.

Substituiert man $y(t) = e^{-G(t)}x(t)$, wo G eine Stammfunktion von g ist, dann folgt

$$y'(t) = e^{-G(t)}x'(t) - g(t)e^{-G(t)}x(t),$$

und aus der ursprünglichen Differentialgleichung wird

$$y'(t) = e^{G(t)}f(t). \quad (5.2)$$

Der Hauptsatz der Integralrechnung besagt, dass man jede Lösung von (5.2) findet durch $y = y_0 + c$ mit y_0 eine Stammfunktion der rechten Seite von (5.2) und $c \in \mathbb{R}$. Es liefert uns folgendes Ergebnis:

Lemma 5.1 Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

- Es existieren Lösungen $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ von (5.1).
- Wenn $x_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (5.1) ist und $x_h : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-triviale Lösung vom dazugehörigen homogenen Problem $x'_h(t) = g(t)x_h(t)$, dann ist $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = x_0(t) + cx_h(t) \text{ und } c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung von (5.1).

Bemerkung 5.1.1 Man nennt eine Klasse von Funktionen 'die allgemeine Lösung', wenn alle solche Funktionen die Differentialgleichung lösen, und wenn jede Lösung in dieser Klasse vorkommt.

Wir beschreiben nochmals ausgiebiger den Algorithmus, wie man eine mehr oder weniger explizite Lösung von (5.1) konstruieren kann.

Algorithmus 5.1 Gegeben sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und man sucht eine Lösung $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$x'(t) = g(t)x(t) + f(t).$$

1. Schreibe das homogene Problem:

$$x'_h(t) = g(t)x_h(t),$$

und löse das homogene Problem:

$$x_h(t) = e^{\int_a^t g(s)ds} c \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

2. Benutze die folgende Substitution für das eigentliche Problem:

$$x(t) = e^{\int_a^t g(s)ds} c(t),$$

(Variation der Konstante) und schreibe die neue Dgl. für c :

$$e^{\int_a^t g(s)ds} c'(t) = f(t).$$

Löse die Dgl. für c .

3. Kombiniere 3. und 5. zu einer Lösung¹ für das eigentliche Problem.

Bemerkung 5.1.2 Man könnte in Lemma 5.1 auch schreiben: die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = ce^{\int_a^t g(s)ds} + \int_a^t e^{\int_a^\tau g(s)ds} f(\tau) d\tau \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Es ist aber nicht jedermanns Sache, diese Formel für einen längeren Zeitraum einwandfrei zu speichern. Die Struktur, die hinter diesem Algorithmus steckt, kann man sich aber merken.

Beispiel 5.2 Wir betrachten

$$u'(x) = -2xu(x) + 1.$$

Die homogene Gleichung ist $u'_h(x) = -2xu_h(x)$ und wir finden

$$u_h(x) = e^{-x^2} c.$$

¹Man hat für c

$$c(t) = c_0 + \int_a^t e^{-\int_a^\tau g(s)ds} f(\tau) d\tau$$

und damit bekommt man für die Lösungen des eigentlichen Problems:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int_a^t g(s)ds} c(t) = e^{\int_a^t g(s)ds} \left(c_0 + \int_a^t e^{-\int_a^\tau g(s)ds} f(\tau) d\tau \right) = \\ &= c_0 e^{\int_a^t g(s)ds} + \int_a^t e^{\int_a^\tau g(s)ds} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Diese Formeln soll man nicht auswendig lernen. Sie illustrieren den Lösungsweg und diesen Weg soll man kennen.

Durch Variation der Konstante, das heißt, durch Verwendung der Substitution $u(x) = e^{-x^2} c(x)$, vereinfacht sich die Differentialgleichung via

$$-2xe^{-x^2} c(x) + e^{-x^2} c'(x) = -2xe^{-x^2} c(x) + 1$$

zu

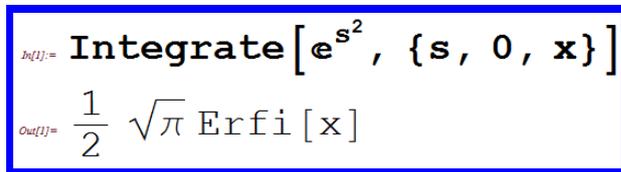
$$c'(x) = e^{x^2}.$$

Man findet $c(x) = c_1 + \int_0^x e^{s^2} ds$ und bekommt als Lösungen:

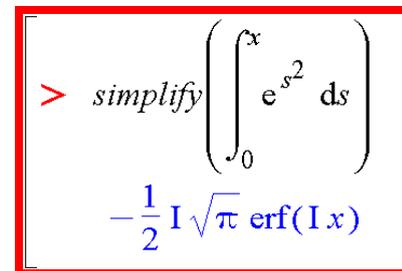
$$u(x) = e^{-x^2} \left(c_1 + \int_0^x e^{s^2} ds \right),$$

wobei man beliebige $c_1 \in \mathbb{R}$ nehmen darf.

Kann man $\int_0^x e^{s^2} ds$ schreiben ohne Integral, das heißt, gibt es eine explizite Formel für die Stammfunktion mithilfe bekannter Funktionen? Wenn wir Mathematica oder Maple fragen bekommt man:



In[1]:= Integrate[e^{s^2}, {s, 0, x}]
Out[1]:= $\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{Erfi}[x]$



> simplify $\left(\int_0^x e^{s^2} ds \right)$
 $-\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(ix)$

Anscheinend geht es nur mit zusätzlich definierten Funktionen.

5.2 Nicht-linear, konstruktiv lösbar, erster Ordnung

Außer linearen Differentialgleichungen lassen sich nur wenige explizit lösen. Ein paar berühmte Typen wollen wir hier vorstellen.

5.2.1 Trennbare Differentialgleichungen

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben.

Definition 5.3 Eine Differentialgleichung der Form

$$x'(t) = f(x(t)) g(t), \quad (5.3)$$

heißt **trennbar**.

Wir schauen uns das Anfangswertproblem an:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

und wir nehmen an, dass f und g stetig sind.

Wenn $f(x_0) = 0$ gilt, dann ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x(t) = x_0$ eine Lösung.

Wenn $f(x_0) \neq 0$ gilt, dann gilt wegen der Stetigkeit von f und von x , dass $f(x(t)) \neq 0$ für t nahe bei t_0 . Weil $f(x(t)) \neq 0$, kann man schreiben

$$\frac{1}{f(x(t))} x'(t) = g(t). \quad (5.4)$$

Kennen wir Stammfunktionen sowohl für $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ als auch für $t \mapsto g(t)$, und nennen wir sie H und G , dann kann man (5.4) schreiben als

$$(H(x(t)))' = G'(t).$$

Denn es gilt $(H(x(t)))' = H'(x(t)) x'(t) = \frac{1}{f(x(t))} x'(t) = g(t) = G'(t)$. Der Hauptsatz der Integralrechnung besagt

$$H(x(t)) = G(t) + c \text{ für } c \in \mathbb{R}.$$

Wenn wir außerdem H invertieren können², folgt

$$x(t) = H^{\text{inv}}(G(t) + c).$$

Die Konstante c ist so zu wählen, dass $x(t_0) = H^{\text{inv}}(G(t_0) + c) = x_0$.

Beispiel 5.4 Die logistische Gleichung $u'(t) = u(t)(1 - u(t))$. Neben beiden konstanten Lösungen $u(t) = 0$ und $u(t) = 1$ liefert die Trennung, dass

$$\frac{u'(t)}{u(t)(1 - u(t))} = 1.$$

Weil

$$\int \frac{du}{u(1-u)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1} \right) du = \ln |u| - \ln |u-1| + c_1 = \ln \left| \frac{u}{u-1} \right| + c_1$$

und $\int 1 dt = t + c_2$,

finden wir ($c = c_2 - c_1$ ohne Verlust der Allgemeinheit)

$$\ln \left| \frac{u(t)}{u(t)-1} \right| = t + c.$$

Dann gilt

$$\frac{u(t)}{u(t)-1} = \pm e^{t+c} = \pm e^c e^t = \tilde{c} e^t \text{ mit } \tilde{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Via $u(t) = \tilde{c} e^t (u(t) - 1)$ folgt $(1 - \tilde{c} e^t) u(t) = -\tilde{c} e^t$ und

$$u(t) = \frac{\tilde{c} e^t}{\tilde{c} e^t - 1} = \frac{e^t}{e^t - \frac{1}{\tilde{c}}},$$

oder noch anders geschrieben:

$$u(t) = \frac{e^t}{e^t - \hat{c}} \text{ mit } \hat{c} \in \mathbb{R}.$$

Wir dürfen $\hat{c} = 0$ zulassen, weil $u(t) = 1$ auch eine Lösung ist. Zu dieser Vorschrift kann man sich das Existenzintervall ausdenken und mit $u(t) = 0$ hat man genau die Lösungen aus Beispiel 3.1.

²Man kann zum Beispiel $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H(x) = x + e^x$ invertieren, weil H monoton und surjektiv ist. Wir kennen aber keine explizite Formel für $H^{\text{invers}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit unseren Standardfunktionen.

Die Funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H(x) = x^2$ dagegen lässt sich nur invertieren, wenn man sie einschränkt auf \mathbb{R}_0^+ oder \mathbb{R}_0^- . Dann müssten wir, statt H^{invers} , die Funktionen $(H|_{[0,\infty)})^{\text{invers}}$ und $(H|_{(-\infty,0]})^{\text{invers}}$ getrennt betrachten:

$$(H|_{[0,\infty)})^{\text{invers}}(y) = \sqrt{y} \text{ und } (H|_{(-\infty,0]})^{\text{invers}}(y) = \sqrt{-y}.$$

Beispiel 5.5 Wir betrachten

$$x'(t) = -t\sqrt[3]{x(t)} \quad (5.5)$$

und finden nach der Trennung, angenommen $x(t) \neq 0$, dass

$$\frac{x'(t)}{\sqrt[3]{x(t)}} = -t.$$

Weil für $x > 0$ gilt

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c_1,$$

und für $x < 0$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = - \int (-x)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2}(-x)^{\frac{2}{3}} + c_2,$$

findet man

$$\frac{3}{2}|x(t)|^{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}t^2 + \tilde{c} \text{ mit } \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Das heißt:

$$x(t) = \pm (c - 3t^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (5.6)$$

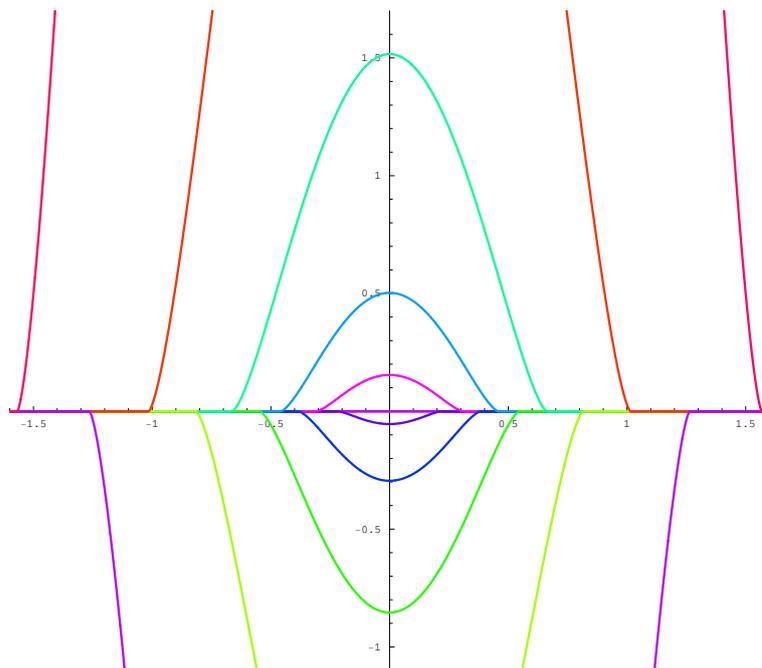
Dieser Ausdruck ist aber nur definiert für $t \in [-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}]$. Wenn man die Funktionen $x : [-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}]$ mit $x(t)$ wie in (5.6) durch 0 fortsetzt außerhalb dieses Intervalls, bekommt man für jedes $c \in [0, \infty)$ zwei Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = \begin{cases} (c - 3t^2)^{\frac{3}{2}} & \text{für } t \in [-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}], \\ 0 & \text{für } t \notin [-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}], \end{cases}$$

und

$$x(t) = \begin{cases} -(c - 3t^2)^{\frac{3}{2}} & \text{für } t \in [-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}], \\ 0 & \text{für } t \notin [-\sqrt{c/3}, \sqrt{c/3}]. \end{cases}$$

Man sieht, dass mehrere Lösungen durch den gleichen Punkt gehen. In der Vorlesung 'Gewöhnliche Differentialgleichungen' wird man sehen, dass solches nur geschehen kann, wenn die rechte Seite von (5.5) als Funktion von x nicht differenzierbar ist.



5.2.2 Homogene Differentialgleichungen

bedeuten jetzt leider etwas anderes als vorher bei den linearen Gleichungen. Gemeint ist hier folgendes:

Definition 5.6 *Homogene Differentialgleichungen haben die Form*

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right). \quad (5.7)$$

Die Substitution $x(t) = y(t)/t$ führt zurück zu einer trennbaren Differentialgleichung. Weil $y(t) = tx(t)$ hat man $y'(t) = x(t) + tx'(t)$, die Differentialgleichung wird

$$x(t) + tx'(t) = f(x(t))$$

und sie lässt sich auch schreiben als

$$x'(t) = (f(x(t)) - x(t)) \frac{1}{t}.$$

Diese letzte Differentialgleichung ist trennbar.

Beispiel 5.7 *Betrachten wir*

$$u'(x) = \frac{u(x)}{x + u(x)}.$$

Weil man diese Differentialgleichung auch schreiben kann als

$$u'(x) = \frac{\frac{u(x)}{x}}{1 + \frac{u(x)}{x}},$$

ist sie homogen. Man substituiert $y(x) = u(x)/x$ und findet

$$xy'(x) + y(x) = \frac{y(x)}{1 + y(x)}.$$

Umschreiben und Trennen liefert, wenn $y \neq 0$,

$$\frac{y'(x)}{\frac{y(x)}{1+y(x)} - y(x)} = \frac{1}{x}$$

oder vereinfacht

$$\frac{1 + y(x)}{(y(x))^2} y'(x) = \frac{-1}{x}. \quad (5.8)$$

Um diese Differentialgleichung weiter lösen zu können, braucht man eine Stammfunktion für

$$f : y \mapsto \frac{1 + y}{y^2}.$$

So eine Stammfunktion ist $F(y) = \frac{-1}{y} + \log(y)$. Die Lösungen von (5.8) erfüllen also

$$\frac{-1}{y(x)} + \log |y(x)| = -\log |x| + c.$$

Geht man zurück zu $u(x)$, folgt $\frac{-x}{u(x)} + \log |u(x)| = c$ und das heißt

$$x = u(x) (\log |u(x)| - c). \quad (5.9)$$

Man hat zwar keine explizite Formel für die Lösungen bekommen, aber eine für die Inversen. Übrigens haben wir unterwegs $y = 0$ rauswerfen müssen. Man kontrolliert leicht, dass das dazugehörige u , nämlich $u(x) = 0$ eine Lösung ist, die nicht in (5.9) vorkommt.

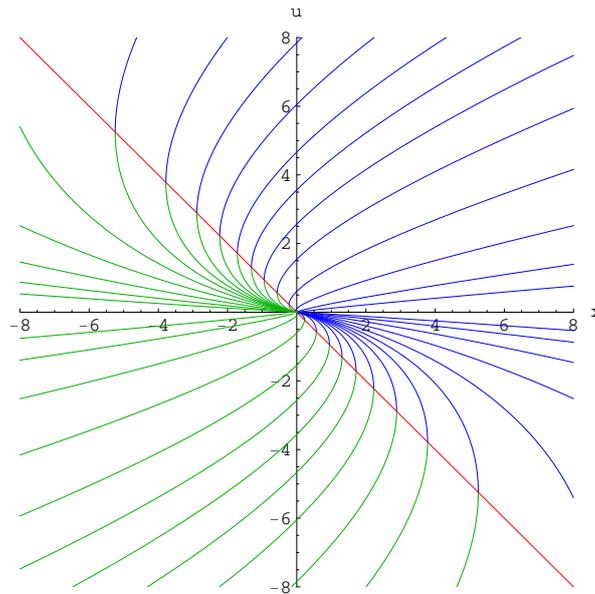


Abbildung 5.1: Diese Bilder der Lösungen zu Beispiel 5.7 sind gemacht worden mithilfe der Inversen von u . Man soll bemerken, dass für $u+x=0$ nicht nur keine Differentialgleichung definiert ist, sondern genau da die Existenzintervalle der Lösungen aufhören. Auf dieser Linie treffen zwei verschiedene Lösungen zusammen, die in der Skizze auch unterschiedlich eingefärbt sind.

5.2.3 Differentialgleichungen von Bernoulli und Riccati

Definition 5.8 Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)(y(t))^\gamma \quad (5.10)$$

mit $\gamma \notin \{0, 1\}$ heißt **Bernoulli-Gleichung**.

Für $\gamma \in \{0, 1\}$ ist sie linear. Wenn man die Substitution $y(t) = (x(t))^p$ versucht, hat man $y'(t) = p(x(t))^{p-1}x'(t)$ und findet

$$p(x(t))^{p-1}x'(t) = a(t)(x(t))^p + b(t)(x(t))^{p\gamma}$$

und das lässt sich schreiben als

$$x'(t) = \frac{1}{p}a(t)x(t) + \frac{1}{p}b(t)(x(t))^{p(\gamma-1)+1}.$$

Wenn $p(\gamma-1)+1=0$, das heißt $p = \frac{1}{1-\gamma}$, wird die Gleichung

$$x'(t) = (1-\gamma)a(t)x(t) + (1-\gamma)b(t)$$

und die ist linear.

Definition 5.9 Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)(y(t))^2 + f(t) \quad (5.11)$$

heißt **Riccati-Gleichung**.

Einen konstruktiven Lösungsalgorithmus gibt es hier nicht. Nur wenn man zufälligerweise eine Lösung hat, kann man alle anderen finden. Das läuft wie folgt.

Sei \tilde{y} eine Lösung. Dann verwendet man die Substitution $y(t) = \tilde{y}(t) + x(t)$ und findet

$$\tilde{y}'(t) + x'(t) = a(t)(\tilde{y}(t) + x(t)) + b(t)(\tilde{y}(t) + x(t))^2 + f(t).$$

Weil $\tilde{y}'(t) = a(t)\tilde{y}(t) + b(t)(\tilde{y}(t))^2 + f(t)$ gilt, kann man diese Differentialgleichung vereinfachen zu einer vom Bernoulli-Typ:

$$x'(t) = (a(t) + 2b(t)\tilde{y}(t))x(t) + b(t)(x(t))^2.$$

5.2.4 Exakte Differentialgleichungen

machen auf dem ersten Blick einen etwas perversen Eindruck. Schauen wir uns als Beispiel die Kreise mit $(0, 0)$ als Mittelpunkt an:

$$K_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Die halben Bögen lassen sich beschreiben mit Funktionen $y : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ oder $y(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Für beide Möglichkeiten gilt

$$x^2 + (y(x))^2 = R^2.$$

Wenn man differenziert, folgt die Differentialgleichung

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

Jetzt vergessen wir die Ableitung und fragen nach den Lösungen der Differentialgleichung

$$x + y(x)y'(x) = 0.$$

Um diese zu lösen muss man 'rückwärts' denken.

Definition 5.10 Eine Differentialgleichung heißt **exakt**, wenn es eine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gibt derart, dass diese Differentialgleichung aussieht wie

$$\left(F(x, y(x))\right)' = 0. \quad (5.12)$$

Später werden wir zeigen, wie man so eine exakte Differentialgleichung erkennen kann. Wenn man sie erkannt hat, hat man eine implizite Gleichung für die Lösungen:

$$F(x, y(x)) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 5.11 Welche Kurven schneiden die Ellipsen $\{E_c\}_{c \in \mathbb{R}^+}$ mit $E_c = \{(x, y); 2x^2 + y^2 = c\}$ orthogonal?

Wenn man die halben Bögen dieser Ellipsen durch Funktionen $y = y(x)$ darstellen lässt, findet man

$$2x^2 + y(x)^2 = c.$$

Das heißt, sie erfüllen die exakte Differentialgleichung

$$4x + 2y(x)y'(x) = 0. \quad (5.13)$$

Wenn zwei Funktionen $x \mapsto y(x)$ und $x \mapsto z(x)$ sich orthogonal schneiden, dann gilt an der Schnittstelle³ $y(x) = z(x)$ und $y'(x)z'(x) = -1$. Eine Funktion, die die obigen Ellipsen orthogonal schneidet, erfüllt also eine Differentialgleichung, die man bekommt indem man in (5.13) $y(x)$ ersetzt durch $z(x)$ und $y'(x)$ durch $-1/z'(x)$:

$$4x + 2z(x) \frac{-1}{z'(x)} = 0. \quad (5.14)$$

Das heißt,

$$z'(x) = \frac{1}{2x} z(x)$$

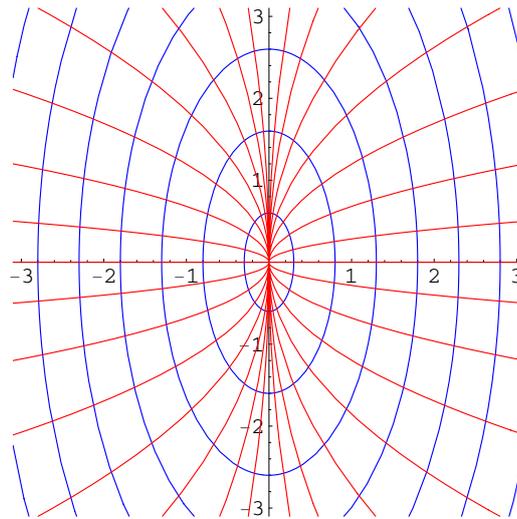
und diese Differentialgleichung hat genau die Lösungen

$$z(x) = ce^{\frac{1}{2} \ln|x|} = c\sqrt{|x|} \text{ für } c \in \mathbb{R},$$

präziser gesagt: für $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z &: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } z(x) = c\sqrt{x}, \\ z &: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } z(x) = c\sqrt{-x}. \end{aligned}$$

Auf diese Art haben wir nur Funktionen $z = z(x)$ bekommen, deren Spuren die Ellipsen orthogonal schneiden. Selbstverständlich kann man andere Parametrisierungen verwenden, die ähnliche Spuren haben. Eine Spur fehlt trotzdem: Weil wir Funktionen $z = z(x)$ gesucht haben, fehlt $x = 0$.



Beispiel 5.12 Welche Kurven schneiden die Graphen aus $\{P_c\}_{c \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}}$ mit

$$P_c = \{(x, z); z^2 = cx\} \text{ für } c \in \mathbb{R} \text{ und } P_\infty = \{(x, z); x = 0\}$$

orthogonal?

Man schreibe $z^2/x = c$, nehme an $z = z(x)$ (oder $x = x(z)$), leite ab, und man bekommt

$$2x^{-1} z'(x) z(x) - x^{-2} (z(x))^2 = 0,$$

das heißt $2x z'(x) = z(x)$, usw.

³Man hat $x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ und $x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ z(x) \end{pmatrix}$ als Parametrisierungen. Orthogonal schneiden an der Stelle x bedeutet

$$0 = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ z'(x) \end{pmatrix} = 1 + y'(x)z'(x).$$

Definition 5.13 $\{A_c\}_{c \in I}$ mit $A_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \alpha(x, y) = c\}$ und $\{B_c\}_{c \in J}$ mit $B_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \beta(x, y) = c\}$ heißen orthogonale Familien von Trajektorien⁴ in \mathbb{R}^2 , wenn folgendes gilt:

1. Sowohl $\{A_c\}_{c \in I}$ als auch $\{B_c\}_{c \in J}$ füllt \mathbb{R}^2 eindeutig aus bis auf höchstens abzählbar viele Punkte.
2. Wenn sich eine Trajektorie A_{c_1} und eine Trajektorie B_{c_2} schneiden, dann geschieht dies orthogonal.

Beispiel 5.14 $\{A_c\}_{c \in (-2, \infty)}$ mit

$$A_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 + 2 \cos x = c\}$$

und $\{B_c\}_{c \in \mathbb{R}} \cup \{x = (1 + 2k)\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$$B_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \tan\left(\frac{1}{2}x\right) = c\}$$

sind orthogonale Familien von Trajektorien in \mathbb{R}^2 . Die Differentialgleichungen zu A_c für Funktionen $x \mapsto y(x)$ und zu B_c für Funktionen $x \mapsto z(x)$ sind

$$2y(x)y'(x) - 2 \sin x = 0 \quad \text{und} \quad z'(x) \tan\left(\frac{1}{2}x\right) + z(x) \frac{1}{2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right)^2} = 0.$$

Man kann sie vereinfachen zu $y(x)y'(x) = \sin x$ und $z'(x) \sin x + z(x) = 0$. Für $y(x) = z(x)$ sieht man, dass $y'(x)z'(x) = -1$ gilt.

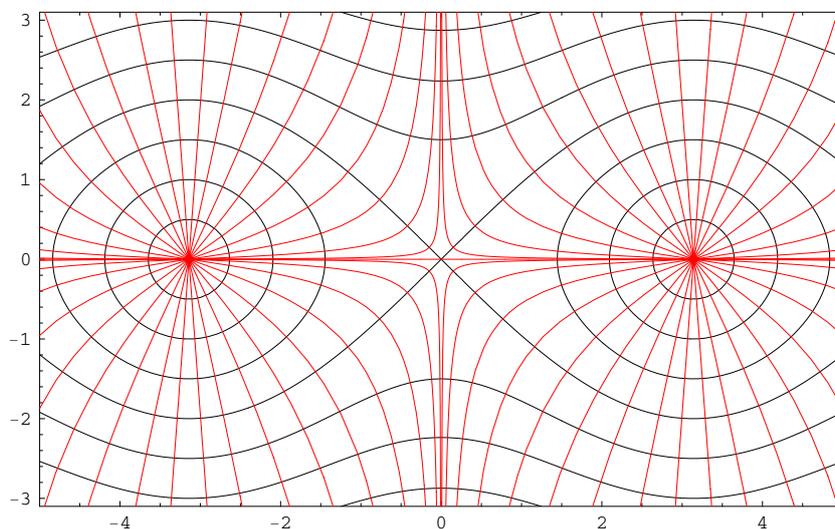
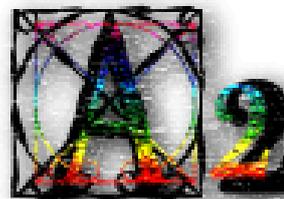


Abbildung 5.2: Die A_c und B_c aus Beispiel 5.14 kann man mit Graphen von Funktionen darstellen. Für B_c findet man $y = c \cot\left(\frac{1}{2}x\right)$ (rot dargestellt) und für A_c die Vorschriften $y = \pm\sqrt{c - 2 \cos x}$ (in schwarz).

⁴Das Wort Trajektorie wird benutzt für den Graph einer Lösung der Differentialgleichung. Wenn $x \mapsto y(x)$ ein A_c (teils) beschreibt, gilt $(\alpha(x, y(x)))' = 0$; wenn $y \mapsto x(y)$ ein A_c (teils) beschreibt, gilt ebenso $(\alpha(x(y), y))' = 0$. Wir nehmen an, dass α und auch β genügend nette Funktionen sind und diese Ableitungen Sinn machen.

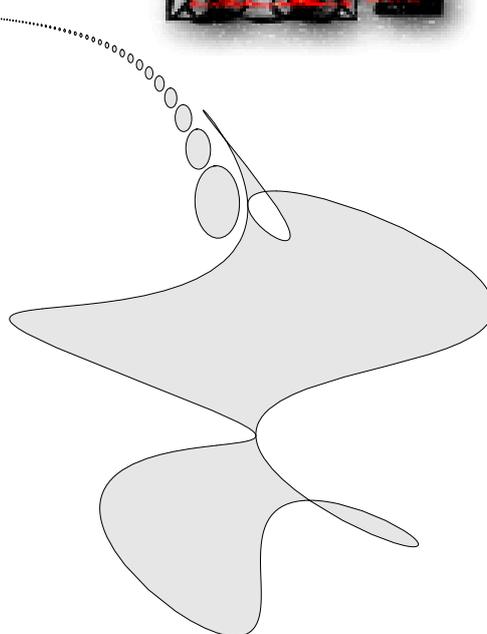
Analysis 2, Woche 6

Grundbegriffe I



6.1 Topologische Begriffe

Wenn man offene Teilmengen von \mathbb{R} betrachtet, landet man meistens bald bei Intervallen. Das Intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ haben wir offen genannt. Ein Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ nannten wir abgeschlossen und dann gab es noch $(a, b]$ und $[a, b)$. In mehreren Dimensionen kann man sich ‘wildere’ Mengen vorstellen und man möchte genau definierte Begriffe haben.



Das einfachste Analogon in höheren Dimensionen für ein offenes Intervall ist die **offene Kugel**:

- Für $r > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$ definiert man

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < r\}.$$

Die Kugel $B_r(a)$ hat Radius r und Mittelpunkt a .

Man verwendet diese Kugeln, um ‘offen’ allgemeiner zu definieren.

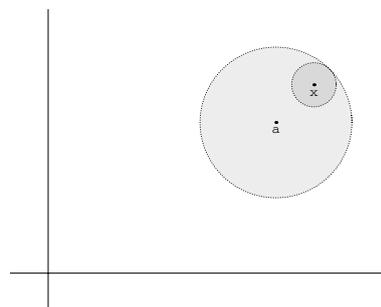
Definition 6.1 Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ nennt man **offen**, wenn es für jedes $a \in A$ eine offene Kugel $B_r(a)$ gibt derart, dass $B_r(a) \subset A$.

Definition 6.2 Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ nennt man **abgeschlossen**, wenn $\mathbb{R}^n \setminus K$ offen ist.

Bemerkung 6.2.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$. Eine Menge $A \subset U$ nennt man **relativ offen** bezüglich U , wenn es für jedes $a \in A$ ein $r > 0$ gibt mit $\{x \in U; \|x - a\| < r\} \subset A$. Eine Menge $K \subset U$ nennt man **relativ abgeschlossen** bezüglich U , wenn $U \setminus K$ relativ offen bezüglich U ist.

Statt $\mathbb{R}^n \setminus K$ schreibt man auch K^c , wobei c vom Englischen ‘complement’ kommt.

Die erste Frage, die man sich stellen sollte, ist, ob die offene Kugel auch offen ist. ‘Offene Kugel’ ist ja bereits vor ‘offen’ definiert worden. Erfreulicherweise ist die offene Kugel tatsächlich offen, denn wenn man $x \in B_r(a)$ nimmt, gilt $B_s(x) \subset B_r(a)$ für $s = r - \|x - a\| > 0$.



Die Definition besagt, dass die leere Menge \emptyset und ganz \mathbb{R}^n offene Mengen sind. Weil $\emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset$ gilt, sind \emptyset und \mathbb{R}^n auch abgeschlossene Mengen. Es sind die einzigen Mengen in \mathbb{R}^n , die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Lemma 6.3 *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.
Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

Beweis. • Seien A_i mit $i \in I$ offene Mengen und $x \in A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Dann gibt es ein $i_1 \in I$ mit $x \in A_{i_1}$ und für irgendein $r > 0$ gilt $B_r(x) \subset A_{i_1}$. Wegen $A_{i_1} \subset A$ gilt auch $B_r(x) \subset A$.

• Wenn $\tilde{A} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$ und $x \in \tilde{A}$, dann gilt $x \in A_i$ für $i \in \{1, \dots, k\}$. Weil A_i offen ist, gibt es $r_i > 0$ derart, dass $B_{r_i}(x) \subset A_i$. Für $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ gilt $r > 0$ und $B_r(x) \subset B_{r_i}(x) \subset A_i$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ also auch $B_r(x) \subset \tilde{A}$. ■

Wenn man verwendet, dass

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c,$$

folgt sofort:

Korollar 6.4 *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Definition 6.5 *Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von a , wenn es eine offene Kugel $B_r(a)$ gibt derart, dass $B_r(a) \subset U$.*

Definition 6.6 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$.*

- a heißt ein **innerer Punkt** von A , wenn es mindestens eine Umgebung U von a gibt mit $U \subset A$. Man schreibt A° für die **Menge der inneren Punkte** von A .
- a heißt ein **äußerer Punkt** von A , wenn es mindestens eine Umgebung U von a gibt mit $U \subset A^c$.
- a heißt ein **Randpunkt** von A , wenn jede Umgebung U von a einen Punkt von A und einen Punkt von A^c enthält. Man schreibt ∂A für die **Menge der Randpunkte** von A .

Bemerkung 6.6.1 *Man setzt $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A$.*

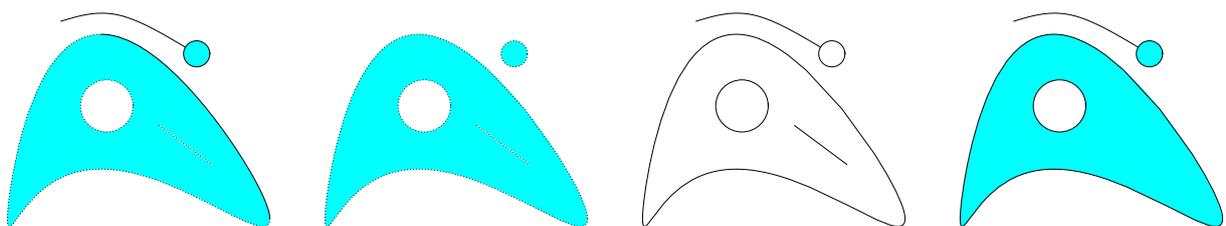


Abbildung 6.1: Skizzen zu A , A° , ∂A und \bar{A} .

Bemerkung 6.6.2 Die drei Typen von Punkten in Definition 6.6 schließen sich gegenseitig aus und füllen ganz \mathbb{R}^n auf. Genauer gesagt mit $A^{\text{co}} := (A^c)^\circ$, der Menge der äußeren Punkte hat man:

$$A^\circ \cap \partial A = \emptyset, \quad A^{\text{co}} \cap \partial A = \emptyset \quad \text{und} \quad A^\circ \cap A^{\text{co}} = \emptyset, \quad (6.1)$$

$$A^\circ \cup \partial A \cup A^{\text{co}} = \mathbb{R}^n. \quad (6.2)$$

Wenn A offen ist, dann ist jedes $a \in A$ ein innerer Punkt und es gilt $A^\circ = A$.

Lemma 6.7 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

1. A° ist offen;
2. $\partial A = \partial(A^c)$ ist abgeschlossen;
3. $\bar{A} = (A^{\text{co}})^c$ ist abgeschlossen.

Bemerkung 6.7.1 Man nennt \bar{A} die **abgeschlossene Hülle von A** .

Bemerkung 6.7.2 Wenn A abgeschlossen ist, ist A^c offen und es folgt

$$A = (A^c)^c = (A^{\text{co}})^c = \bar{A}.$$

Beweis. 1. Für jedes $a \in A^\circ$ gibt es mindestens eine Umgebung U von a mit $U \subset A$ und so auch ein $r > 0$ derart, dass $B_r(a) \subset U \subset A$.

2. $\partial A = \partial(A^c)$ folgt aus der Symmetrie der Definition bezüglich A und A^c . Weil $\partial A = (A^\circ \cup A^{\text{co}})^c$ gilt, und A° und A^{co} offen sind, ist ∂A abgeschlossen.

3. Mit (6.2) und (6.1) folgt $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A = (A^{\text{co}})^c$. ■

Mit Definition 6.6 folgt, dass $A^\circ \subset A$ und $A^{\text{co}} \subset A^c$. Schaut man die Komplemente an, dann folgt $\bar{A} = A^{\text{co}c} \supset A^{\text{co}c} = A$. Man hat:

$$A^\circ \subset A \subset \bar{A} \quad \text{und} \quad A \setminus A^\circ, \bar{A} \setminus A \subset \partial A.$$

Es gibt noch zwei Sorten Punkte, die wir brauchen werden.

Definition 6.8 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$.

- a heißt ein **Häufungspunkt** von A , wenn jede Umgebung U von a unendlich viele Punkte aus A enthält.
- a heißt ein **isolierter Punkt** von A , wenn $a \in A$ gilt und es mindestens eine Umgebung U von a gibt mit $U \setminus \{a\} \subset A^c$.

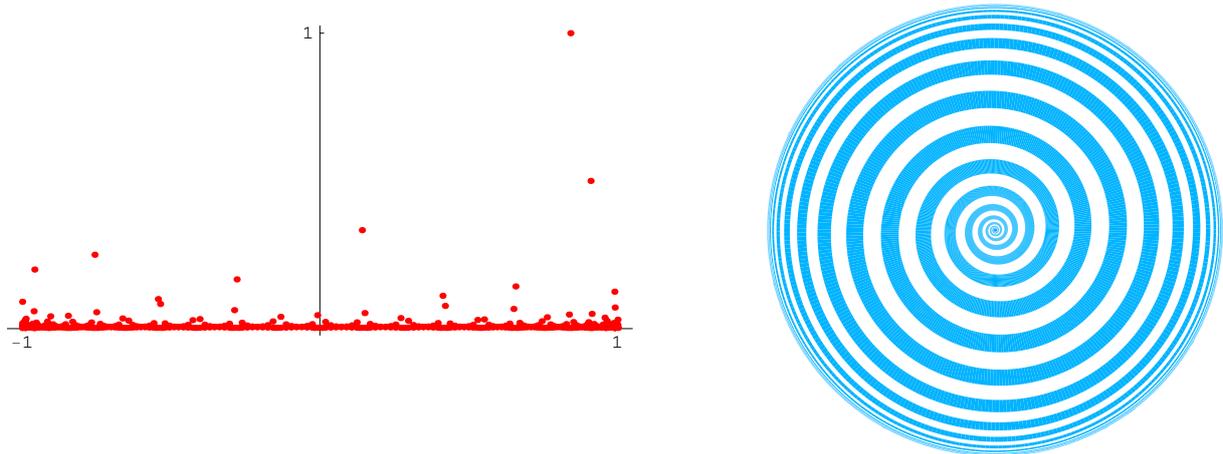
Es gibt kaum eine Standardschreibweise für die zugehörigen Mengen. Wir schreiben A^{HP} für die Menge der Häufungspunkte von A und A^{IP} für die Menge der isolierten Punkte von A .

Beispiel 6.9 Sei $P = \left\{ \left(\sin n, \frac{1}{n} \right); n \in \mathbb{N}^+ \right\} \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$P^\circ = \emptyset \quad \text{und} \quad \partial P = \bar{P} = P \cup \{(t, 0); -1 \leq t \leq 1\},$$

$$P^{\text{HP}} = \{(t, 0); -1 \leq t \leq 1\} \quad \text{und} \quad P^{\text{IP}} = P.$$

Der Beweis für $P^{\text{HP}} = \{(t, 0); -1 \leq t \leq 1\}$ ist nicht einfach und wir werden ihm hier nicht nachgehen.

Abbildung 6.2: Bilder zu P und S aus Beispiel 6.9 und 6.10.

Beispiel 6.10 Wir betrachten das spiralförmige Gebiet

$$S = \left\{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; \frac{e^\varphi}{e^\varphi + 1} \leq r \leq \frac{e^{\varphi+\pi}}{e^{\varphi+\pi} + 1} \text{ und } r, \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dann gilt:

$$S^\circ = \left\{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; \frac{e^\varphi}{e^\varphi + 1} < r < \frac{e^{\varphi+\pi}}{e^{\varphi+\pi} + 1} \text{ und } r, \varphi \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\begin{aligned} \partial S &= \left\{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; r = \frac{e^\varphi}{e^\varphi + 1} \text{ und } \varphi \in \mathbb{R} \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; r = \frac{e^{\varphi+\pi}}{e^{\varphi+\pi} + 1} \text{ und } \varphi \in \mathbb{R} \right\} \cup \\ &\quad \cup \left\{ (\cos \varphi, \sin \varphi) ; \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \cup \{(0, 0)\}, \end{aligned}$$

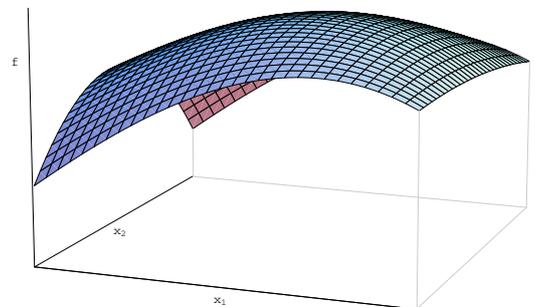
$$S^{\text{HP}} = \bar{S} \text{ und } S^{\text{IP}} = \emptyset.$$

Beispiel 6.11 Für $A = \mathbb{Q}^n$ in \mathbb{R}^n gilt $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \bar{A} = A^{\text{HP}} = \mathbb{R}^n$ und $A^{\text{IP}} = \emptyset$. Man beweist dies mit der Vollständigkeit von \mathbb{R} .

Für $B = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ in \mathbb{R}^n gilt $B^\circ = \emptyset$, $\partial B = \bar{B} = B^{\text{HP}} = \mathbb{R}^n$ und $B^{\text{IP}} = \emptyset$.

6.2 Darstellung Funktionen mehrerer Veränderlichen

Eine Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich darstellen mit Hilfe einer Skizze des zugehörigen Graphes $\{(x, f(x)) ; x \in I\}$. Nur für $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kann man eine Skizze vom Graphen einigermaßen, das heisst als Projektion, darstellen: man braucht drei Dimensionen für respektive x_1 , x_2 und $f(x_1, x_2)$. Für höhere Dimensionen fehlt Mensch und Maschine die Bildverarbeitungssoftware. Der Mathematiker soll sich von diesem nicht hindern lassen.



6.3 Mehrere Veränderliche, Konvergenz, Stetigkeit

Die Definition vom Limes, sowohl für eine Folge als auch für eine Funktion, ist wie vorher. Wir fangen an mit der Definition für eine Folge in \mathbb{R}^n .

6.3.1 Der Limes bei Folgen

Definition 6.12 Sei $\{x^m\}_{m=1}^\infty$ eine Folge in \mathbb{R}^n und $a \in \mathbb{R}^n$. Man sagt $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = a$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass

$$m > M_\varepsilon \Rightarrow \|x^m - a\| < \varepsilon.$$

Lemma 6.13 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist a ein Häufungspunkt von A genau dann, wenn es eine Folge $\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert.

Beweis. (\Rightarrow) Sei $a \in A^{\text{HP}}$. Dann gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}^+$ ein $x^m \in A \setminus \{a\}$ mit $x^m \in B_{1/m}(a)$. Sei $\varepsilon > 0$. Für $m > M_\varepsilon := \varepsilon^{-1}$ gilt $\|x^m - a\| < \varepsilon$. Also $\{x^m\}_{m=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$ konvergiert gegen a .

(\Leftarrow) Wenn es eine Folge $\{x^m\}_{m=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert, dann dürfen wir eine derartige Teilfolge $\{x^{m_k}\}_{k=1}^\infty$ nehmen, dass $\|x^{m_k} - a\|$ streng fallend ist. Weil diese Teilfolge auch gegen a konvergiert, gibt es für jedes $r > 0$ ein M_r derart, dass für $k > M_r$ gilt $\|x^{m_k} - a\| < r$. Streng fallend impliziert dass alle x^{m_k} verschieden sind und wir finden für jede Umgebung $B_r(a)$ unendlich viele $x^{m_k} \in A \cap B_r(a)$. Das heißt $a \in A^{\text{HP}}$. ■

Wir erinnern hier nochmals an den Satz von Bolzano-Weierstrass: jede beschränkte Folge in \mathbb{R} hat eine konvergente Teilfolge. Dieser Satz gilt auch in \mathbb{R}^n . Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn es R gibt derart, dass für alle $x \in A$ gilt $\|x\| \leq R$. Wenn $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R}^n ist, dann ist $\{x_1^k\}_{k=0}^\infty$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R} und hat wegen Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $\{x_1^{k_m}\}_{m=0}^\infty$. Dann ist $\{x_2^{k_m}\}_{m=0}^\infty$ wieder eine beschränkte Teilfolge in \mathbb{R} und hat eine Teilfolge $\{x_2^{k_{m_\nu}}\}_{\nu=0}^\infty$. Die Folge $\{x_1^{k_{m_\nu}}\}_{\nu=0}^\infty$ konvergiert als Teilfolge einer konvergenten Folge. Man wiederholt diesen Vorgang für die dritten Koordinaten usw. Wenn alle Komponenten in \mathbb{R} konvergieren, konvergiert auch die Teilfolge in \mathbb{R}^n .

Satz 6.14 (Bolzano Weierstrass) Jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^n hat eine konvergente Teilfolge.

Anders gesagt: jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^n hat entweder nur endlich viele unterschiedliche Terme oder hat einen Häufungspunkt.

Lemma 6.15 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

1. A^{HP} ist abgeschlossen;
2. $A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}} = \bar{A}$ und $A^{\text{HP}} \cap A^{\text{IP}} = \emptyset$.

Beweis. 1a. Wir wollen zeigen, dass $(A^{\text{HP}})^c$ offen ist. Sei $a \in (A^{\text{HP}})^c$. Dann gibt es $r > 0$ derart, dass $B_r(a)$ höchstens endlich viele Punkten in A enthält. Weil $B_r(a)$ eine Umgebung ist für jeden seiner Punkte x und nur endlich viele Punkte aus A enthält, gilt $x \in (A^{\text{HP}})^c$ und somit auch $U \subset (A^{\text{HP}})^c$. Also gilt: $(A^{\text{HP}})^c$ ist offen.

2a Wir zeigen getrennt $A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}} \subset \bar{A}$ und $A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}} \supset \bar{A}$.

2a-i. $A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}} \subset \bar{A}$: Weil $A^{\text{IP}} \subset A \subset \bar{A}$ gilt, reicht es, wenn wir zeigen, dass $A^{\text{HP}} \subset \bar{A}$. Durch Widerspruch finden wir: wenn $x \notin \bar{A}$, dann gilt $x \in A^{\text{co}}$, also $B_r(x) \subset A^{\text{co}}$ für r genügend klein und $x \notin A^{\text{HP}}$.

2a-ii. $A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}} \supset \bar{A}$: Wir nehmen an, $x \in \bar{A}$ und $x \notin A^{\text{HP}} \cup A^{\text{IP}}$. Weil $x \notin A^{\text{HP}}$ gibt es $r_0 > 0$ derart, dass $B_{r_0}(x) \setminus \{x\}$ höchstens endlich viele Punkte $\{a^1, \dots, a^k\}$ aus

A enthält. Schreibe $r_i = \|a^i - x\|$ für $1 \leq i \leq k$ und $r = \min\{r_i; 0 \leq i \leq k\}$. Es gilt $B_r(x) \setminus \{x\} \subset A^c$. Entweder bekommt man $x \in A^{co}$ oder $x \in A^{IP}$. Beide Möglichkeiten ergeben einen Widerspruch.

2b. $A^{HP} \cap A^{IP} = \emptyset$ folgt sofort aus der Definition. ■

Eine Folge des letzten Lemmas wollen wir betonen:

Korollar 6.16 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Wenn $a \in \bar{A}$, dann gilt a ist ein Häufungspunkt von A oder $a \in A$.

Beweis. Das Ergebnis folgt aus Lemma 6.15 $\bar{A} = A^{HP} \cup A^{IP}$ und $A^{IP} \subset A$. ■

6.3.2 Der Limes bei Funktionen

Definition 6.17 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}^n$ und $\ell \in \mathbb{R}^m$. Man sagt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, dass

$$0 < \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon.$$

Statt $\|x - a\| < \delta$ kann man selbstverständlich auch schreiben $x \in B_\delta(a)$.

Die Definition des Grenzwertes lässt sich erweitern für Funktionen, die nur auf einer Teilmenge von \mathbb{R}^n definiert sind. Um einen Limes bei einem Punkt zu definieren, muss man sich diesem Punkt ‘annähern’ können. Das heißt, der Limes kann nur bei einem Häufungspunkt betrachtet werden.

Definition 6.18 Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion, a ein Häufungspunkt von A und $\ell \in \mathbb{R}^m$. Man sagt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, dass

$$x \in (B_{\delta_\varepsilon}(a) \setminus \{a\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(\ell). \quad (6.3)$$

Bemerkung 6.18.1 Wenn man explizit das Definitionsgebiet angeben möchte, wird auch $\lim_{A \ni x \rightarrow a} f(x)$ statt $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ geschrieben. Man kann (6.3) auch schreiben als

$$x \in A \text{ und } 0 < \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon.$$

6.3.3 Stetigkeit

Definition 6.19 Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

Man sagt f ist stetig in a , wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt derart, dass

$$x \in A \text{ und } \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon. \quad (6.4)$$

Man sagt $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig, wenn f stetig ist in jedem Punkt $a \in A$.

Bemerkung 6.19.1 Wenn $a \in A^{IP}$ dann ist (6.4) eine leere Bedingung. Dann gibt es nämlich $r > 0$ derart, dass $x = a$ der einzige Punkt in $B_r(a) \cap A$ ist und setzt man $\delta_\varepsilon = r$, dann ist (6.4) erfüllt für jede $\varepsilon > 0$.

Beispiel 6.20 Die Euklidische Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Das sieht man wie folgt. Weil

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

folgt $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ und durch Symmetrie auch $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Kombiniert man diese Ungleichungen, folgt

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und nehme $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ und es folgt für jedes $a \in \mathbb{R}^n$:

$$x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \| \|x\| - \|a\| \| < \varepsilon.$$

Lemma 6.21 Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Die Funktion f ist stetig auf A genau dann, wenn alle Komponenten $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind auf A .

Beweis. Wir haben $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ und

$$\|f(x)\| = \sqrt{(f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 + \dots + (f_n(x))^2}.$$

1. f stetig $\Rightarrow f_i$ stetig für $i \in \{1, \dots, n\}$:

Es gilt $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \|f(x) - f(y)\|$ und damit sieht man, dass für jede $\varepsilon > 0$ das δ_ε für f auch passt für f_i :

$$x \in A \text{ und } \|x - a\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| \leq \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

2. f_i stetig für $i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow f$ stetig:

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta_{\frac{1}{n}\varepsilon, i} > 0$ derart, dass

$$\|x - a\| < \delta_{\frac{1}{n}\varepsilon, i} \Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \frac{1}{n}\varepsilon.$$

Setzen wir $\delta_\varepsilon = \min \left\{ \delta_{\frac{1}{n}\varepsilon, i}; 1 \leq i \leq n \right\}$, dann gilt für $\|x - a\| \leq \delta_\varepsilon$, dass

$$\|f(x) - f(a)\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} |f_i(x) - f_i(a)|^2} \leq \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{n}\varepsilon\right)^2} = n^{-1/2}\varepsilon < \varepsilon,$$

und f ist stetig in a . ■

Dieses Lemma sagt uns, dass es zum Nachweis der Stetigkeit von $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ reicht, die einzelnen Komponenten $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ anzuschauen.

Die bekannte Standardergebnisse in einer Dimension haben ein Analogon:

Lemma 6.22 1. Wenn $f, g : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind,

dann sind $f + g : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \cdot g : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ stetig¹.

2. Wenn $f, g : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind, und $g(x) \neq 0$ für $x \in A$,

dann ist $f/g : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

¹Man definiert:

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x), & (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), \\ (f/g)(x) &= f(x)/g(x) \quad \text{und} & (g \circ f)(x) &= g(f(x)). \end{aligned}$$

3. Wenn $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ und $g : B \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind und $f(A) \subset B$, dann ist $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Einige Beispiele stetiger Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R} sind:

- Polynome: $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$ mit $a_\alpha \in \mathbb{R}$, wobei α ein Multiindex ist; das heißt

$$\begin{aligned}\alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \text{ und } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m}.\end{aligned}$$

Wenn $a_\alpha \neq 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = k$, dann sagt man p hat Grad k .

- Rationale Funktionen: $q(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ wobei p_1, p_2 auf \mathbb{R}^m definierter Polynomen sind. Das Definitionsgebiet von q ist

$$D = \{x \in \mathbb{R}^m; p_2(x) \neq 0\}.$$

Lemma 6.23 Jedes Polynom $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Jede rationale Funktion $q : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf ihrem Definitionsgebiet D .

Meistens aber nicht immer gilt für $a \in D^c$, dass

$$\lim_{D \ni x \rightarrow a} q(x) = \pm\infty.$$

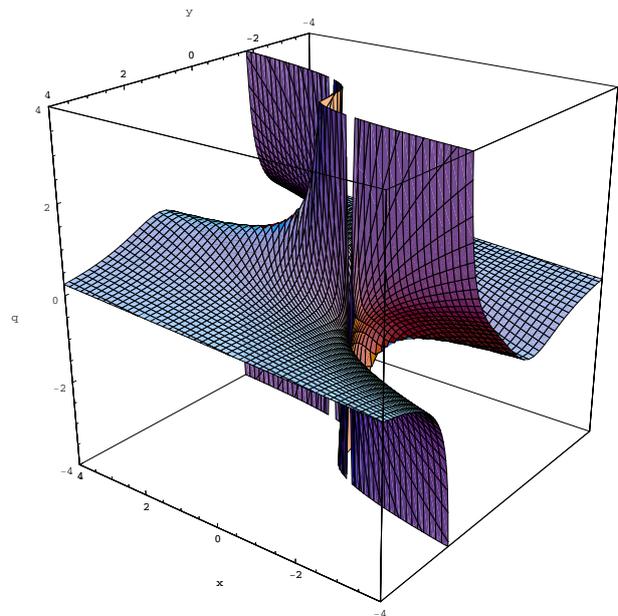
Beispiel 6.24 Rechts steht eine Skizze zu der rationalen Funktion

$$q(x, y) = \frac{xy + 1}{x + y^3}.$$

Sie ist definiert auf

$$D = \{(x, y); x \neq -y^3\}$$

und dort stetig.



Inzwischen hat man so viele Formeln und abstrakte Sachen vorgelesen bekommen, dass man schon versucht, eine Abkürzung zu finden. In einer Dimension ist man für Stetigkeit einmal von links und einmal von rechts zu der kritischen Stelle a gewandert und wenn es beide Male $f(a)$ gab, dann war f stetig in a . Da könnte man doch leicht vermuten, dass man für Stetigkeit von f in $a \in \mathbb{R}^2$ statt von links und rechts, auch nochmal von oben und unten und vielleicht sogar noch einige Diagonalen anschaut. Wenn man auf diesen Wegen nach a wandert, und jedesmal $f(a)$ findet, wird f doch wohl stetig sein in a , oder? Leider hat man sich so selber auf dem Holzweg gebracht. So ein Vorgehen, wie hier beschrieben ist, reicht nicht aus. Dazu ein Beispiel.

Beispiel 6.25 Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Wenn wir über die Achsen zu $(0, 0)$ laufen, finden wir:

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \downarrow 0} 0 = 0 = f(0, 0),$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} = 0 = f(0, 0),$$

$$\lim_{y \downarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \downarrow 0} \frac{0 \cdot y^2}{0 + y^4} = 0 = f(0, 0),$$

$$\lim_{y \uparrow 0} f(0, y) = \lim_{y \uparrow 0} \frac{0 \cdot y^2}{0 + y^4} = 0 = f(0, 0),$$

und sogar auf diagonalem Wege $y = cx$ findet man

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x, cx) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{c^2 x^3}{x^2 + c^4 x^4} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{c^2 x}{1 + c^4 x^2} = 0 = f(0, 0),$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x, cx) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{c^2 x^3}{x^2 + c^4 x^4} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{c^2 x}{1 + c^4 x^2} = 0 = f(0, 0).$$

All diese Arbeit ist umsonst, denn gegen die Erwartungen, die man möglicherweise jetzt hätte, ist f nicht stetig in $(0, 0)$. Betrachtet man nämlich die Folge $\left\{ \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$, dann findet man, dass

$$\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0, 0) \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

und auch, dass

$$f \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = f(0, 0) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Dass heißt, für $\varepsilon < \frac{1}{2}$ existiert kein $\delta > 0$ derart, dass $f(B_\delta(0, 0)) \subset B_\varepsilon(0)$.

Wenn man nun sehen möchte, wie der Graph dieser Funktion aussieht, folgen zwei Bilder, die mit Mathematica gemacht worden sind.

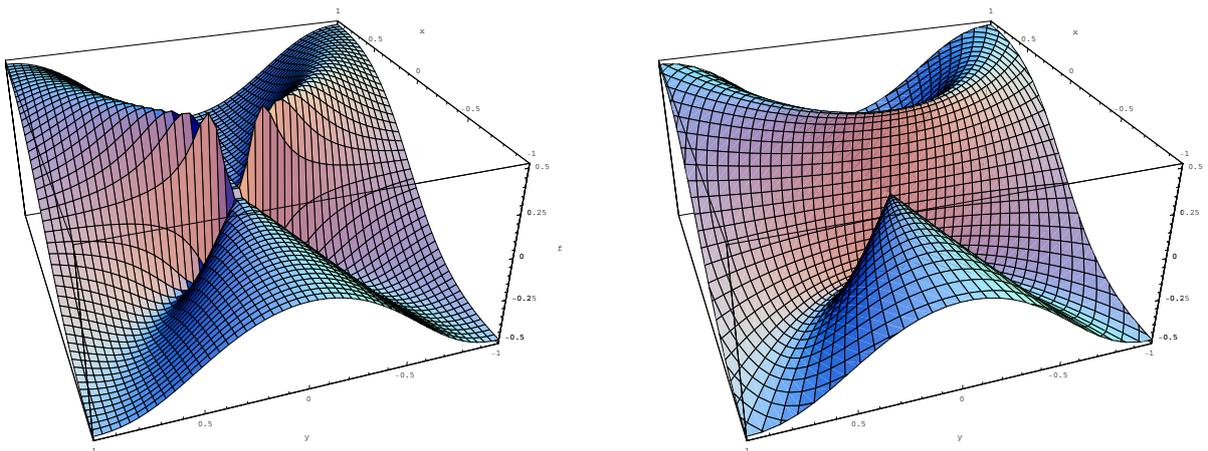


Abbildung 6.3: Die zwei Bilder zu Beispiel 6.25. Geradeaus ‘Plotten’ gibt das linke Bild, wobei man sich noch fragen soll, was das wirre Benehmen bei $(0, 0)$ bedeuten soll. Das rechte Bild gibt den gleichen Graphen, hat aber jetzt ein maßgeschneidertes Parametersystem benutzt.

Wie findet man nun heraus, ob eine Funktion $f : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig ist oder nicht? Oder wie findet man heraus, ob $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert?

Algorithmus 6.1 Um Existenz oder Nicht-Existenz von $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ zu klären.

1. Kann man f als Zusammensetzung von stetigen Funktion schreiben, so benutze man Lemma 6.22.

2. Wenn nicht, betrachte man ein paar geschickt gewählte Folgen

$$\{x^k\}_{k=0}^{\infty}, \{y^k\}_{k=0}^{\infty}, \{z^k\}_{k=0}^{\infty}, \dots \text{ in } A$$

mit $x^k \rightarrow a$, $y^k \rightarrow a$, $z^k \rightarrow a$, ... für $k \rightarrow \infty$ und berechne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k), \lim_{k \rightarrow \infty} f(y^k), \lim_{k \rightarrow \infty} f(z^k), \dots$$

3a. Wenn es eine solche Folge gibt, wobei $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k)$ nicht existiert, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nicht.

3b. Wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \ell_1$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y^k) = \ell_2 \neq \ell_1$, dann existiert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nicht.

3c. Wenn all diese Folgen den gleichen Grenzwert ℓ liefern, kann man vermuten, dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. Dann beweise man eine Abschätzung

$$\|f(x) - \ell\| \leq \dots \leq \rho(\|x - a\|)$$

wobei $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion ist mit $\lim_{t \downarrow 0} \rho(t) = 0$.

Wenn so eine Abschätzung existiert, dann gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

4. Gelingt so eine Abschätzung nicht, geht man zurück zu 2 (vielleicht erst nachdem man Maple eine Skizze hat anfertigen lassen).

Bemerkung 6.25.1 Zu 3a und 3b. In Analysis 1 ist bewiesen worden, dass Folgenlimes und Limes für Funktionen $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ äquivalent sind. Das gilt auch für Funktionen $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. In 3a und 3b hat man gefunden: der Folgenlimes existiert nicht.

Zu 3c. Sei $\varepsilon > 0$ und nehme $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass $\rho(t) < \varepsilon$ für $0 < t < \delta_\varepsilon$. Es folgt für $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$, dass $\|f(x) - \ell\| \leq \rho(\|x - a\|) < \varepsilon$. Das heißt, der Limes existiert.

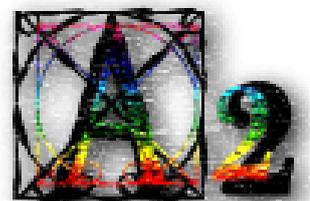
Beispiel 6.26 Existiert $\lim_{x \rightarrow (0,0)} \frac{x_1 x_2}{\|x\|}$? Wenn man einige Folgen $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ mit $x^k \rightarrow (0,0)$ für $k \rightarrow \infty$ betrachtet, findet man nur einen Kandidaten für den Grenzwert, nämlich $\ell = 0$. Da folgende Ungleichung gilt:

$$\left| \frac{x_1 x_2}{\|x\|} - \ell \right| = \frac{|x_1| |x_2|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\| \|x\|}{\|x\|} = \|x\| = \|x - (0,0)\|,$$

hat man $\lim_{x \rightarrow (0,0)} \frac{x_1 x_2}{\|x\|} = 0$.

Analysis 2, Woche 7

Grundbegriffe II



7.1 Noch mehr Dimensionen

In \mathbb{R}^n haben wir, inspiriert durch die Euklidische Länge, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ als Norm verwendet. Es gibt auch andere Möglichkeiten. Auch

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad \text{und} \quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

sind Normen für \mathbb{R}^n . Um den Unterschied zu machen, setzt man

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Mit Hilfe der Norm haben wir ‘offene Kugel’ und darauffolgend ‘offen’ definiert. Weil

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

ist trotzdem der Begriff ‘offen’ identisch für diese drei Normen in \mathbb{R}^n .

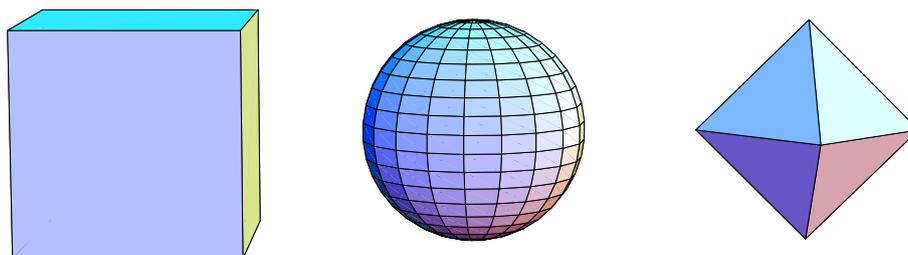


Abbildung 7.1: Die Kugeln für $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_1$ in \mathbb{R}^3 .

Was passiert, wenn wir n in \mathbb{R}^n nach unendlich gehen lassen? Man könnte die Elemente von \mathbb{R}^∞ betrachten als Vektoren (x_1, x_2, \dots) von (abzählbar) unendlicher Länge, anders gesagt als Folgen in \mathbb{R} . Wenn man dafür wie in \mathbb{R}^n verfahren möchte, braucht man eine Norm mit Eigenschaften wie in Definition 1.3. Wenn wir die Euklidische Norm verallgemeinern, finden wir

$$\|(x_1, x_2, \dots)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots} = \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i|^2}. \quad (7.1)$$

Dann sieht man gleich, dass es Vektoren (Folgen) gibt mit endlichen Koordinaten, die trotzdem unendlich groß sind: zum Beispiel $\|(1, 1, 1, 1, \dots)\| = \infty$. Das heißt, entweder

ist (7.1) keine wohldefinierte Norm, oder wir beschränken uns auf Vektoren (Folgen), für die (7.1) endlich ist. Diese zweite Lösung liefert die Vektoren

$$\ell_2 = \left\{ (x_1, x_2, \dots); \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \text{ existiert} \right\}.$$

Lemma 7.1 $(\ell_2, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_2)$ mit $\|\cdot\|_2$ wie in (7.1) ist ein normierter Vektorraum.

Beweis. Es wird dem Leser überlassen zu kontrollieren, dass die Bedingungen in Definitionen 1.1 und 1.3 erfüllt sind. ■

Wenn wir alle "Vektoren $x \in \mathbb{R}^\infty$ " mit beschränkten Koordinaten zulassen wollen, kann man

$$\|(x_1, x_2, \dots)\|_\infty = \sup \{ |x_i|; i \in \mathbb{N}^+ \} \quad (7.2)$$

verwenden und man definiert

$$\ell_\infty = \{ (x_1, x_2, \dots); \text{es gibt } M_x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x_i| \leq M_x \}$$

Lemma 7.2 $(\ell_\infty, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ als in (7.2) ist ein normierter Vektorraum.

Beweis. Auch hier wird es dem Leser überlassen. ■

Bemerkung 7.2.1 Statt $(\ell_2, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_2)$ und $(\ell_\infty, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ wird meistens bloß ℓ_2 und ℓ_∞ geschrieben.

Es gibt andere Möglichkeiten. Eine Klasse von Möglichkeiten bekommt man, indem man für $p \in [1, \infty)$ definiert:

$$\ell_p = \left\{ (x_1, x_2, \dots); \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i|^p \text{ existiert} \right\}.$$

Mit $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^k |x_i|^p}$ wird auch $(\ell_p, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_p)$ zum normierten Vektorraum. Für $p = 1$ lässt sich diese Behauptung relativ leicht kontrollieren.

Der Grund, dass wir hier auch unendlich dimensionale Vektorräume betrachten wollen, ist klar zu machen, dass einige Ergebnisse in diesem Paragraphen nicht nur in \mathbb{R}^n gültig sind. Dann soll man aber mindestens einen unendlich dimensional Vektorraum gesehen haben.

Lemma 7.3 Es gilt

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 && \text{für alle } x \in \ell_1, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 && \text{für alle } x \in \ell_2, \end{aligned}$$

$\ell_1 \subset \ell_2 \subset \ell_\infty$ und $\ell_1 \neq \ell_2 \neq \ell_\infty$.

Beweis. Durch direktes Multiplizieren findet man

$$\sum_{i=1}^k |x_i|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k |x_i| \right)^2 \quad (7.3)$$

für beliebige k und $x_i \in \mathbb{R}$, und es folgt, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i|$ existiert, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |x_i|^2$ existiert (die Folge $\left\{ \sum_{i=1}^k |x_i|^2 \right\}_{k=1}^\infty$ ist monoton wachsend und beschränkt). Es folgt sogar aus (7.3), dass

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \text{ für alle } x \in \ell_1.$$

Ebenso folgt für $x \in \ell_2$, dass $\sup_{i \in \mathbb{N}^+} |x_i|$ existiert und

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \text{ für alle } x \in \ell_2.$$

Um zu zeigen, dass $\ell_2 \neq \ell_\infty$ verwenden wir $x = (1, 1, 1, 1, \dots)$. Für $\ell_1 \neq \ell_2$ betrachte man den Vektor $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$. ■

Wir haben nun gesehen, dass die Norm bestimmt welche Vektoren man bekommt. Nicht nur das; betrachtet man $\mathcal{V}_1 = (\ell_1, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_1)$, $\mathcal{V}_2 = (\ell_1, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_2)$ und $\mathcal{V}_3 = (\ell_1, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ als Vektorräume, dass heißt gleiche Vektoren aber unterschiedliche Normen, findet man, dass die offene Mengen jedesmal wesentlich anders sind.

Beispiel 7.4 Um \mathcal{V}_2 mit \mathcal{V}_3 zu vergleichen, betrachten wir $A_\infty(r) = \{x \in \ell_1; \|x\|_\infty < r\}$ und $A_2(s) = \{x \in \ell_1; \|x\|_2 < s\}$. Es gilt, weil $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$, dass $A_2(s) \subset A_\infty(r)$ für $s \leq r$. Es gibt aber kein $r, s > 0$ derart, dass $A_\infty(r) \subset A_2(s)$. Das sieht man wie folgt. Es reicht wenn wir zeigen können, dass $A_\infty(1) \not\subset A_2(s)$ für alle $s > 0$. Betrachte die Folge

$$\left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \dots\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \dots\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right), \dots,$$

das heißt, $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ ist definiert durch

$$x_i^k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } i \leq k, \\ 0 & \text{für } i > k. \end{cases}$$

Dann gilt $\|x^k\|_\infty = \frac{1}{2}$ und $x^k \in A_\infty(1)$. Es gilt aber auch $\|x^k\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{k}$. Für jede $s > 0$ nehme man $k > 4s^2$ und es folgt $x^k \notin A_2(s)$.

Beispiel 7.5 Um \mathcal{V}_1 und \mathcal{V}_2 zu vergleichen, schauen wir uns die Folge

$$(1, 0, 0, 0, 0, \dots), (2^{-2/3}, 2^{-2/3}, 0, 0, 0, \dots), (3^{-2/3}, 3^{-2/3}, 3^{-2/3}, 0, 0, \dots), \dots$$

an, das heißt $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ ist definiert durch

$$x_i^k = \begin{cases} k^{-2/3} & \text{für } i \leq k, \\ 0 & \text{für } i > k. \end{cases}$$

Man sieht, dass $x^k \in \ell_1$ für alle $k \in \mathbb{N}^+$ aber auch

$$\begin{aligned} \|x^k\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^\infty |x_i^k|^2} = \sqrt{k |k^{-2/3}|^2} = k^{-1/6} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty, \\ \|x^k\|_1 &= \sum_{i=1}^\infty |x_i^k| = k |k^{-2/3}| = k^{1/3} \rightarrow \infty \text{ für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also gibt es keine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ derart, dass

$$\|x\|_1 \leq C \|x\|_2 \text{ für alle } x \in \ell_1.$$

So etwas kann nur in unendlichen Dimensionen geschehen. Für \mathbb{R}^n sahen wir, dass

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Definition 7.6 Sei $(V, +, \mathbb{R}, \cdot, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, dann nennt man die Norm $\|\cdot\|_*$ zu $\|\cdot\|$ äquivalent, wenn es $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$ gibt derart, dass

$$C_1 \|v\| \leq \|v\|_* \leq C_2 \|v\| \text{ für alle } v \in V.$$

Satz 7.7 In \mathbb{R}^n sind alle Normen äquivalent.

Bemerkung 7.7.1 Jeder n -dimensionaler Vektorraum ist isomorph zu \mathbb{R}^n . Das heißt: in jedem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm und $\|\cdot\|_*$ eine andere Norm. Sei $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ die Standardbasis auf \mathbb{R}^n und setzen wir $C = \max \|e_i\|_*$. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_*$ und wegen Cauchy-Schwarz für $\|\cdot\|$, dass

$$\begin{aligned} \|x\|_* &\leq |x_1| \|e_1\|_* + |x_2| \|e_2\|_* + \dots + |x_n| \|e_n\|_* \leq C (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \leq \\ &\leq C\sqrt{n} \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} = C\sqrt{n} \|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist bewiesen für $C_2 = C\sqrt{n}$.

Für die linke Seite verwendet man einen Beweis durch Widerspruch. Nehmen wir an, es gibt keine derartige Konstante $C_1 > 0$, das heißt, es gibt eine Folge $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ so, dass $\|x^k\| > k \|x^k\|_*$. Wir dürfen annehmen, dass $\|x^k\| = 1$ (oder wir ersetzen x^k durch $x^k / \|x^k\|$) und es folgt

$$\|x^k\|_* < \frac{1}{k}. \quad (7.4)$$

Bolzano-Weierstrass sagt uns, dass es eine $\|\cdot\|$ -konvergente Teilfolge $\{x^{k_m}\}_{m=1}^\infty$ gibt. Nennen wir den $\|\cdot\|$ -Limes a . Weil $\|x - x^{k_m}\|_* \leq C_2 \|x - x^{k_m}\|$ konvergiert diese Folge auch nach a für den $\|\cdot\|_*$ -Limes. Wenn $\|x^{k_m} - a\| \rightarrow 0$, dann gilt $\|x^{k_m}\| \rightarrow \|a\|$:

$$-\|x^{k_m} - a\| \leq \|x^{k_m}\| - \|a\| \leq \|x^{k_m} - a\|,$$

und weil $\|x^{k_m}\| = 1$, folgt $\|a\| = 1$. Weil $\|\cdot\|_*$ eine Norm ist und $a \neq 0$, haben wir $\|a\|_* > 0$ und mit $\|x^{k_m}\|_* \rightarrow \|a\|_* > 0$ finden wir einen Widerspruch zu (7.4). ■

Weil alle Normen in \mathbb{R}^n äquivalent sind, ist der Begriff offen, obwohl definiert durch Kugeln $\{x; \|x - a\| < r\}$, in \mathbb{R}^n nicht abhängig von der Norm. Das bedeutet, dass zwar die $\|\cdot\|_*$ -Kugel nicht rund sein muss, aber trotzdem mit $\|\cdot\|_*$ -Kugeln die gleichen offenen Mengen definiert werden.

7.1.1 Neu aus alt

Auch bei normierten Vektorräumen mit unendlich vielen Dimensionen wird offen, abgeschlossen, Häufungspunkte, isolierten Punkte, Cauchy-Folgen, konvergente Folgen, Limes und Stetigkeit ähnlich wie vorher definiert: man ersetzt $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ durch den normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|_V)$. All diese Definitionen sind nur abhängig von der dazugehörigen Norm.

Definition 7.8 Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum und $A \subset V$. A heißt offen, wenn es für jede $a \in A$ ein $r > 0$ gibt mit

$$B_r(a) := \{x \in V; \|x - a\|_V\} \subset A.$$

Definition 7.9 Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum und sei $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ eine Folge in V und $x \in V$.

- Man nennt $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ eine Cauchyfolge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon : k, m > K_\varepsilon \Rightarrow \|x^k - x^m\|_V < \varepsilon.$$

- Man nennt $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge und sagt $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_{\varepsilon} : k > K_{\varepsilon} \Rightarrow \|x^k - x\|_V < \varepsilon.$$

Definition 7.10 Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ zwei normierte Vektorräume und sei $f : D \subset V \rightarrow W$ eine Funktion, $a \in D^{\text{HP}}$ und $\ell \in W$.

- Man sagt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon} > 0 : (0 < \|x - a\|_V < \delta_{\varepsilon} \text{ und } x \in D) \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_W < \varepsilon.$$

- Man sagt f ist stetig in a , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon} > 0 : (\|x - a\|_V < \delta_{\varepsilon} \text{ und } x \in D) \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_W < \varepsilon.$$

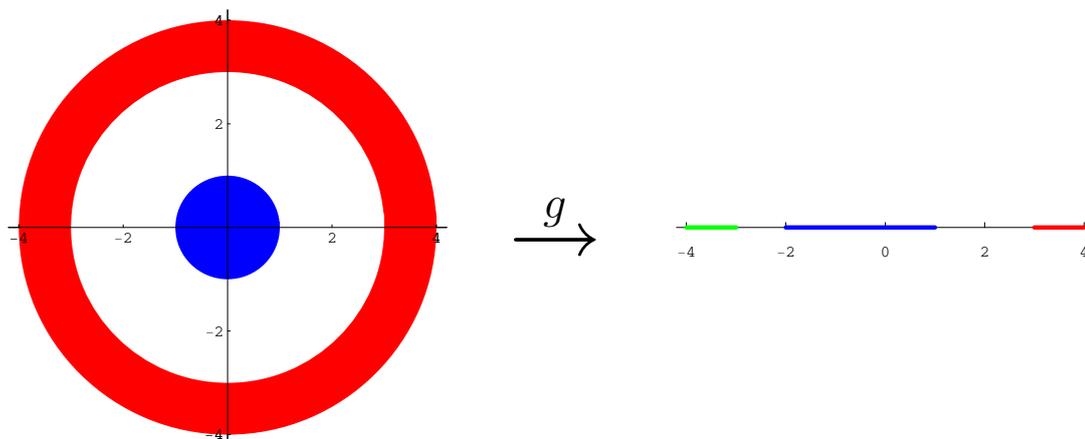
7.1.2 Alternativ bei Stetigkeit

Es gibt eine Verbindung zwischen Stetigkeit und offen. Um diese Verbindung zu beschreiben brauchen wir den Begriff ‘Urbild’.

Definition 7.11 Man definiert das **Urbild** von A bezüglich f durch:

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \in A\}.$$

Man bemerke, dass f^{-1} nicht die inverse Abbildung zu f sein muss. Diese Definition macht sogar Sinn, wenn f nicht mal invertierbar ist. Zum Beispiel gilt für $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \|x\|$, dass $g^{-1}(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^2; a < \|x\| < b\}$. Eine Skizze mit einigen Urbildern folgt: $g^{-1}(3, 4)$ in rot, $g^{-1}(-2, 1)$ in blau und $g^{-1}(-4, -3)$ (nicht) in grün.



Man sieht, dass wenn A kein Bild $f(x)$ enthält, $f^{-1}(A)$ leer ist.

Satz 7.12 Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierten Vektorräume und sei $f : D \subset V \rightarrow W$ eine Funktion. Die Funktion f ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $A \subset W$ das Urbild $f^{-1}(A)$ von A relativ offen in $D \subset V$ ist.

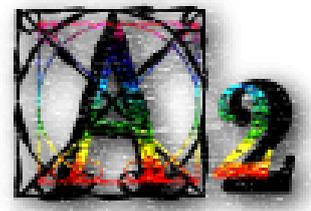
Beweis. (\Rightarrow) Sei f stetig und $A \subset W$ offen. Wenn $f^{-1}(A)$ leer ist, ist man fertig. Wenn $f^{-1}(A)$ nicht leer ist, sollen wir zeigen, dass es für jedes $x \in f^{-1}(A)$ ein $r > 0$ gibt mit $B_r(x) \cap D \subset f^{-1}(A)$. Für ein solches x gilt $f(x) \in A$ und weil A offen ist, gibt es $B_\varepsilon(f(x)) \subset A$. Weil f stetig ist, gibt es $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $y \in B_{\delta_\varepsilon}(x) \cap D$ gilt $f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \subset A$. Das heißt $y \in f^{-1}(A)$ und $B_{\delta_\varepsilon}(x) \cap D \subset f^{-1}(A)$. So ist bewiesen, dass $f^{-1}(A)$ relativ offen in D ist.

(\Leftarrow) Wir nehmen an, ' $A \subset \mathbb{R}^m$ ist offen' impliziert ' $f^{-1}(A)$ relativ offen in D '. Sei $a \in D \subset V$ und $\varepsilon > 0$. Weil $B_\varepsilon(f(a)) \subset \mathbb{R}^m$ offen ist, ist wegen der Annahme $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ relativ offen in $D \subset V$. Weil $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, gibt es $\delta > 0$ derart, dass $B_\delta(a) \cap D \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$. So findet man

$$f(B_\delta(a) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(a))$$

oder nochmals anders gesagt: für $x \in D$ mit $\|x - a\| < \delta$ gilt $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. ■

Analysis 2, Woche 8



Extremwerte

8.1 Definition vom Extremum

In einer Dimension ist man den verschiedenen Typen von Extremwerte schon begegnet. Wir geben sie noch mal allgemein.

Definition 8.1 Sei $f : D \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

- Sie hat ein globales Minimum in $a \in D$, wenn $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in D$.
- Sie hat ein strenges globales Minimum in $a \in D$, wenn $f(x) > f(a)$ für alle $x \in D \setminus \{a\}$.
- Sie hat ein lokales Minimum in $a \in D$, wenn es $r > 0$ gibt mit $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in D \cap B_r(a)$.
- Sie hat ein strenges lokales Minimum in $a \in D$, wenn es $r > 0$ gibt mit $f(x) > f(a)$ für alle $x \in D \setminus \{a\} \cap B_r(a)$.

Auf ähnliche Art definiert man die verschiedenen Sorten vom Maximum.

8.2 Kompaktheit

Eine wichtige Frage ist, ob eine Funktion ihr Minimum annimmt. In Analysis 1 haben wir gesehen, dass es dafür drei Sachen braucht: 1) $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, 2) D ist abgeschlossen, und 3) D ist beschränkt. So etwas gilt auch für $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wenn man zu unendlich dimensionalen Vektorräumen übergeht, reicht abgeschlossen und beschränkt nicht mehr. Wir werden einen Ersatz definieren, der sowohl in endlich als auch in unendlich dimensionalen Vektorräumen funktioniert.

In diesem Paragraphen sind $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume. Man kann sie jederzeit durch $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ und $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ersetzen.

Definition 8.2 Sei $A \subset V$ und $\{U_i\}_{i \in I}$ derart, dass

1. $U_i \subset V$ offen ist für jede $i \in I$, und
2. $\bigcup_{i \in I} U_i \supset A$ ($\{U_i\}_{i \in I}$ überdeckt A),

dann heißt $\{U_i\}_{i \in I}$ eine **offene Überdeckung** von A .

Definition 8.3 $A \subset V$ heißt **kompakt**, wenn es für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von A endlich viele $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}$ gibt, die A überdecken.

In der Analysis ist es oft bequemer, ‘kompakt’ zu ersetzen durch ‘folgenkompakt’.

Definition 8.4 $A \subset V$ heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge $\{x^k\}_{k=0}^\infty \subset A$ eine konvergente Teilfolge $\{x^{k_n}\}_{n=0}^\infty$ hat mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{k_n} \in A$.

Satz 8.5 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist kompakt;
2. A ist folgenkompakt;
3. A ist beschränkt und abgeschlossen.

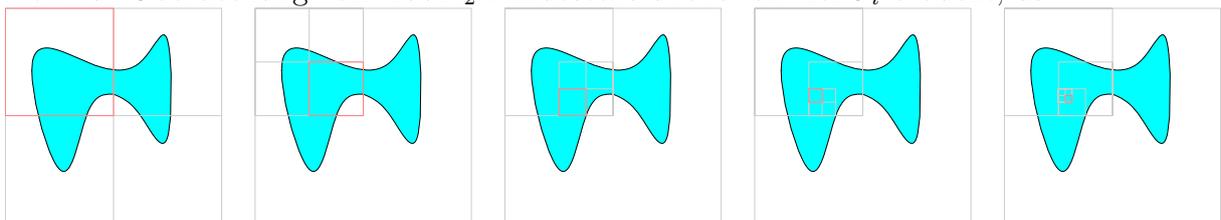
Beweis. Wenn A kompakt ist, dann ist A beschränkt: $\{B_n(a); a \in \mathbb{Z}^n\}$ überdeckt \mathbb{R}^n , also auch A . Nur wenn A beschränkt ist, kann man endlich viele $B_n(a)$ auswählen, die A überdecken.

1 \Rightarrow 2. Nehmen wir an, A ist kompakt aber nicht folgenkompakt. Das heißt, es gibt eine beschränkte Folge $\{x^k\}_{k=0}^\infty \subset A$ ohne eine in A konvergente Teilfolge. Das heißt, die Folge hat keine konstante Teilfolge und aber keinen Häufungspunkt in A . Weil A beschränkt ist, liefert der Satz von Bolzano-Weierstrass uns zu dieser Folge einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}^n$, der also außerhalb von A liegen soll. Setze $U_i = \left(\overline{B_{1/i}(a)}\right)^c$ für $i \in \mathbb{N}^+$. Jede U_i ist offen und weil $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} U_i = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ gilt, überdeckt $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ die Menge A . Wegen der Kompaktheit von A kann man endlich viele U_i wählen, die A schon überdecken. Das bedeutet $A \subset \left(\overline{B_{1/i_0}(a)}\right)^c$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}^+$ und einen Widerspruch.

2 \Rightarrow 3. Wenn A nicht beschränkt ist, dann gibt es eine Folge $\{x^k\}_{k=0}^\infty \subset A$ mit $\|x^k\| > k$. Diese Folge hat keine konvergente Teilfolge.

Wenn A nicht abgeschlossen ist, gibt es einen Häufungspunkt a von A außerhalb A . Wegen Lemma 6.13 gibt es eine Folge $\{x^k\}_{k=0}^\infty \subset A$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a$. Jede Teilfolge hat den gleichen Grenzwert a außerhalb A , also ist A nicht folgenkompakt.

3 \Rightarrow 1. Sei A beschränkt und abgeschlossen und $\{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ eine offene Überdeckung von A , aus dem man keine endliche Überdeckung von A wählen kann. Weil A beschränkt ist, gibt es $M \in \mathbb{R}^+$ mit $A \subset [-M, M]^n$. Den Hyperkubus $K_0 = [-M, M]^n$ teilen wir in 2^n Würfel halber Länge. Es gibt mindestens einen Teilhyperkubus K_1 derart, dass man zur Überdeckung von $A \cap K_1$ mindestens unendlich viel U_i braucht. Teilen wir K_1 wieder auf in 2^n Würfel halber Länge, dann gibt es mindestens einen Teilhyperkubus K_2 derart, dass man zur Überdeckung von $A \cap K_2$ mindestens unendlich viel U_i braucht, usw.



In jede $A \cap K_i$ können wir x^i wählen und $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ ist eine konvergente Folge. Weil A abgeschlossen ist, gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} x^i = a \in A$. Sei U_j eine offene Umgebung von a . Weil U_j offen ist, gibt es $r > 0$ derart, dass $B_r(a) \subset U_j$. Dann hat man aber auch $K_\ell \subset U_j$ für alle

$\ell \geq \ell_0$ mit ℓ_0 genügend groß. Man braucht für die Überdeckung von K_{ℓ_0} nur diesen einen U_j und keine unendlich viele U_i . ■

Bemerkung 8.5.1 Folgenkompakt und kompakt sind auch für unendlich dimensionale, normierte Vektorräume äquivalent und implizieren, dass A beschränkt und abgeschlossen ist. Für die umgekehrte Richtung, das heißt, für die Richtung ‘beschränkt und abgeschlossen’ zu ‘(folgen)kompakt’ ist endlich dimensional eine notwendige Bedingung.

Satz 8.6 Wenn $A \subset V$ kompakt ist und $f : A \rightarrow W$ stetig, dann ist $f(A)$ kompakt.

Beweis. Sei $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in $f(A)$. Dann gibt es eine Folge $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ mit $f(x^k) = y^k$. Weil A kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $\{x^{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ mit $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x^{k_\ell} = a \in A$.

Weil f stetig ist, folgt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} y^{k_\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} f(x^{k_\ell}) = f(\lim_{\ell \rightarrow \infty} x^{k_\ell}) = f(a).$$

Das heißt, $f(A)$ ist (folgen)kompakt. ■

Satz 8.7 (Existenz des Extremums) Sei $A \subset V$ kompakt und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f ihr Maximum¹ und ihr Minimum an. Das heißt, es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in A$ derart, dass

$$f(x_{\min}) = \inf_{x \in A} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_{\max}) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Beweis. Sei $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in $f(A)$ mit $y^k \rightarrow \inf_{x \in A} f(x)$. Dann gibt es eine Folge $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ mit $f(x^k) = y^k$. Wegen der Kompaktheit von A gibt es eine in A konvergente Teilfolge $\{x^{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$, sagen wir $\lim_{\ell \rightarrow \infty} x^{k_\ell} = a$, und

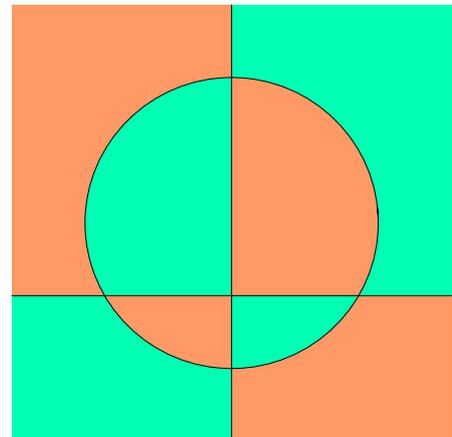
$$\inf_{x \in A} f(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} y^{k_\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} f(x^{k_\ell}) = f(\lim_{\ell \rightarrow \infty} x^{k_\ell}) = f(a).$$

Ähnlich gibt es $b \in A$ mit $f(b) = \sup_{x \in A} f(x)$. ■

Beispiel 8.8 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 - 3) e^{-x_1}$$

hat mindestens zwei Maxima und zwei Minima. Man findet, dass $f = 0$, sowohl auf der x_1 -Achse als auch auf der x_2 -Achse. Auch auf dem Rand des Kreises $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 4$ findet man $f = 0$. Auf dem kompakten (weil beschränkt und abgeschlossen) Gebiet $A = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ und } x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 4\}$ hat f ein Minimum und ein Maximum. Weil das Minimum negativ ist und weil für $x \in \partial A$ gilt $f = 0$, liegt das Minimum innerhalb von A . Dann ist dieses Minimum auch ein lokales Minimum von f . Es gibt noch drei kompakte Teilgebiete, bei denen man so verfahren kann.



¹Hier ist das globale Maximum gemeint.

8.3 Zusammenhang

Wir werden hier Definitionen für allgemeine normierte Vektorräume geben. Man kann immer auch $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ statt $(V, \|\cdot\|_V)$ lesen.

Definition 8.9 Sei $A \subset V$ mit $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum. Die Menge A heißt **zusammenhängend**, wenn es keine Mengen $A_1, A_2 \subset A$ gibt, die folgendes erfüllen:

1. A_1 und A_2 sind beide nicht leer und relativ offen bezüglich A ;
2. $A = A_1 \cup A_2$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

In der Analysis ist es öfters einfacher eine andere Definition zu benutzen.

Definition 8.10 Sei $A \subset V$ mit $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum. Die Menge A heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu jeden $x, y \in A$ eine Kurve (stetige Funktion) $f : [0, 1] \rightarrow V$ gibt, mit $f(0) = x$, $f(1) = y$ und $f([0, 1]) \subset A$.

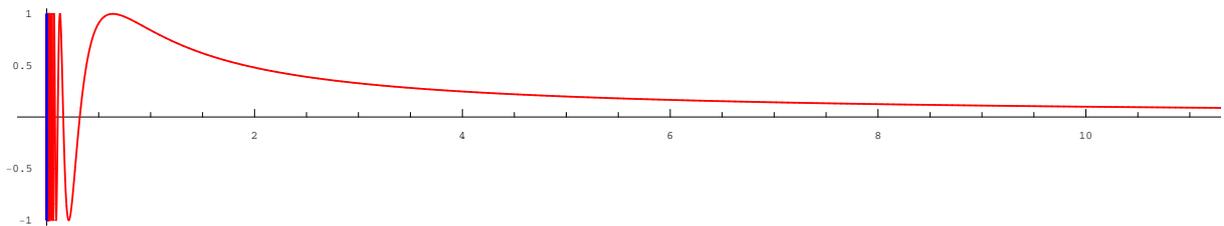
Lemma 8.11 Sei $A \subset V$ mit $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum. Wenn A wegzusammenhängend ist, dann ist A zusammenhängend.

Beweis. Nehmen wir an, A ist wegzusammenhängend aber nicht zusammenhängend. Das heißt, es gibt zwei nicht-leere in A relativ offene Mengen A_1 und A_2 mit $A = A_1 \cup A_2$. Man nehme $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$. Weil wir angenommen haben, dass A wegzusammenhängend ist, gibt es eine Kurve $f : [0, 1] \rightarrow V$ mit $f[0, 1] \subset A$ und $f(0) = a_1$ und $f(1) = a_2$. Setze $t_0 = \sup \{t \in [0, 1] ; f(t) \in A_1\}$. Weil $f(0) \in A_1$ und $f(1) \notin A_1$ gilt $t_0 \in [0, 1]$.

1) Wenn $f(t_0) \in A_2$, also $t_0 > 0$, dann gibt es $r > 0$ mit $B_r(f(t_0)) \cap A \subset A_2$ und $f^{-1}(B_r(f(t_0)))$ ist relativ offen in $[0, 1]$. Das heißt, es gibt $\varepsilon > 0$ mit $(t_0 - \varepsilon, t_0] \subset [0, 1]$ derart, dass $f(t_0 - \varepsilon, t_0] \subset A_2$. Das widerspricht der Definition von t_0 .

2) Wenn $f(t_0) \in A_1$, also $t_0 < 1$, dann gibt es $r > 0$ mit $B_r(f(t_0)) \cap A \subset A_1$ und $f^{-1}(B_r(f(t_0)))$ ist relativ offen in $[0, 1]$. Das heißt, es gibt $\varepsilon > 0$ mit $[t_0, t_0 + \varepsilon) \subset [0, 1]$ derart, dass $f[t_0, t_0 + \varepsilon) \subset A_1$. Das widerspricht der Definition von t_0 . ■

Beispiel 8.12 Sei $A = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) ; x \in \mathbb{R}^+\}$.



- A ist nicht wegzusammenhängend: Die Mengen

$$A_1 = \{0\} \times [-1, 1] \quad \text{und} \quad A_2 = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) ; x \in \mathbb{R}^+ \right\} \quad (8.1)$$

sind wegzusammenhängend aber es gibt keine stetige Kurve $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, die Punkte aus diesen beiden Teilmengen innerhalb von A verbindet. Denn sei f so eine Kurve mit $f(0) \in A_1$ und $f(1) \in A_2$, setze $t_0 = \sup \{t \in [0, 1] ; f(t) \in A_1\}$. Weil A_1 abgeschlossen ist, gilt $f(t_0) \in A_1$. Wenn $t_0 = 1$, dann gilt $f(1) \in A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Wenn $t_0 < 1$, dann gibt es für jede $\delta > 0$ ein $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ derart, dass $\|f(t_0) - f(t)\| > \frac{1}{2}$. Das letztere heißt, f ist nicht stetig in t_0 und ergibt wiederum einen Widerspruch.

- A ist zusammenhängend: Wenn A_1, A_2 wie in Definition 8.9 sind, führt der Wegzusammenhang dazu, dass für eine solche Zerlegung nur A_1 und A_2 in (8.1) oder umgekehrt möglich wären. Die Menge A_1 ist aber nicht relativ offen bezüglich A , denn $(0, 0) \in A_1$ und $B_r(0, 0) \cap A_2$ ist nicht leer.

Satz 8.13 Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann sind äquivalent:

1. A ist wegzusammenhängend;
2. A ist zusammenhängend;
3. Für jede $x, y \in A$ gibt es einen Polygonzug innerhalb von A , der x und y verbindet.

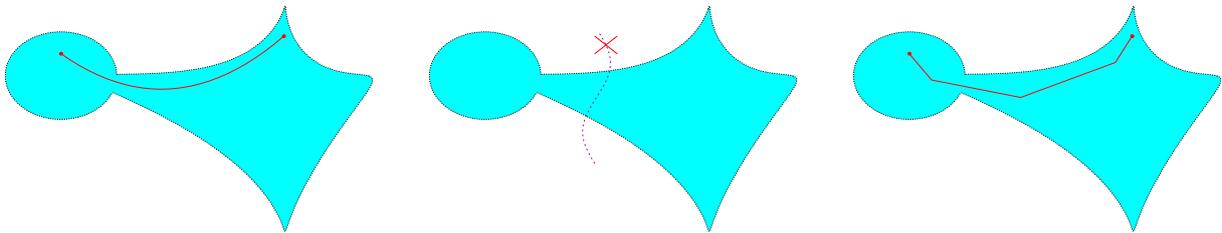


Abbildung 8.1: Wegzusammenhang, Zusammenhang und Polygonzugverbindung.

Beweis. (1 \Rightarrow 2) folgt aus Lemma 8.11.

(2 \Rightarrow 3) Sei $x \in A$ und betrachte

$$U_x = \{z \in A; \text{es gibt einen Polygonzug von } x \text{ zu } z \text{ innerhalb von } A\}.$$

Die Menge U_x ist offen: Sei $z_1 \in U_x$. Weil $U_x \subset A$, gibt es $B_r(z_1) \subset A$. Für $z_2 \in B_r(z_1)$ kann man den Polygonzug von x zu z_1 fortsetzen durch Anbinden der Geraden $[z_1, z_2]$.

Die Menge $A \setminus U_x$ ist offen: Sei $z_1 \in A \setminus U_x$. Es gibt $B_r(z_1) \subset A$ und wenn es $z_2 \in U_x \cap B_r(z_1)$ gebe, so ließe sich der Polygonzug von x nach z_2 mit der Strecke $[z_2, z_1]$ zu einem Polygonzug innerhalb von A von x nach z_1 erweitern. Dann zerlegt $U_x, A \setminus U_x$ die Menge A in zwei nicht-leere offene Mengen und A wäre nicht zusammenhängend.

(3 \Rightarrow 1) Mit einem Polygonzug von x innerhalb von A zu y lässt sich eine verbindende Kurve definieren. ■

Definition 8.14 Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Vektorraum und sei $D \subset V$ und $x \in D$.

$$K_d = \bigcup \{A \subset D; x \in A \text{ und } A \text{ zusammenhängend}\}$$

nennt man die Komponente² von D zu x .

Satz 8.15 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. In jeder beschränkten Komponente von $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}$ gibt es ein lokales Extremum von f .

Bemerkung 8.15.1 Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion gilt ähnliches für jede beschränkte Komponente K von $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}$ mit $\bar{K} \subset D$.

²Eigentlich: Zusammenhangskomponente.

Beweis. Sei K eine solche Komponente und nehmen wir an, dass es $x^0 \in K$ gibt mit $f(x^0) > 0$.

1) Wenn $f(x) > 0$ für ein $x \in K$, so gilt dies für alle $x \in K$. Denn wenn es $y \in K$ gibt mit $f(y) < 0$, nehme man einen Weg $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ in K die x und y verbindet und mit dem Zwischenwertsatz gibt es $t \in (0, 1)$ mit $f(w(t)) = 0$, einem Widerspruch.

2) K ist offen. Sei $x \in K$. Dann gilt $f(x) > 0$ und wegen der Stetigkeit gilt, dass $f^{-1}(\frac{1}{2}f(x), \frac{3}{2}f(x))$ offen ist. Das heißt, es gibt $\delta > 0$ derart, dass für alle $y \in B_\delta(x)$ gilt $f(y) > 0$. Für alle $y \in B_\delta(x)$ liegt die Gerade $[x, y]$ in K , also gilt $B_\delta(x) \subset K$.

3) Für $x \in \partial K$ gilt $f(x) = 0$. Sei $x \in \partial K$. Wenn $f(x) < 0$, gilt $x \in f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ und weil \mathbb{R}^- offen ist, folgt aus der Stetigkeit, dass es $B_r(x) \subset f^{-1}(\mathbb{R}^-)$ gibt und $x \notin \partial K$. Wenn $f(x) > 0$, dann gibt es $r > 0$ mit $f(y) > 0$ für $y \in B_r(x)$. Weil $x \in \partial K$ gibt es $y^0 \in B_r(x) \cap K$. Dann liegt auch $[x, y^0]$ und sogar $B_r(x)$ in K , und es gilt $x \notin \partial K$. Das heißt $f(x) \neq 0$ gibt einen Widerspruch und nur $f(x) = 0$ bleibt übrig.

4) Weil \bar{K} abgeschlossen und beschränkt ist und $f|_{\bar{K}} : \bar{K} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, hat $f|_{\bar{K}}$ ein Minimum und ein Maximum auf \bar{K} .

5) Weil $f(x) > 0$ für $x \in K$ und $f(x) = 0$ für $x \in \partial K$ finden wir, dass das Maximum streng positiv ist. Nennen wir $x_{\max} \in K$ die Stelle, wo das globale Maximum von $f|_{\bar{K}}$ angenommen wird. Weil K offen ist, liegt x_{\max} im Inneren von K , gibt es $B_r(x_{\max}) \subset K$ und es gilt $f(x_{\max}) \geq f(x)$ für $x \in B_r(x_{\max})$. Das wiederum heißt, dass in x_{\max} die Funktion f ein lokales Maximum hat.

Wenn es $x^0 \in K$ gibt mit $f(x^0) < 0$, ersetzt man ‘Maximum’ durch ‘Minimum’. ■

8.4 Partielle Ableitungen

Wir haben vorhin Existenzkriterien für Extrema betrachtet, aber wo liegen sie genau? Anders gesagt, wie berechnet man sie? In einer Dimension hat man die betreffende Funktion differenziert, die Ableitung gleich null gesetzt und so die Kandidaten für Extrema gefunden. Dazu mußte man aber erst untersuchen wie man eine Ableitung findet. In höheren Dimensionen braucht man für ein Extremum, dass die betreffende Funktion in jeder Richtung ein Extremum hat. Diese Überlegung führt uns zu der partiellen Ableitung.

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist Differenzierbarkeit in a äquivalent zu:

- Es existiert ein derartiges Polynom ersten Grades $\ell(x) = f(a) + c(x - a)$, dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - (f(a) + c(x - a))|}{|x - a|} = 0. \quad (8.2)$$

Die Konstante c ist die Ableitung von f in a genannt.

Die Funktion ℓ ist die Tangente an f in a und so betrachtet, bedeutet Differenzierbarkeit in a : es gibt eine Funktion ℓ ersten Grades derart, dass $|f(x) - \ell(x)|$ wesentlich schneller nach 0 geht als $|x - a|$ wenn $x \rightarrow a$.

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es viele Möglichkeiten, eine Tangentialrichtung zu betrachten.

Definition 8.16 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $a \in \mathbb{R}^n$ und e_i der i -te Einheitsvektor:

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

1 an i -ter Stelle

Man nennt f **partiell differenzierbar** in a für die i -te Veränderliche, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} \text{ existiert.}$$

Man schreibt

$$\partial_i f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}.$$

und nennt $\partial_i f(a)$ die i -te partielle Ableitung von f in a .

Bemerkung 8.16.1 Man kann diese Ableitung auch definieren durch alle Koordinaten außer dem i -ten ‘einzufrieren’. Anders gesagt, betrachte $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

und man bekommt $\partial_i f(a) = g'(a_i)$.

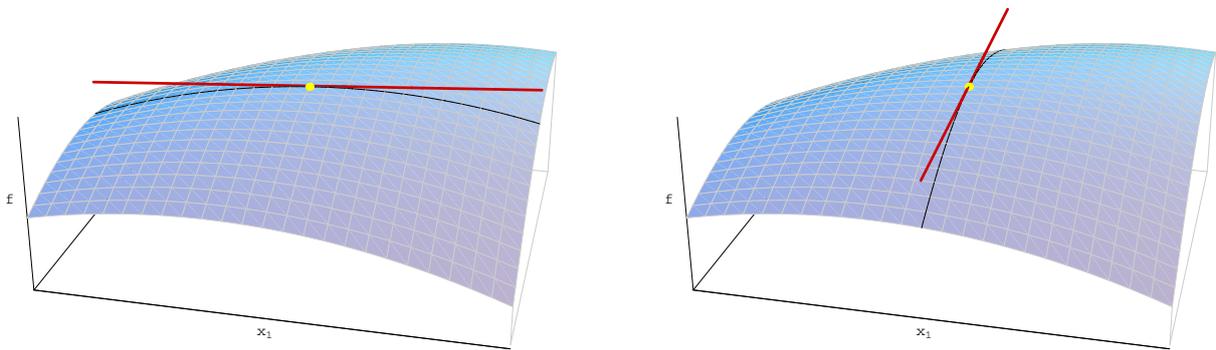


Abbildung 8.2: Für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kann man eine Skizze herstellen; $\partial_1 f(a)$ ist die Steigung der Tangente in x_1 -Richtung und $\partial_2 f(a)$ die Steigung der Tangente in x_2 -Richtung.

Bemerkung 8.16.2 Man begegnet mehreren Notationen für die partiellen Ableitungen von $x \mapsto f(x)$ in $x = a$:

$$\partial_i f(a) = \partial_{x_i} f(a) = D_{x_i} f(a) = f_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right)_{x=a}.$$

Meistens ist klar, welche partielle Ableitung gemeint ist. Nur bei so etwas wie $f_{x_2}(x_2, x_1)$ könnte man Probleme bekommen. Ist da $\partial_1 f(x_2, x_1)$ oder $\partial_2 f(x_2, x_1)$ gemeint?

Definition 8.17 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $a \in \mathbb{R}^n$. Wenn alle n partielle Ableitungen von f in a existieren, schreibt man

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_n f(a)). \quad (8.3)$$

Zum Symbol ∇ sagt man ‘nabla’ und $\nabla f(a)$ nennt man den **Gradienten** von f in a .

Bemerkung 8.17.1 Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist $\partial_i f(a)$, wenn es existiert, ein Spaltenvektor und $\nabla f(a)$ ist eine $n \times m$ -Matrix:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix wird **Jacobimatrix** genannt.

Beispiel 8.18 Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2) = x_1 + \sin(x_1 x_2^2)$. Dann gilt

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 1 + x_2^2 \cos(x_1 x_2^2) \text{ und } \partial_2 f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 \cos(x_1 x_2^2).$$

Auch höhere Ableitungen sind möglich:

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2) &= \partial_1 (1 + x_2^2 \cos(x_1 x_2^2)) = -x_2^4 \sin(x_1 x_2^2), \\ \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) &= \partial_2 (1 + x_2^2 \cos(x_1 x_2^2)) = 2x_2 \cos(x_1 x_2^2) - 2x_2^3 \sin(x_1 x_2^2), \\ \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) &= \partial_1 (2x_1 x_2 \cos(x_1 x_2^2)) = 2x_2 \cos(x_1 x_2^2) - 2x_2^3 \sin(x_1 x_2^2), \\ \partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2) &= \partial_2 (2x_1 x_2 \cos(x_1 x_2^2)) = 2x_1 \cos(x_1 x_2^2) - 4x_1^2 x_2^2 \sin(x_1 x_2^2). \end{aligned}$$

Man sieht $\partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) = \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2)$.

Beispiel 8.19 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ist nicht nur stetig, sondern hat auch partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Die ersten Ableitungen sind³

$$\partial_1 f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

und

$$\partial_2 f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4 x + 3y^2 x^3}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \partial_2 \partial_1 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5 - 0^2 h^3}{(0^2 + h^2)^2} - 0}{h} = 1, \\ \partial_1 \partial_2 f(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^4 h + 3 \cdot 0^2 h^3}{(h^2 + 0^2)^2} - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Satz 8.20 (Vertauschungssatz) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f , $\partial_1 f$, $\partial_2 f$, $\partial_1 \partial_2 f$, und $\partial_2 \partial_1 f$ stetig sind in D , dann gilt $\partial_1 \partial_2 f = \partial_2 \partial_1 f$.

Bemerkung 8.20.1 Man kann die Bedingungen im Theorem noch ein wenig lockern. Suchen Sie in der Literatur nach dem Vertauschungssatz von Schwarz.

³Außerhalb $(0, 0)$ ist f definiert als rationale Funktion und man verwendet die Standardableitungsregeln. In $(0, 0)$ braucht man die Definition:

$$\partial_1 f(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0^3}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Beweis. Sei $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in D$ derart, dass $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \subset D$ nicht leer ist. Betrachte

$$g(x) = f(x, y_1) - f(x, y_0) \quad \text{und} \quad h(y) = f(x_1, y) - f(x_0, y).$$

Es gilt

$$g(x_1) - g(x_0) = f(x_1, y_1) - f(x_1, y_0) - f(x_0, y_1) + f(x_0, y_0) = h(y_1) - h(y_0)$$

und wegen des Mittelwertsatzes gibt es derartige $\xi \in (x_0, x_1)$ und $\eta \in (y_0, y_1)$, dass

$$(x_1 - x_0) g'(\xi) = g(x_1) - g(x_0) = h(y_1) - h(y_0) = (y_1 - y_0) h'(\eta),$$

und anders gesagt:

$$(x_1 - x_0) \left(\partial_1 f(\xi, y_1) - \partial_1 f(\xi, y_0) \right) = (y_1 - y_0) \left(\partial_2 f(x_1, \eta) - \partial_2 f(x_0, \eta) \right).$$

Nochmals den Mittelwertsatz anwenden liefert $\tilde{\eta} \in (y_0, y_1)$ und $\tilde{\xi} \in (x_0, x_1)$ mit

$$(x_1 - x_0) (y_1 - y_0) \partial_2 \partial_1 f(\xi, \tilde{\eta}) = (y_1 - y_0) (x_1 - x_0) \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Das heißt, für jede $x_1 > x_0$ und $y_1 > y_0$ gibt es $(\xi, \tilde{\eta}), (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ mit

$$\partial_2 \partial_1 f(\xi, \tilde{\eta}) = \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Weil $\partial_1 \partial_2 f$, und $\partial_2 \partial_1 f$ stetig sind, gilt

$$\partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0) = \lim_{(x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)} \partial_2 \partial_1 f(\xi, \tilde{\eta}) = \lim_{(x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)} \partial_1 \partial_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0).$$

Sowohl ξ, η , als auch $\tilde{\xi}$ und $\tilde{\eta}$ hängen von (x_1, y_1) ab. Weil $\xi, \tilde{\xi} \in (x_0, x_1)$ und $\eta, \tilde{\eta} \in (y_0, y_1)$ folgt für $(x_1, y_1) \rightarrow (x_0, y_0)$, dass auch $(\xi, \tilde{\eta}) \rightarrow (x_0, y_0)$ und $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \rightarrow (x_0, y_0)$. ■

Proposition 8.21 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $a \in D$ ein Extremum hat, und wenn die partiellen Ableitungen in a existieren, dann gilt $\nabla f(a) = 0$.

Beweis. Wenn $\partial_i f(a) \neq 0$, dann betrachtet man $g(t) = f(a + te_i)$ und geht voran wie in einer Dimension (Satz 11.4 Analysis 1). ■

Definition 8.22 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in D$. Wenn für $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\nabla f(a) = 0$, dann nennt man a einen **stationären Punkt** für f .

Beispiel 8.23 Betrachten wir die Polynome $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p_1(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y \quad \text{und} \quad p_2(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + x + y.$$

Die stationären Punkt(e) sind für p_1 :

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (-1, -1),$$

und für p_2 :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 2y - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (1, 1).$$

Man kann sich überzeugen, dass nur p_1 ein Extremum (Minimum) hat.

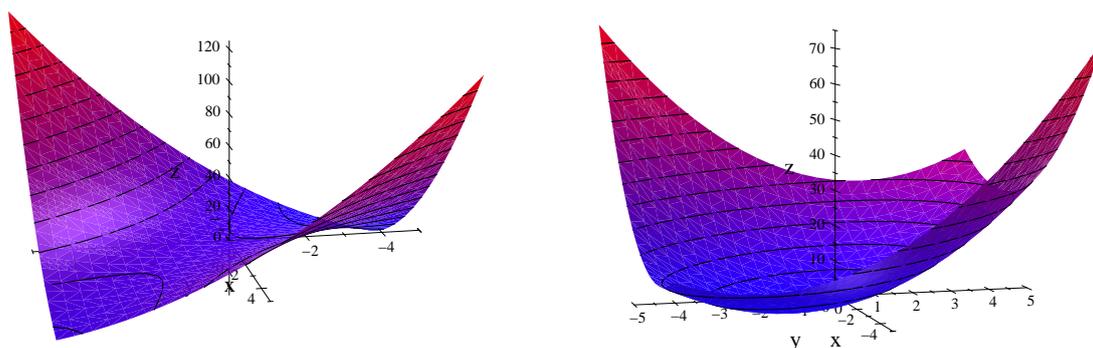


Abbildung 8.3: Skizzen zu p_1 und p_2 aus Beispiel 8.23. Maple hat die Möglichkeit direkt die Niveaumengen angeben zu können.

8.5 Richtungsableitungen

Bei Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat man auch linke und rechte Ableitung definiert. Auch in höheren Dimensionen hat man ähnliches. Statt links und rechts gibt es nun mehrere Richtungen.

Definition 8.24 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Wenn sie existiert, nennt man

$$\partial_u f(a) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

die Richtungsableitung von f an der Stelle a in der Richtung v .

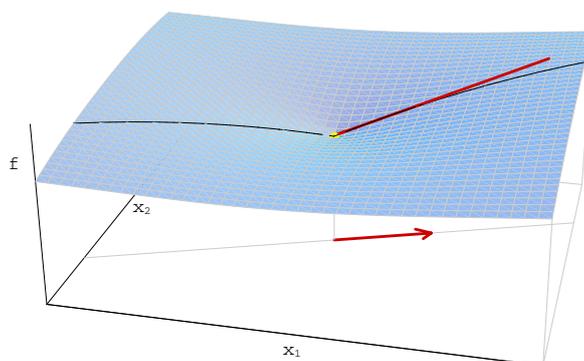


Abbildung 8.4: Für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kann man eine Skizze herstellen; $\partial_v f(a)$ ist die Steigung der Tangente in v -Richtung. Der gelbe Punkt deutet $(a_1, a_2, f(a_1, a_2))$ an und der rote Pfeil soll v darstellen.

Bemerkung 8.24.1 Als alternative Definition kann man auch sagen: es gibt $\ell_u \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{|f(a + tv) - f(a) - \ell_u t|}{t} = 0;$$

und man definiert $\partial_u f(a) = \ell_u$. Oft schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ oder $\frac{\partial}{\partial v} f(a)$ statt $\partial_u f(a)$.

Wenn $\partial_{e_i} f(a)$ und $\partial_{-e_i} f(a)$ existieren und $\partial_{e_i} f(a) = -\partial_{-e_i} f(a)$, dann existiert die i -te partielle Ableitung und es gilt

$$\partial_i f(a) = \partial_{e_i} f(a) = -\partial_{-e_i} f(a).$$

Beispiel 8.25 Für die Euklidische Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ existiert an der Stelle 0 in jede Richtung die Richtungsableitung. Sie hat in 0 keine partiellen Ableitungen.

Beispiel 8.26 Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = 2\sqrt[5]{x^2 y^2}$ hat partielle Ableitungen in $(0, 0)$, aber keine Richtungsableitungen in $(0, 0)$ außer die in $\pm e_1$ und $\pm e_2$ -Richtung.

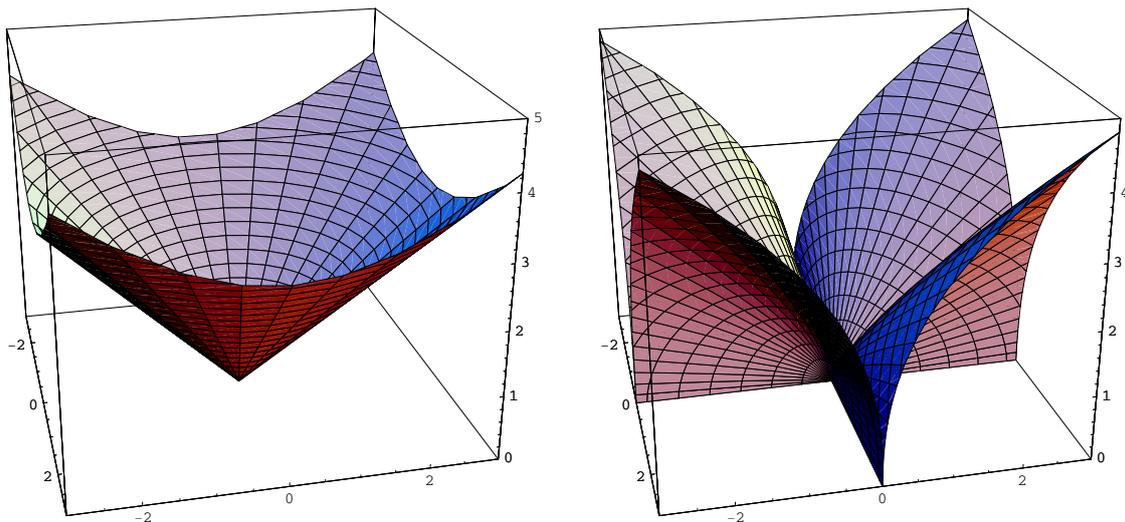


Abbildung 8.5: Skizzen zu Beispiel 8.25 (links) und Beispiel 8.26 (rechts).

Beispiel 8.27 Betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y^4)^2}{|x|^3 + |y|^7} - x^2 y^2 & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann gilt

$$\partial_{e_2} f(0, 0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\frac{(0 - t^4)^2}{0 + t^7} - 0}{t} = 1$$

und auch $\partial_{-e_2} f(0, 0) = 1$. Wenn $u_1 \neq 0$ hat man

$$\begin{aligned} \partial_u f(0, 0) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\frac{((tu_1)^2 - (tu_2)^4)^2}{|tu_1|^3 + |tu_2|^7} - t^4 u_1^2 u_2^2 - 0}{t} = \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{(u_1^2 - t^2 u_2^4)^2}{|u_1|^3 + t^4 |u_2|^7} - t^3 u_1^2 u_2^2 \right) = \frac{u_1^4}{|u_1|^3} = |u_1|. \end{aligned}$$

Wir finden, dass für jede Richtung u die Ableitung $\partial_u f(0, 0)$ existiert und

$$\partial_u f(0, 0) > 0.$$

Trotzdem hat sie kein Minimum in $(0, 0)$, denn $f(t^2, t) = -t^6$.

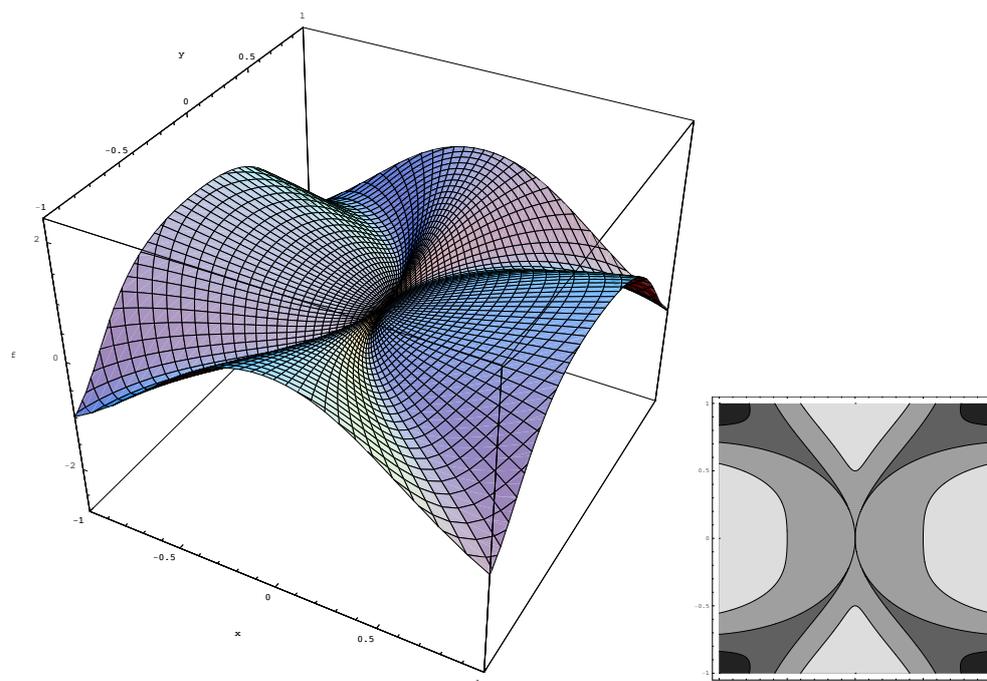


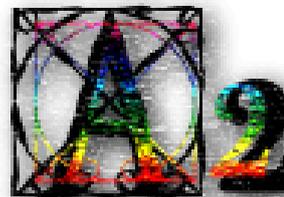
Abbildung 8.6: Skizzen des Graphens und von einigen Niveaumengen zu Beispiel 8.27.

Lemma 8.28 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Wenn $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ in a eine partielle Ableitung $\partial_u f(a)$ hat und $\partial_u f(a) < 0$, dann hat f kein Minimum in a .

Wenn man sich auf partielle und Richtungsableitungen beschränkt, zeigen die Beispiele, dass man nur schwache Aussagen machen kann bezüglich eines Extremwertes.

Analysis 2, Woche 9

Mehrdimensionale Differentialrechnung I



9.1 Differenzierbarkeit

Definition 9.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}^m$. Die Funktion f heißt differenzierbar in a , wenn es eine lineare Abbildung $M_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt derart, dass

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - (f(a) + M_a(x - a))\|}{\|x - a\|} = 0. \quad (9.1)$$

Man nennt M_a die (totale) Ableitung von f in a und $df(a, h) = M_a(h)$ das Differential.

Bemerkung 9.1.1 Wenn f für alle $a \in U$ differenzierbar ist, dann ist das Differential df eine Funktion von $U \times \mathbb{R}^m$ zu \mathbb{R}^n . Oft gibt man die Variablen in $U \times \mathbb{R}^m$ an mit $(x_1, \dots, x_m, dx_1, \dots, dx_m)$.

Bemerkung 9.1.2 Jede lineare Abbildung $M_a : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann man mit Hilfe einer Matrix \mathbf{M}_a schreiben. Wenn wir x als Spaltenvektor schreiben, und wenn nichts anderes darauf deutet meinen wir das auch, hat man

$$M_a(x) = \mathbf{M}_a x. \quad (9.2)$$

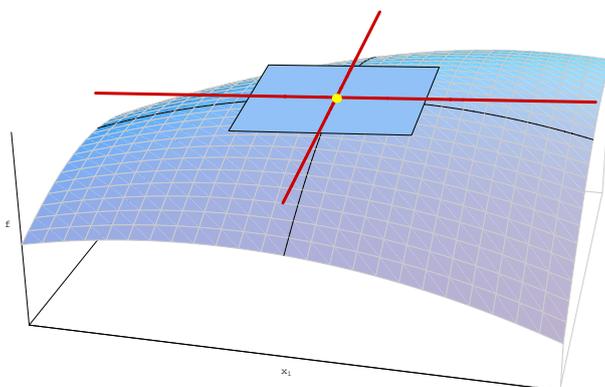


Abbildung 9.1: Für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kann man eine Skizze herstellen. Differenzierbarkeit bedeutet, dass es eine anliegende Tangentialfläche gibt.

Formel (9.1) kann man sich salopp erklären als: es gibt ein Polynom $x \mapsto \ell(x)$ ersten Grades derart, dass $\|f(x) - \ell(x)\|$ echt schneller nach 0 geht als $\|x - a\|$, wenn $x \rightarrow a$. Die Tangentialebene wird beschrieben durch $y = \ell(x)$.

Lemma 9.2 Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}^m$. Die Funktion f ist differenzierbar in a , genau dann, wenn jede Komponente $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$ differenzierbar ist in a .

Beweis. Man verwendet, dass $\|\cdot\|_1$ -Norm und Euklidische Norm in \mathbb{R}^n äquivalent sind: es gibt C_1 und $C_2 > 0$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a) - M_a(x - a)\| &\leq C_1 \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(a) - (M_a(x - a))_i| \\ \|f(x) - f(a) - M_a(x - a)\| &\geq C_2 \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(a) - (M_a(x - a))_i| \end{aligned}$$

und bemerkt, dass (9.1) nur für f gilt, wenn es für jede f_i gilt. ■

Dieses Lemma sagt uns, dass wir uns weiterhin ohne Verlust der Allgemeinheit beschränken dürfen auf $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 9.3 Wenn f differenzierbar ist in a , dann ist f stetig in a .

Beweis. Man hat

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - (f(a) + M_a(x - a))\| + \|M_a(x - a)\|.$$

Wegen (9.1) folgt $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - (f(a) + M_a(x - a))\| = 0$ und mit¹

$$\|M_a(x - a)\| \leq \|M_a\| \|x - a\|$$

folgt $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - f(a)\| = 0$. ■

Lemma 9.4 Wenn f differenzierbar ist in a , dann existieren die partiellen Ableitungen in a und es gilt $M_a(x - a) = \nabla f(a)(x - a)$ mit $x - a$ als Spaltenvektor.

Beweis. Betrachtet man nur spezielle Richtungen für $x \rightarrow a$, nämlich die parallel zu den Achsen, dann vereinfacht sich (9.1) für die i -te Richtung zu

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{\left\| f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m) - \left(f(a) + M_a(0, \dots, 0, x_i - a_i, 0, \dots, 0)^\top \right) \right\|}{|x_i - a_i|}.$$

Der kleine $^\top$ bedeutet transponiert. Weil dieser Limes existiert, hat man die partielle Ableitung in der i -ten Richtung und

$$\partial_i f(a) = M_a(e_i).$$

Es folgt $M_a = \nabla f(a)$. ■

¹Die Norm einer Matrix $M \in M^{n \times m}(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\|M\| = \sup \{ \|Mx\|; x \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \|x\| = 1 \}.$$

Satz 9.5 Wenn die partiellen Ableitungen $\partial_i f$ existieren in einer Umgebung von a und sie stetig sind in a , dann ist f differenzierbar in a .

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, a_n) + \\ &+ f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, a_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, a_{n-1}, a_n) + \\ &+ f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, a_{n-1}, a_n) - f(x_1, x_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) + \\ &+ \dots + \\ &+ f(x_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n). \end{aligned}$$

Verwenden wir den Mittelwertsatz n -mal, dann gibt es ξ_i zwischen x_i und a_i derart, dass

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \partial_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - \nabla f(a) (x - a) &= \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) (\partial_i f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - \partial_i f(a)). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Stetigkeit der partiellen Ableitungen in a erlaubt uns, eine Umgebung $B_\delta(a)$ von a zu wählen derart, dass für $x \in B_\delta(a)$ gilt

$$\|\partial_i f(x) - \partial_i f(a)\| \leq \frac{1}{n} \varepsilon.$$

Bemerke, dass wenn $x \in B_\delta(a)$ auch $(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in B_\delta(a)$ gilt.

Mit (9.3) finden wir

$$\|f(x) - f(a) - \nabla f(a) (x - a)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| \frac{1}{n} \varepsilon \leq \|x - a\| \varepsilon.$$

Das heißt, für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ derart, dass

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \frac{\|f(x) - f(a) - \nabla f(a) (x - a)\|}{\|x - a\|} < \varepsilon.$$

Anders gesagt: f ist differenzierbar in a und $M_a(x - a) = \nabla f(a) (x - a)$. ■

Lemma 9.6 Wenn f differenzierbar ist in a , dann existieren die Richtungsableitungen $\partial_u f(a)$ in a für $\|u\| = 1$ und es gilt $\partial_u f(a) = \nabla f(a) u$.

Beweis. Betrachtet man nur die u -Richtung für $x \rightarrow a$, dann vereinfacht sich (9.1) zu

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\|f(a + tu) - (f(a) + t M_a(u))\|}{t} = 0,$$

und man findet, dass $\partial_u f(a)$ existiert und dass

$$\partial_u f(a) = M_a(u) = \sum_{i=1}^m u_i M_a(e_i) = \nabla f(a) u. \quad \blacksquare$$

Es ist leicht einzusehen, dass wenn $\partial_u f(a) = -\partial_{-u} f(a)$ gilt, die Funktion $g(t) = f(a + tu)$ differenzierbar ist in $t = 0$. Salopp gesagt: der Graph von f hat in a eine Tangente in die u -Richtung.

Beispiel 9.7 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{für } y \neq 0, \\ 0 & \text{für } y = 0, \end{cases}$$

ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar sowohl in x als auch in y -Richtung. Sogar gilt $\partial_u f(0, 0) = -\partial_{-u} f(0, 0)$ in jede Richtung u . Trotz allem ist f nicht differenzierbar in a . Man findet $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$. Setzt man $(x, y) = (t, t)$ mit $t > 0$, dann folgt

$$\frac{\|f(x, y) - f(0) - \nabla f(0) \cdot (x - 0, y - 0)\|}{\|(x - 0, y - 0)\|} = \frac{\left| \frac{t^3}{t^2+t^2} - 0 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \right|}{\|(t, t)\|} = \frac{\frac{1}{2}t}{\sqrt{2}t} = \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass differenzierbar echt mehr ist als nur die Existenz partieller oder Richtungsableitungen.

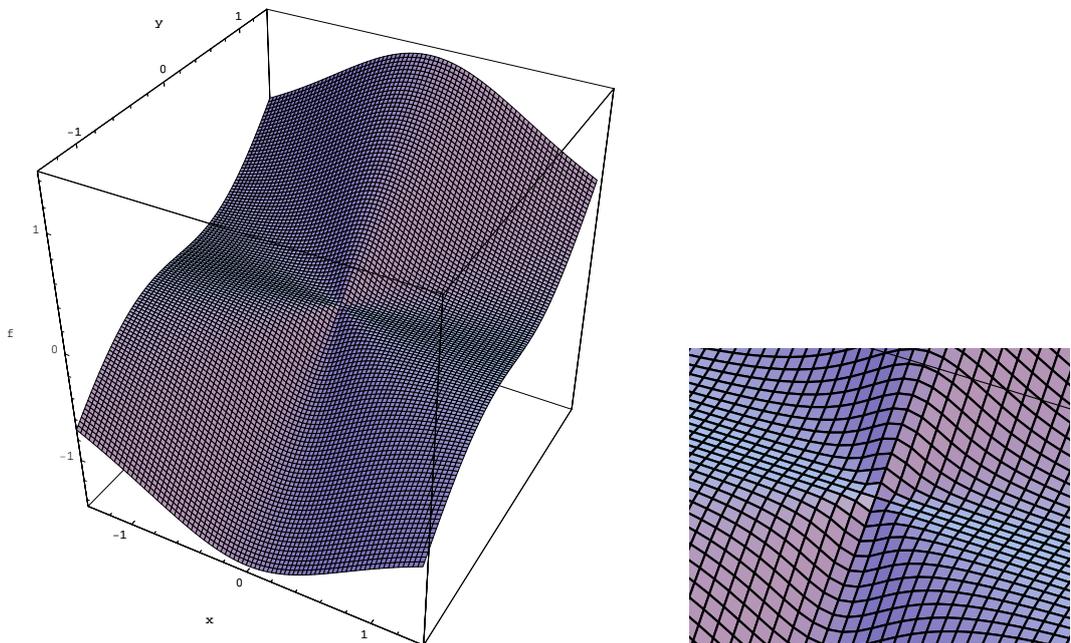


Abbildung 9.2: Eine Skizze zu Beispiel 9.7 mit einer Vergrößerung.

Korollar 9.8 Wenn f differenzierbar ist in a und $\nabla f(a) \neq 0$, dann ist die Richtung u , bei der die maximale Richtungsableitung $\partial_u f(a)$ erreicht wird:

$$u_{\max} = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}.$$

Definition 9.9 Sei $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Das Urbild von $c \in \mathbb{R}$, also $f^{-1}(c)$, nennt man eine **Niveaumenge** von f . Im Fall $m = 2$ und wenn f differenzierbar ist und $\nabla f(a) \neq 0$, werden wir noch zeigen, dass so eine Niveaumenge in einer Umgebung von a eine Kurve definiert. Oft nennt man die Niveaumenge dann eine **Niveaulinie**.

Bemerkung 9.9.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Wenn f differenzierbar ist in jedem $x \in U$, dann nennt man f differenzierbar auf U .

Wenn f differenzierbar ist in $a \in U$ und außerdem ∇f stetig ist in a , nennt man f stetig differenzierbar in a .

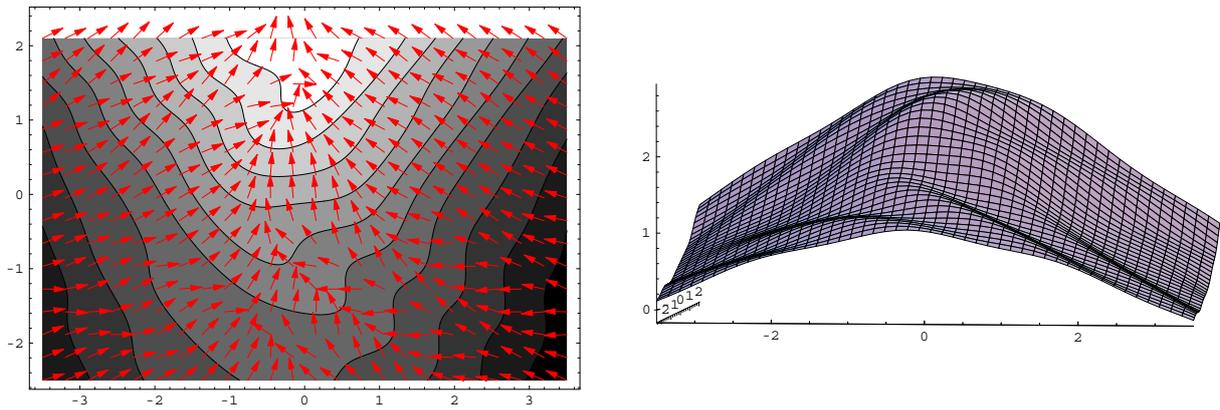


Abbildung 9.3: Links eine Skizze der Niveaulinien und die Richtungen der Gradienten einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; rechts eine Skizze dieser Funktion.

Um m -te Ableitungen von f in a zu definieren benötigt man Existenz der $(m-1)$ -ter Ableitungen von f in einer Umgebung von a . Partielle Ableitungen können aber existieren, ohne dass f differenzierbar ist. Wir legen mal genau fest was wir meinen mit m -mal differenzierbar.

Definition 9.10 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Man sagt, f ist m -mal differenzierbar in a , wenn für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| < m$ gilt:

- $\partial^\alpha f$ existiert in $B_r(a)$, und
- $\partial^\alpha f$ ist differenzierbar in a .

Die Multiindexnotation für α ist wie folgt:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \quad \text{und} \quad \partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} f. \quad (9.4)$$

Bemerkung 9.10.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wenn $f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, f stetig differenzierbar ist in U und ∇f stetig fortsetzbar ist auf \bar{U} , dann nennt man f stetig differenzierbar auf \bar{U} und schreibt $u \in C^1(\bar{U})$. Diese Fortsetzung von ∇f wird wiederum ∇f genannt. Man kann zeigen, dass $(C^1(\bar{U}), \|\cdot\|_{C^1(\bar{U})})$ mit

$$\|f\|_{C^1(\bar{U})} = \sup_{x \in \bar{U}} |f(x)| + \sum_{i=1}^n \sup_{x \in \bar{U}} |\partial_i f(x)|$$

ein normierter Vektorraum ist.

Rekursiv definiert man $C^k(\bar{U})$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, indem man sagt, dass $f \in C^k(\bar{U})$, wenn $f \in C^1(\bar{U})$ und $\partial_i f \in C^{k-1}(\bar{U})$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

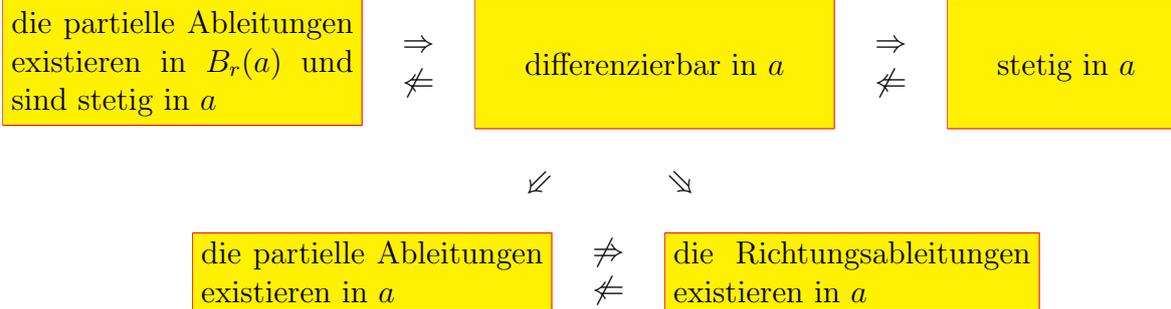
Beispiel 9.11 In Analysis 2 von W. Walter findet man folgendes Beispiel:

$$f(x, y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{für } y \geq x^2, \\ y \left(\frac{|y|}{x^2} - 1 \right) & \text{für } -x^2 < y < x^2, \\ y + x^2 & \text{für } y \leq -x^2. \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar auf \mathbb{R}^2 . Es existieren sogar die zweiten (partiellen) Ableitungen in $(0, 0)$. Trotzdem ist $\partial_2 f$ nicht stetig in $(0, 0)$. Dann ist f auch nicht stetig differenzierbar in $(0, 0)$.

9.1.1 Zusammenfassung

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in U$.



Für f differenzierbar in $a \in U$, $u \in \mathbb{R}^m$ mit $\|u\| = 1$ und $dx = (dx_1, \dots, dx_m) \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$df(a, dx) = \nabla f(a) \cdot dx$$

$$\partial_u f(a) = df(a, u) = \nabla f(a) \cdot u$$

9.2 Rechenregeln

Die Summe- und Produktregeln sind fast wie früher in einer Dimension.

- Wenn $f, g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar sind in a , dann ist $f + g$ differenzierbar in a und

$$\nabla (f + g)(a) = \nabla f(a) + \nabla g(a).$$

- Wenn $f, g : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar sind in a , dann ist gf differenzierbar in a und

$$\nabla (gf)(a) = g(a)\nabla f(a) + (\nabla g(a))f(a).$$

Auch der Beweis ist wie in einer Dimension.

Bei der Kettenregel vereinfacht sich die Notation wenn wir Matrizen verwenden. Schreiben wir die Koordinaten als Spaltenvektor und setzen wir für $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $a \in U$

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_m f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & & \partial_m f_2(a) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \partial_2 f_n(a) & \dots & \partial_m f_n(a) \end{pmatrix}.$$

Lemma 9.12 (Kettenregel) Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^k$ offen, $a \in U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenzierbar in a , $f(U) \subset V$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in $f(a)$. Dann ist $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar in a und

$$\nabla (g \circ f)(a) = \nabla g(f(a)) \nabla f(a).$$

Bemerkung 9.12.1 Man bemerke, dass $\nabla (g \circ f)(a) \in M^{n \times m}(\mathbb{R})$, $\nabla g(f(a)) \in M^{n \times k}(\mathbb{R})$ und $\nabla f(a) \in M^{k \times m}(\mathbb{R})$.

Beweis. Weil f differenzierbar ist in a gilt

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a) (x - a) + r(x) \text{ mit } \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{\|x - a\|} = 0. \quad (9.5)$$

Setze $b = f(a)$. Weil g differenzierbar ist in b gilt

$$g(y) = g(b) + \nabla g(b) (y - b) + s(y) \quad (9.6)$$

mit $\lim_{y \rightarrow b} \frac{s(y)}{\|y - b\|} = 0$. Wir setzen $S : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$S(y) = \begin{cases} \frac{s(y)}{\|y - b\|} & \text{für } y \neq b \\ 0 & \text{für } y = b \end{cases}$$

und bemerken, dass

$$\lim_{y \rightarrow b} S(y) = 0. \quad (9.7)$$

Kombinieren von (9.5) und (9.6) liefert uns²

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= (g \circ f)(a) + \nabla g(f(a)) (f(x) - f(a)) + s(f(x)) = \\ &= (g \circ f)(a) + \nabla g(b) \nabla f(a) (x - a) + \nabla g(b) r(x) + \\ &\quad + \|\nabla f(a) (x - a) + r(x)\| S \left(b + \nabla f(a) (x - a) + r(x) \right), \end{aligned}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} &\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - \nabla g(b) \nabla f(a) (x - a)}{\|x - a\|} = \\ &= \nabla g(b) \frac{r(x)^\top}{\|x - a\|} + \frac{\|\nabla f(a) (x - a) + r(x)\|}{\|x - a\|} S \left(b + \nabla f(a) (x - a) + r(x) \right). \end{aligned}$$

Weil

$$\frac{\|\nabla f(a) (x - a) + r(x)\|}{\|x - a\|} \leq \|\nabla f(a)\| + \frac{\|r(x)\|}{\|x - a\|}$$

und diese rechte Seite wegen (9.5) beschränkt ist, und weil $\lim_{x \rightarrow a} (\nabla f(a) (x - a) + r(x)) = 0$ gilt, finden wir mit nochmals (9.5) und (9.7), dass

$$\lim \frac{\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) - \nabla g(f(a)) \nabla f(a) (x - a)\|}{\|x - a\|} = 0.$$

Das heißt, $g \circ f$ ist differenzierbar in a und $\nabla (g \circ f)(a) = (\nabla g)(f(a)) \nabla f(a)$. ■

²Wir schreiben hier Vektorfunktionen als Spalten. Zum Beispiel:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{pmatrix}.$$

9.3 Extremum

Wenn f differenzierbar ist in a und f in a einen Extremwert erreicht, dann gilt wegen Proposition 8.21, dass $\nabla f(a) = 0$. Wenn $\nabla f(a) = 0$ gilt, ist noch nicht geklärt, ob es tatsächlich in a einen Extremwert gibt. In einer Dimension hat eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Minimum in a , wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$. Und wenn f ein Minimum in a hat, dann gilt $f'(a) = 0$ und $f''(a) \geq 0$. Die zweite Ableitung ist positiv bedeutet, dass diese Funktion f in a 'aufwärts gekrümmt' ist. Kann man auch in höheren Dimensionen ähnliche Argumente benutzen, um auf ein Minimum zu schließen? Dazu erstmal ein Beispiel.

Beispiel 9.13 Betrachten wir $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$ und $g(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$. Anhand der Höhenlinien lässt sich vermuten, dass nur g in $(0, 0)$ ein Minimum hat. Das kann man auch beweisen. Weil

$$0 \leq \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x + \sqrt{2}y\right)^2 = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + 2y^2$$

folgt $2xy \geq -\frac{1}{2}x^2 - 2y^2$ und

$$g(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 \geq x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 2y^2 + 3y^2 = \frac{1}{2}x^2 + y^2.$$

Man sieht $g(x, y) > 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$.

Dagegen sieht man durch

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2$$

dass man über die Gerade $x + \frac{3}{2}y = 0$ negative Werte von f erreicht und f in $(0, 0)$ kein Minimum hat. Skizzen zu f und g findet man in Abbildung 9.4.

Wir werden erst Extrema betrachten bei rein quadratischen Polynomen in \mathbb{R}^n . Solche Polynome lassen sich darstellen als

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und weil $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}x_i x_j$, dürfen wir ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, dass $a_{ij} = a_{ji}$, anders gesagt, dass $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch ist.

9.4 Algebraisches Intermezzo

Definition 9.14 Sei $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix.

- Sie heißt **positiv definit**, wenn es $c > 0$ gibt derart, dass $\xi \cdot M\xi \geq c \|\xi\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.
- Sie heißt **positiv semidefinit**, wenn $\xi \cdot M\xi \geq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.
- Sie heißt **negativ definit**, wenn es $c > 0$ gibt derart, dass $\xi \cdot M\xi \leq -c \|\xi\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

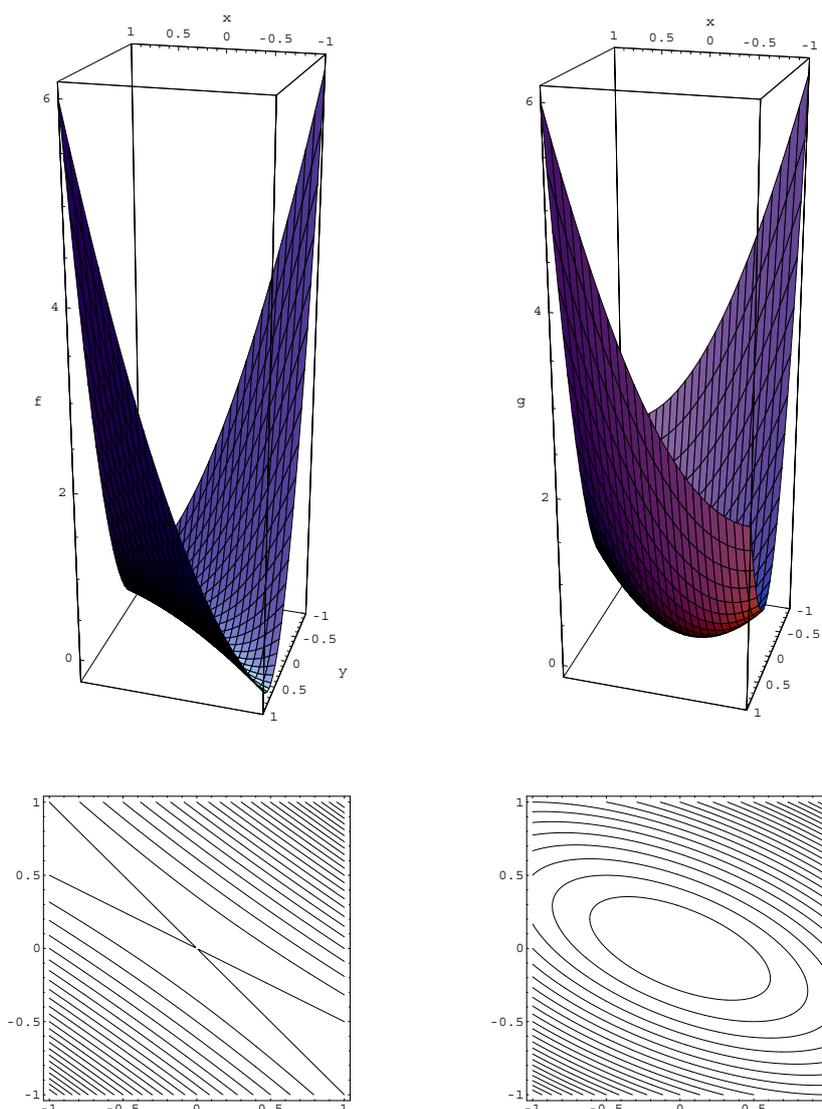


Abbildung 9.4: Die Funktionen f, g aus Beispiel 9.13, zwei Polynomen von Grad 2; unten stehen die zugehörigen Höhenlinien: f hat kein Minimum, g hat ein Minimum.

- Sie heißt **negativ semidefinit**, wenn $\xi \cdot M\xi \leq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.
- Sie heißt **indefinit**, wenn sie nicht semidefinit ist.

Bemerkung 9.14.1 Wenn $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch ist, dann gibt es eine orthogonale Basis von Eigenvektoren. Das heißt: es gibt eine Transformationsmatrix T mit $T^\top = T$ und eine Diagonalmatrix D derart, dass $M = TDT^\top$. Positive Definitheit liefert, weil $\xi \mapsto \|T^\top \xi\|$ und $\xi \mapsto \|\xi\|$ äquivalente Normen sind:

$$(T^\top \xi) \cdot D (T^\top \xi) = \xi \cdot TDT^\top \xi = \xi \cdot M\xi \geq c \|\xi\|^2 \geq \tilde{c} \|T^\top \xi\|^2.$$

Positiv definit heißt “alle Eigenwerte positiv” und positiv semidefinit heißt “alle Eigenwerte nicht negativ”. Wenn M nicht positiv definit ist, dann gibt es also mindestens einen negativen Eigenwert.

Bemerkung 9.14.2 Äquivalent zu $\xi \cdot M\xi \geq c \|\xi\|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist $\xi \cdot M\xi > 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Deutlich ist die Richtung von links nach rechts. Für die umgekehrte Richtung bemerke man, dass $\partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt ist und dass die stetige Funktion $\xi \rightarrow \xi \cdot M\xi$ auf

kompakten Mengen ihr Minimum annimmt. Das heißt, es gibt $\xi_0 \in \partial B_1(0)$ derart, dass $\xi \cdot M\xi \geq \xi_0 \cdot M\xi_0 =: c > 0$ für alle $\xi \in \partial B_1(0)$. Für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\xi \cdot M\xi = \|\xi\|^2 \left(\frac{\xi}{\|\xi\|} \cdot M \frac{\xi}{\|\xi\|} \right) \geq c \|\xi\|^2.$$

Um die Eigenwerte einer Matrix in $M^{n \times n}(\mathbb{R})$ zu berechnen, muss man die Nullstellen eines Polynoms n -ten Grades finden und das ist nicht immer leicht. Wir müssen sie auch nicht explizit kennen, sondern es reicht, wenn wir die Vorzeichen kennen.

Lemma 9.15 Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und M eine symmetrische Matrix in $M^{n \times n}(\mathbb{R})$. Sei

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) =: a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$$

das charakteristische Polynom.

- M ist positiv definit genau dann, wenn $(-1)^k a_k > 0$ für $k = 0, 1, \dots, n$.
- M ist negativ definit genau dann, wenn alle a_k das gleiche Vorzeichen haben.

Beweis. Weil die Matrix M symmetrisch ist, hat sie n unabhängige reelle Eigenvektoren. Nennen wir die dazugehörigen (reellen) Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Wir listen die Eigenwerte inklusiv Multiplizität auf. Positiv definit heißt dann, der kleinste Eigenwert ist positiv: $\lambda_1 > 0$.

(\Leftarrow) Wenn $(-1)^k a_k > 0$ und $\lambda \leq 0$, dann gilt $a_k \lambda^k \geq 0$ und

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n \geq a_0 > 0.$$

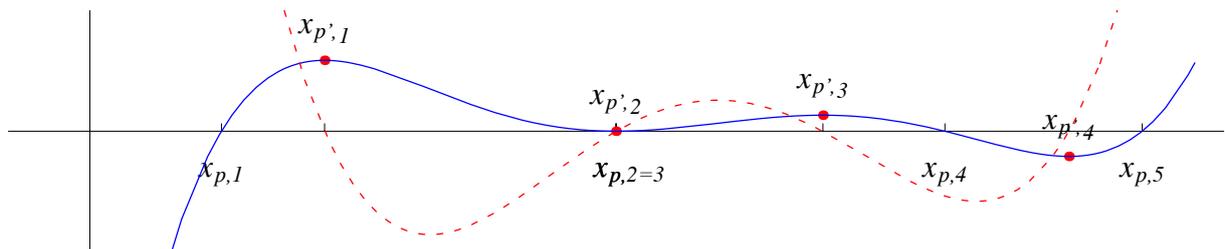
Es folgt, dass p keine negative Nullstelle hat.

(\Rightarrow) Diese Richtung des Beweises verwendet das folgende Ergebnis.

- Wenn ein Polynom q von Grad n genau n reelle Nullstellen $x_{q,1} \leq x_{q,2} \leq \dots \leq x_{q,n}$ hat, dann hat q' genau $n - 1$ reelle Nullstellen $x_{q',1} \leq x_{q',2} \leq \dots \leq x_{q',n}$ und es gilt³

$$x_{q,1} \leq x_{q',1} \leq x_{q,2} \leq x_{q',2} \leq \dots \leq x_{q',n} \leq x_{q,n}.$$

Mehrfache Nullstellen werden mehrfach aufgeführt.



Das heißt, M ist positiv definit genau dann, wenn alle Nullstellen von p und seine Ableitungen positiv sind. Nehmen wir an, $(-1)^k a_k \leq 0$ für mindestens ein k . Wenn $a_k = 0$ dann gilt $p^{(k)}(0) = 0$ und wir haben einen Widerspruch. Wenn $(-1)^k a_k < 0$, dann gilt $(-1)^k p^{(k)}(0) < 0$. Weil

$$\partial_\lambda^k (a_n \lambda^n) = a_n \frac{n!}{(n-k)!} \lambda^{n-k} = (-1)^n \frac{n!}{(n-k)!} \lambda^{n-k},$$

³Wenn $x_{q,i} < x_{q,i+1}$, dann sagt der Mittelwertsatz, dass es $\xi \in (x_{q,i}, x_{q,i+1})$ gibt mit $q'(\xi) = 0$. Wenn $x_{q,i}$ eine m -fache Nullstelle von q ist, dann ist $x_{q,i}$ eine $(m-1)$ -fache Nullstelle von q' . Zwischen zwei Nullstellen von q liegt also mindestens eine Nullstelle von q' , wenn wir die Multiplizität mitzählen. Weil q' Grad $n-1$ hat, liegt auch höchstens eine Nullstelle von q' zwischen $x_{q,i}$ und $x_{q,i+1}$.

gilt für $\lambda < 0$, dass

$$\partial_\lambda^k (a_n \lambda^n) > 0 \text{ für } k \text{ gerade und } \partial_\lambda^k (a_n \lambda^n) < 0 \text{ für } k \text{ ungerade.}$$

Das heißt, für $\lambda \ll 0$ gilt $(-1)^k p^{(k)}(\lambda) > 0$ und mit $(-1)^k p^{(k)}(0) < 0$ liefert der Nullstellensatz eine nicht-positive Nullstelle für $p^{(k)}$. ■

Korollar 9.16 Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ eine symmetrische Matrix in $M^{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$M \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow (ac > b^2 \text{ und } a > 0). \quad (9.8)$$

$$M \text{ ist negativ definit} \Leftrightarrow (ac > b^2 \text{ und } a < 0). \quad (9.9)$$

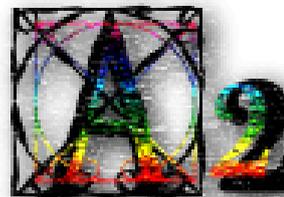
Beweis. Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = (ac - b^2) - (a + c)\lambda + \lambda^2.$$

Weil aus $ac > b^2 \geq 0$ folgt, dass a und c das gleiche Vorzeichen haben, ist $a + c > 0$ äquivalent zu $a > 0$. Ebenso ist $a + c < 0$ äquivalent zu $a < 0$. ■

Analysis 2, Woche 10

Mehrdimensionale Differentialrechnung II



10.1 Zweite Ableitungen und Extrema bei Polynomen

Bei Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat die zweite Ableitung uns geholfen, Extrema zu bestimmen. In höheren Dimensionen wird diese Rolle übernommen durch die Hesse-Matrix.

Definition 10.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $a \in U$. Für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, die zweimal differenzierbar ist, nennt man

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \partial_1 \partial_2 f(a) & \dots & \partial_1 \partial_m f(a) \\ \partial_2 \partial_1 f(a) & \partial_2 \partial_2 f(a) & \dots & \partial_2 \partial_m f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_m \partial_1 f(a) & \partial_m \partial_2 f(a) & \dots & \partial_m \partial_m f(a) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f in a .

Proposition 10.2 Sei $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom und $a \in \mathbb{R}^n$.

- Wenn $\nabla p(a) = 0$ und die Hesse-Matrix $H_p(a)$ positiv definit ist, dann hat p ein lokales Minimum in a .
- Wenn p ein lokales Minimum in a hat, dann gilt $\nabla p(a) = 0$ und die Hesse-Matrix $H_p(a)$ ist positiv semidefinit.

Bemerkung 10.2.1 Für Maxima kann man sich die notwendigen Änderungen vorstellen.

Bemerkung 10.2.2 Aus der zweiten Aussage folgt, dass wenn die Hesse-Matrix $H_p(a)$ indefinit ist, p in a kein Extremum hat. Für $n = 1$ gibt es diesen Fall nicht.

Beweis. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha x^\alpha$ mit $b_\alpha \in \mathbb{R}$ das Polynom. Auch hier ist α ein Multiindex wie in (9.4). Man kann $\tilde{b}_\alpha \in \mathbb{R}$ finden derart, dass $p(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{|\alpha|=k} \tilde{b}_\alpha (x - a)^\alpha$.

Weil

$$\begin{aligned}\partial_i p(a) &= \left(\sum_{k=1}^m \sum_{|\alpha|=k} \tilde{b}_\alpha \alpha_i (x-a)^{\alpha-e_i} \right)_{x=a} = \tilde{b}_{e_i}, \\ \partial_i \partial_j p(a) &= \left(\sum_{k=2}^m \sum_{|\alpha|=k} \tilde{b}_\alpha \alpha_i \alpha_j (x-a)^{\alpha-e_i-e_j} \right)_{x=a} = \tilde{b}_{e_i+e_j} \text{ für } i \neq j, \\ \partial_i^2 p(a) &= \left(\sum_{k=2}^m \sum_{|\alpha|=k} \tilde{b}_\alpha \alpha_i (\alpha_i - 1) (x-a)^{\alpha-2e_i} \right)_{x=a} = 2\tilde{b}_{2e_i} \text{ für } i = j\end{aligned}$$

gilt

$$\nabla p(a) = \left(\tilde{b}_{e_1}, \tilde{b}_{e_1}, \dots, \tilde{b}_{e_n} \right)^\top \text{ und } H_p(a)_{i,j} = \tilde{b}_{e_i+e_j}.$$

Das wiederum heißt

$$\begin{aligned}p(x) &= p(a) + \nabla p(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} (x-a) \cdot H_p(a) (x-a) + R(x) \quad (10.1) \\ \text{mit } R(x) &= \sum_{k=3}^m \sum_{|\alpha|=k} \tilde{b}_\alpha (x-a)^\alpha.\end{aligned}$$

Diesen Restterm R kann man abschätzen: es gibt $C > 0$ derart, dass

$$|R(x)| \leq C \|x-a\|^3 \text{ für } \|x-a\| \leq 1. \quad (10.2)$$

(\Rightarrow) Nehmen wir an, $\nabla p(a) = 0$ und $H_p(a)$ ist positiv definit. Sei c wie in Definition 9.14 und C wie in (10.2). Dann gilt für $\|x-a\| \leq \min(1, \frac{1}{4}c/C)$, dass

$$\begin{aligned}p(x) &= p(a) + \frac{1}{2} (x-a) \cdot H_p(a) (x-a) + R(x) \geq \\ &\geq p(a) + \frac{1}{2}c \|x-a\|^2 - C \|x-a\|^3 \geq p(a) + \frac{1}{4}c \|x-a\|^2\end{aligned}$$

und p hat ein lokales Minimum in a .

(\Leftarrow) Wenn $\nabla p(a) \neq 0$, dann setze $u = \nabla p(a) / \|\nabla p(a)\|$ und es gilt für $x(t) = a - tu$ und $t \in (0, 1)$, dass man (10.1) wie folgt abschätzen kann:

$$p(x(t)) \leq p(a) - t \|\nabla p(a)\| + \frac{1}{2}ct^2 + Ct^3. \quad (10.3)$$

Nimmt man t genügend klein, dann gilt $p(x(t)) < p(a)$ und p hat kein Minimum in a .

Wenn $\nabla p(a) = 0$ und $H_p(a)$ einen negativen Eigenwert $-\gamma$ hat, sage $H_p(a)\xi = -\gamma\xi$ mit $\|\xi\| = 1$, dann gilt für $x(t) = a + t\xi$ und $t \in (0, 1)$, dass man (10.1) wie folgt abschätzen kann:

$$p(x(t)) \leq p(a) - \frac{1}{2}\gamma t^2 + Ct^3. \quad (10.4)$$

Nimmt man t genügend klein, dann gilt $p(x(t)) < p(a)$ und p hat kein Minimum in a . ■

Bevor wir das Ergebnis von Proposition 10.2 erweitern können für nicht-polynomiale Funktionen, schauen wir uns die Taylor-Approximation in höheren Dimensionen an.

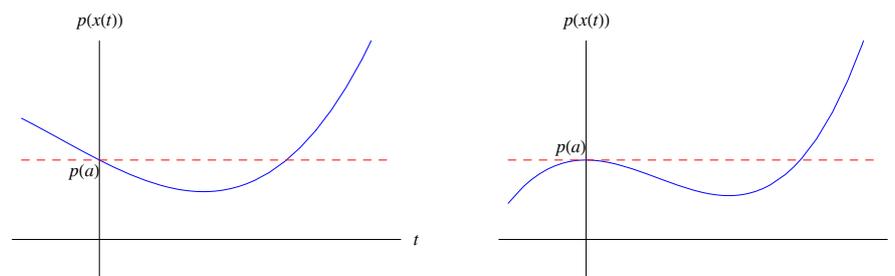


Abbildung 10.1: Skizzen zu (10.3) und (10.4)

10.2 Approximation durch Polynome

10.2.1 Das Taylorpolynom

Eine m -mal differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konnte man approximieren durch Taylorpolynome von Grad höchstens gleich m . Wenn man g approximieren möchte bei 0 verwendet man:

$$p(t) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} t^k g^{(k)}(0) = g(0) + t g'(0) + \frac{1}{2} t^2 g''(0) + \cdots + \frac{1}{m!} t^m g^{(m)}(0). \quad (10.5)$$

Wenn man eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf ähnliche Art in einer Umgebung von a approximieren möchte, dann kann man erst einmal versuchen, welches Ergebnis man bekommt, wenn man sich beschränkt auf eine Richtung. Besser gesagt, wenn f m -mal differenzierbar ist und man ist interessiert an der u -Richtung ($u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\| = 1$), dann ist $g(t) = f(a + tu)$ auch m -mal differenzierbar und man kann das Ergebnis in einer Dimension verwenden. Weil

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(a + tu)) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a + tu) u_i = ((u \cdot \nabla) f)(a + tu).$$

wird das Polynom in (10.5):

$$p(t) = f(a) + t ((u \cdot \nabla) f)(a) + \frac{1}{2} t^2 ((u \cdot \nabla)^2 f)(a) + \cdots + \frac{1}{m!} t^m ((u \cdot \nabla)^m f)(a).$$

Setzt man $x = a + tu$, dann bekommt man salopp notiert:

$$\tilde{p}(x) = f(a) + ((x - a) \cdot \nabla) f(a) + \frac{1}{2} ((x - a) \cdot \nabla)^2 f(a) + \cdots + \frac{1}{m!} ((x - a) \cdot \nabla)^m f(a).$$

Eine mehr präzise Schreibweise für $((x - a) \cdot \nabla)^k f(a)$ ist

$$\left(((x - a) \cdot \nabla_\xi)^k f(\xi) \right)_{\xi=a},$$

denn ∇ soll nur auf f angewendet werden. Zum Beispiel für $n = k = 2$ hat man

$$\begin{aligned} ((x - a) \cdot \nabla)^2 f(a) &= (x_1 - a_1)^2 \partial_1 \partial_1 f(a) + (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) \partial_1 \partial_2 f(a) + \\ &+ (x_2 - a_2)(x_1 - a_1) \partial_2 \partial_1 f(a) + (x_2 - a_2)^2 \partial_2 \partial_2 f(a). \end{aligned}$$

Ist f sogar m -mal stetig differenzierbar in einer Umgebung von a , dann gilt $\partial_1 \partial_2 f(a) = \partial_2 \partial_1 f(a)$.

Für $n \geq 2$ und $k \geq 2$ begegnet man mehreren mehrfach erscheinenden Termen. Wie man die kombinieren kann, folgt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 10.3 Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt, wenn wir die Multiindexnotation verwenden:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k = \sum_{|\beta|=k, \beta \in \mathbb{N}^n} \binom{k}{\beta} x^\beta. \quad (10.6)$$

Für ein Multiindex $\beta \in \mathbb{N}^n$ definiert man

$$\begin{aligned} \beta! &= \beta_1! \beta_2! \dots \beta_n! \text{ und} \\ \binom{k}{\beta} &= \frac{k!}{\beta!} = \frac{k!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_n!}. \end{aligned}$$

Beweis. Für $n = 1$ ist diese Behauptung trivialerweise wahr. Für $n = 2$ ist es die bekannte Binomialformel. Nehmen wir an, sie stimmt für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1})^k &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (x_1 + \dots + x_n)^m x_{n+1}^{k-m} = \\ &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \left(\sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} \binom{m}{\beta} x^\beta \right) x_{n+1}^{k-m} = \\ &= \sum_{m=0}^k \sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{k!}{m! (k-m)!} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_n!} x^\beta x_{n+1}^{k-m} = \\ &= \sum_{|\tilde{\beta}|=k, \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^{n+1}} \frac{k!}{\tilde{\beta}_1! \tilde{\beta}_2! \dots \tilde{\beta}_n! \tilde{\beta}_{n+1}!} x^{\tilde{\beta}}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $\tilde{\beta}_i = \beta_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\tilde{\beta}_{n+1} = k - m$ geschrieben. ■

Wenn ∂_i und ∂_j kommutieren, kann man die Formel in (10.6) auch anwenden auf den Differentialoperator $(u_1 \partial_1 + \dots + u_n \partial_n)^k$ und man findet, wieder die Multiindexnotation benutzend, dass

$$(u \cdot \nabla)^k f(a) = \sum_{|\beta|=k, \beta \in \mathbb{N}^n} \binom{k}{\beta} u^\beta \partial^\beta f(a).$$

Definition 10.4 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Für eine m -mal stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das **Taylorpolynom m -ter Ordnung bei a** durch

$$T_{m,a}(x) = \sum_{|\beta| \leq m, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{(x-a)^\beta}{\beta!} \partial^\beta f(a). \quad (10.7)$$

Bemerkung 10.4.1 Man soll bemerken, dass

$$\frac{1}{k!} \sum_{|\beta|=k, \beta \in \mathbb{N}^n} \binom{k}{\beta} (x-a)^\beta \partial^\beta f(a) = \sum_{|\beta|=k, \beta \in \mathbb{N}^n} \frac{(x-a)^\beta}{\beta!} \partial^\beta f(a).$$

Satz 10.5 (Taylor) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar auf $B_r(a)$, und sei $T_{m,a}$ das zugehörige Taylorpolynom m -ter Ordnung bei a . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - T_{m,a}(x)|}{\|x - a\|^m} = 0. \quad (10.8)$$

Für $R_m(x) = f(x) - T_{m,a}(x)$ gilt sogar, dass für jedes $x \in B_r(a)$ ein $\theta_x \in (0, 1)$ existiert derart, dass

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} ((x-a) \cdot \nabla)^{m+1} f(a + \theta_x(x-a)). \quad (10.9)$$

Bemerkung 10.5.1 Man nennt R_m den **Restterm von Lagrange**. Man kann (10.9) auch formulieren als: es gibt $\xi \in [a, x]$ mit

$$f(x) = T_{m,a}(x) + \frac{1}{(m+1)!} ((x-a) \cdot \nabla)^{m+1} f(\xi).$$

Man definiert $[a, x] \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$[a, x] := \{\theta a + (1-\theta)x \in \mathbb{R}^n; 0 \leq \theta \leq 1\}. \quad (10.10)$$

Bemerkung 10.5.2 Das Taylorpolynom in (10.5) ist das einzige Polynom von Grad kleiner gleich m wobei in a alle Ableitungen von Ordnung m und kleiner übereinstimmen mit den betreffenden Ableitungen von f . Man findet nämlich genau, dass

$$\partial_x^\alpha \frac{(x-a)^\beta}{\beta!} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{wenn } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Die Gleichung $\alpha = \beta$ bedeutet, dass $\alpha_i = \beta_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, und $\alpha \neq \beta$ bedeutet, dass es mindestens ein $i = 1, \dots, n$ gibt mit $\alpha_i \neq \beta_i$.

Beweis. Definieren wir $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(t) = f(a + t(x-a))$, bekommen wir durch den eindimensionalen Taylorsatz, dass

$$\begin{aligned} f(a + t(x-a)) &= g(t) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} t^k g^{(k)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} t^{m+1} g^{(m+1)}(\theta) = \\ &= T_{m,a}(a + t(x-a)) + \frac{1}{(m+1)!} t^{m+1} ((x-a) \cdot \nabla)^{m+1} f(a + \theta(x-a)). \end{aligned}$$

Für $t = 1$ folgt

$$f(x) = T_{m,a}(x) + \frac{1}{(m+1)!} ((x-a) \cdot \nabla)^{m+1} f(a + \theta(x-a)).$$

Weil wir angenommen haben, dass f sogar $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar ist, ist $\partial^\beta f$ für $|\beta| \leq m+1$ beschränkt auf $\overline{B_{r-\varepsilon}(a)}$. Das heißt, es gibt eine Schranke $M \in \mathbb{R}^+$ derart, dass

$$\frac{|f(x) - T_{m,a}(x)|}{\|x-a\|^m} = \frac{\left| \frac{1}{(m+1)!} ((x-a) \cdot \nabla)^{m+1} f(a + \theta(x-a)) \right|}{\|x-a\|^m} \leq M \|x-a\|,$$

und (10.9) folgt. ■

10.2.2 Die Taylorreihe

Für Potenzreihen einer Variablen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ haben wir gesehen, es gibt $R \in [0, \infty]$ derart, dass diese Reihe konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$ (oder $t \in \mathbb{C}$) mit $|t| < R$. Ein solches Ergebnis gibt es auch für Potenzreihen mehrerer Variablen.

- Eine Potenzreihe für $x \in \mathbb{R}^n$ sieht aus wie folgt:

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_{\beta} x^{\beta} \text{ mit Koeffizienten } a_{\beta} \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}\text{)}.$$

Die Reihenfolge wie \mathbb{N}^n durchlaufen werden soll, ist nicht mehr auf eine natürliche Weise festgelegt. Wir verabreden folgendes:

- Diese Reihe heißt konvergent, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} a_{\beta} x^{\beta} \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}).
- Sie heißt absolut konvergent, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} |a_{\beta} x^{\beta}| \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}).

Proposition 10.6 Sei $\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_{\beta} x^{\beta}$ eine Potenzreihe. Setze $A_m = \max\{|a_{\beta}|; |\beta| = m\}$ und nehme an $\sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m$ hat Konvergenzradius R .

1. Dann konvergiert $\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_{\beta} x^{\beta}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\max\{|x_i|; i = 1, \dots, n\} < R$.
2. Für $s < R$ konvergiert $x \mapsto \sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_{\beta} x^{\beta}$ gleichmäßig auf $(\overline{B_s(0)})^n$.

Beweis. Es gibt weniger als $(m+1)^n$ Multiindizes β mit $|\beta| = m$. Setzen wir

$$t = \max\{|x_i|; i = 1, \dots, n\}$$

dann haben wir

$$\sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} |a_{\beta} x^{\beta}| \leq (m+1)^n |a_{\beta}| t^m.$$

Weil

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m t^m \text{ und } \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^n A_m t^m$$

den gleichen Konvergenzradius haben, nämlich R , und weil folgende Abschätzung gilt

$$\sum_{m=0}^k \sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} |a_{\beta} x^{\beta}| \leq \sum_{m=0}^k (m+1)^n A_m t^m,$$

liefert das Majorantenkriterium, dass auch $\sum_{\beta \in \mathbb{N}^n} a_{\beta} x^{\beta}$ konvergent ist.

Setze $t = \sqrt{sR} \in (s, R)$. Weil $\lim_{m \rightarrow \infty} (m+1)^n A_m t^m = 0$ ist $\{(m+1)^n A_m t^m\}_{m=0}^{\infty}$ beschränkt, sag durch M , und wir finden für $x \in (\overline{B_s(0)})^n$, dass

$$\sum_{|\beta|=m, \beta \in \mathbb{N}^n} |a_{\beta} x^{\beta}| \leq M \left(\frac{s}{t}\right)^m.$$

Es folgt, dass

$$\left| \sum_{|\beta| \geq m, \beta \in \mathbb{N}^n} a_{\beta} x^{\beta} \right| \leq \sum_{|\beta| \geq m, \beta \in \mathbb{N}^n} |a_{\beta} x^{\beta}| \leq \frac{M}{1 - \frac{s}{t}} \left(\frac{s}{t}\right)^m$$

und wir haben die gleichmäßige Konvergenz. ■

Lemma 10.7 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Seien $T_{m,a}$ die Taylorpolynome und R_m die dazugehörigen Restterme. Wenn $R_m(x) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf

$$W = \overline{B_R(a_1) \times B_R(a_2) \times \cdots \times B_R(a_n)},$$

dann konvergieren die Taylorpolynome $T_{m,a}$ gleichmäßig nach f auf W für $m \rightarrow \infty$

Beweis. Hier ist nur zu bemerken, dass $f(x) = T_{m,a}(x) + R_m(x)$. ■

In einer Dimension haben wir schon gesehen, dass Konvergenz von $\{T_{m,a}(x)\}_{m=0}^{\infty}$ nicht unbedingt bedeutet $T_{m,a}(x) \rightarrow f(x)$.

10.3 Hesse-Matrix und Extremum

Satz 10.8 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a \in U$ und nehme an: $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist dreimal stetig differenzierbar in a .

- Wenn $\nabla f(a) = 0$ und die Hesse-Matrix $H_f(a)$ positiv definit ist, dann hat f ein lokales Minimum in a .
- Wenn f ein lokales Minimum in a hat, dann gilt $\nabla f(a) = 0$ und die Hesse-Matrix $H_f(a)$ ist positiv semidefinit.

Bemerkung 10.8.1 Für Maxima kann man sich die notwendigen Änderungen vorstellen.

Bemerkung 10.8.2 Aus der zweiten Aussage folgt, dass wenn die Hesse-Matrix $H_f(a)$ indefinit ist, f in a kein Extremum hat.

Beweis. Wenn f dreimal stetig differenzierbar ist auf $\overline{B_r(a)}$, dann ist

$$\max \left\{ |\partial_i \partial_j f(x)| ; x \in \overline{B_r(a)} \text{ und } i, j \in \{1, n\} \right\}$$

endlich und es gibt $M \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$|f(x) - T_{2,a}(x)| = |R_2(x)| \leq M \|x - a\|^3.$$

- Wenn $\nabla f(a) = 0$ und $\xi \cdot H_f(a)\xi \geq c \|\xi\|^2$, dann gilt für $x \in \overline{B_r(a)}$:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq T_{2,a}(x) - M \|x - a\|^3 = \\ &= f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) + (x - a) \cdot H_f(a) (x - a) - M \|x - a\|^3 \geq \\ &\geq f(a) + c \|x - a\|^2 - M \|x - a\|^3. \end{aligned}$$

Setzen wir $r_1 = \min\left(r, \frac{c}{2M+1}\right)$ dann gilt für $x \in \overline{B_{r_1}(a)}$, dass

$$f(x) \geq f(a) + \frac{1}{2}c \|x - a\|^2$$

und es ist bewiesen, dass f ein lokales Minimum hat.

- Wenn $\nabla f(a) \neq 0$, dann betrachten wir $x = a - t\nu$ mit $\nu = \nabla f(a)$ und finden für $t > 0$ genügend klein, dass

$$\begin{aligned} f(a - t\nu) &= f(a) + t\nabla f(a) \cdot \nu + R_1(a - t\nu) \leq \\ &\leq f(a) - t \|\nabla f(a)\|^2 + c_1 t^2 < f(a). \end{aligned}$$

Wenn $\nabla f(a) = 0$ und $H_f(a)$ nicht positiv semidefinit ist, dann hat $H_f(a)$ einen negativen Eigenwert λ . Sei φ die dazugehörige Eigenvektor. Dann gilt für $t > 0$ und genügend klein, dass

$$\begin{aligned} f(a - t\varphi) &= f(a) + t\nabla f(a) \cdot \varphi + t^2 \varphi \cdot H_f(a) \varphi + R_2(a - t\varphi) \leq \\ &\leq f(a) + \lambda t^2 \|\varphi\|^2 + c_2 t^3 < f(a). \end{aligned}$$

In beiden Fällen hat f kein Minimum in a . ■

Beispiel 10.9 Betrachten wir $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = e^{-2(x^2+y^2+z^2)} (x^2 + 4y^2 + z^4)$. Welche Minima und Maxima hat f und wo liegen sie?

Weil f differenzierbar ist (sogar unendlich oft) sind die Kandidatstellen für Extrema die stationären Punkte:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1 f(x, y, z) = e^{-2(x^2+y^2+z^2)} (-4x(x^2 + 4y^2 + z^4) + 2x), \\ 0 &= \partial_2 f(x, y, z) = e^{-2(x^2+y^2+z^2)} (-4y(x^2 + 4y^2 + z^4) + 8y), \\ 0 &= \partial_3 f(x, y, z) = e^{-2(x^2+y^2+z^2)} (-4z(x^2 + 4y^2 + z^4) + 4z^3). \end{aligned}$$

Das heißt

$$\begin{aligned} (x = 0 \text{ oder } x^2 + 4y^2 + z^4 = \frac{1}{2}) \quad \text{und} \quad (y = 0 \text{ oder } x^2 + 4y^2 + z^4 = 2) \\ \text{und} \quad (z = 0 \text{ oder } x^2 + 4y^2 + z^4 = z^2). \end{aligned}$$

Es gibt 8 Kombinationen.

1. $x = y = z = 0$:

$$P_1 = (0, 0, 0).$$

2. $x = y = 0$ und $z^4 = z^2$. P_1 ist auch hier eine Lösung und sonst $z = \pm 1$:

$$P_2 = (0, 0, 1) \quad \text{und} \quad P_3 = (0, 0, -1)$$

3. $x = z = 0$ und $4y^2 = 2$. Wiederum P_1 und sonst

$$P_4 = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right) \quad \text{und} \quad P_5 = \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$$

4. $x = 0$ und $4y^2 + z^4 = 2$ und $4y^2 + z^4 = z^2$. Es folgt $2 = z^2$ und wir finden keine reelle Lösung y für $4y^2 + 4 = 2$.

5. $x^2 = \frac{1}{2}$ und $y = z = 0$:

$$P_6 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, 0\right) \quad \text{und} \quad P_7 = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, 0\right)$$

6. $\frac{1}{2} = x^2 + z^4 = z^2$ und $y = 0$ liefert $z^2 = \frac{1}{2}$ und $x^2 = \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} P_8 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \quad , \quad P_9 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \\ P_{10} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \quad \text{und} \quad P_{11} = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

7. $\frac{1}{2} = x^2 + 4y^2 = 2$ und $z = 0$ gibt keine Lösung.

8. $\frac{1}{2} = x^2 + y^3 + z^4 = 2 = z^2$ gibt auch keine Lösung.

Die Hesse-Matrix im Punkt (x, y, z) ist

$$e^{-2(x^2+y^2+z^2)} \begin{pmatrix} 16x^4 + 64x^2y^2 + 16x^2z^4 - 20x^2 - 16y^2 - 4z^4 + 2 & 16x^3y + 64xy^3 + 16xyz^4 - 40xy & 16x^3z + 64xy^2z + 16xz^5 - 16xz^3 - 8xz \\ 16x^3y + 64xy^3 + 16xyz^4 - 40xy & 16x^2y^2 - 4x^2 + 64y^4 + 16y^2z^4 - 80y^2 - 4z^4 + 8 & 16yz(x^2 + 4y^2 + z^4 - z^2 - 2) \\ 16x^3z + 64xy^2z + 16xz^5 - 16xz^3 - 8xz & 16yz(x^2 + 4y^2 + z^4 - z^2 - 2) & 16x^2z^2 - 4x^2 + 64y^2z^2 - 16y^2 + 16z^6 - 36z^4 + 12z^2 \end{pmatrix}$$

und setzen wir die Punkte P_1 bis P_{11} ein, finden wir:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_2 = M_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{e^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{e^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{e^2} \end{pmatrix} \\ M_4 = M_5 &= \begin{pmatrix} -\frac{6}{e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{16}{e} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}, & M_6 = M_7 &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{e} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{e} \end{pmatrix} \\ M_8 = M_{11} &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{e^{3/2}} & 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{e^{3/2}} \\ 0 & \frac{6}{e^{3/2}} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{e^{3/2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & M_9 = M_{10} &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{e^{3/2}} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{e^{3/2}} \\ 0 & \frac{6}{e^{3/2}} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{e^{3/2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 10.8 können wir folgern:

- Die Matrix M_1 ist positiv semidefinit und das heißt, dass f möglicherweise in P_1 ein Minimum hat.
- Die Matrizen M_4 und M_5 sind negativ definit. In P_4 und P_5 hat f also bestimmt ein Maximum.
- Die übrigen Matrizen sind indefinit und in den zugehörigen Punkten hat f nur Sattelpunkte.

Weil man $f(x, y, z) > 0$ für $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ hat und $f(0, 0, 0) = 0$, können wir schließen, dass f in P_1 ein globales Minimum hat.

Weil $\lim_{\|(x,y,z)\| \rightarrow \infty} f(x, y, z) = 0$ können wir auch schließen, dass f ein globales Maximum haben muss. Die einzigen Kandidaten sind P_4 und P_5 und weil $f(P_4) = f(P_5)$ hat f sowohl in P_4 als auch in P_5 ein globales Maximum.

Die globalen Extrema hätten wir auch finden können, indem wir die Werte $f(P_i)$ berechnen:

$$f(P_1) = 0, \quad f(P_{2,3}) = \frac{1}{e^2}, \quad f(P_{4,5}) = \frac{2}{e}, \quad f(P_{6,7}) = \frac{1}{2e}, \quad f(P_{8,\dots,11}) = \frac{1}{2}e^{-3/2}.$$

In P_4 und P_5 findet man den größten Wert; in P_1 den kleinsten. Ohne die Hesse-Matrizen hätten wir aber nicht konkludieren können, dass es die einzigen Extrema sind.

In Abbildung 10.2 findet man Skizzen einiger Niveaumengen. Für eine Darstellung des Graphens von $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ braucht man 4 Dimensionen. Jede Niveaumenge $f(x, y, z) = c$ braucht bloß 3.

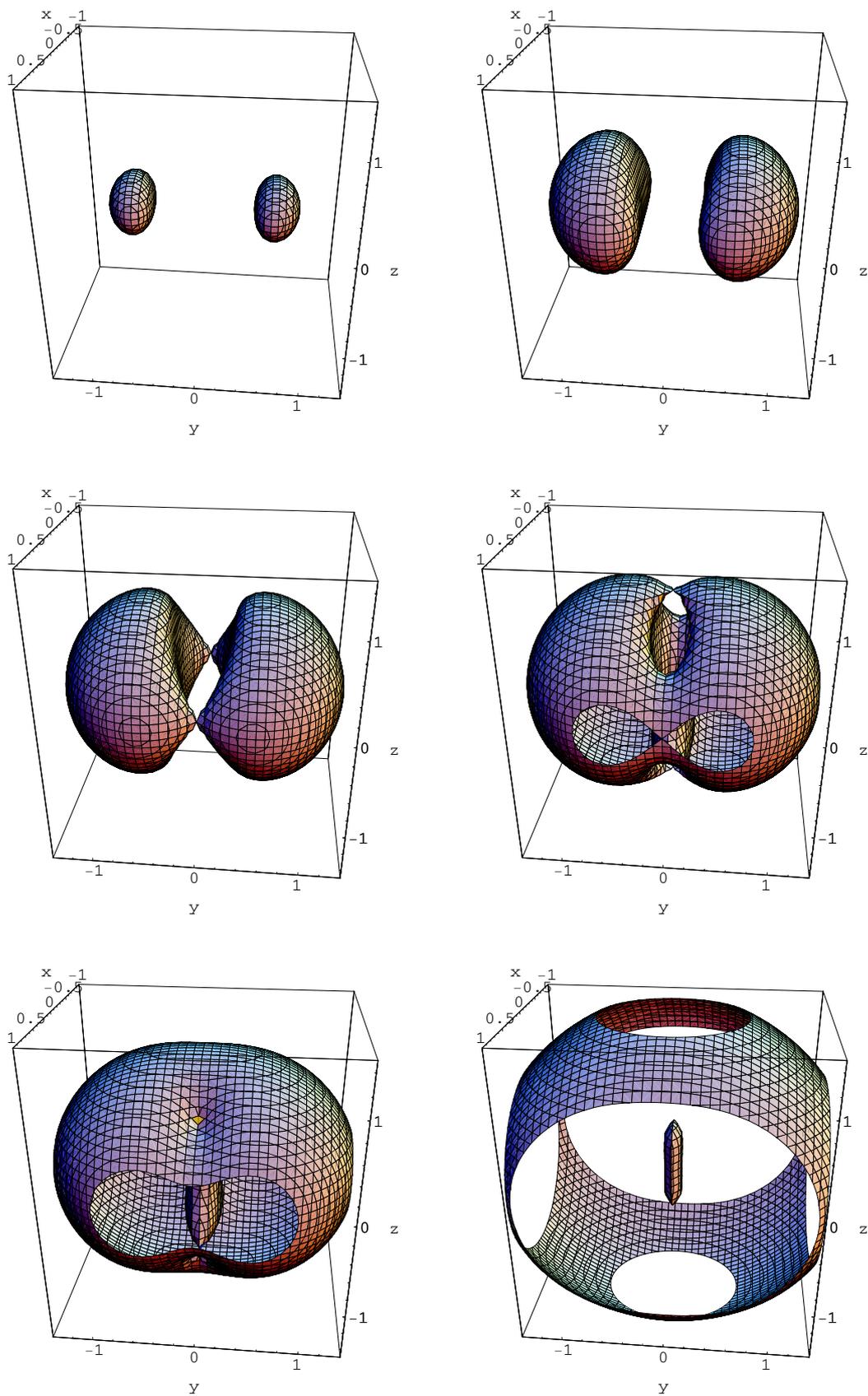
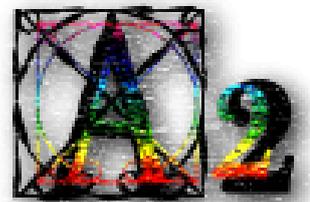


Abbildung 10.2: Zu Beispiel 10.9 stehen hier Skizzen der Niveaumengen für 0.6 , 0.3 , $\frac{1}{2}e^{-1}$, e^{-2} , $\frac{1}{2}e^{-2/3}$ und 0.03 von $e^{-2(x^2+y^2+z^2)}(x^2+4y^2+z^4)$ durch Mathematica. Die Sattelpunkte kann man erkennen.

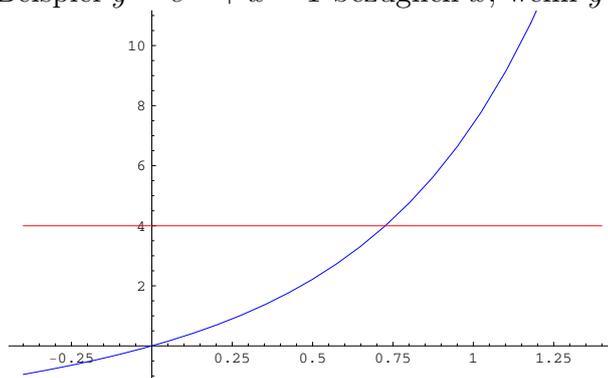
Analysis 2, Woche 11



Inverse Funktionen

11.1 Gleichungen lösen durch Approximation

Es gibt nur wenige Funktionen f , bei denen man Gleichungen $y = f(x)$ explizit lösen kann. Lösen heißt hier, dass y gegeben ist und man x finden soll. Doch möchte man etwas sagen können bei zum Beispiel $y = e^{2x} + x - 1$ bezüglich x , wenn $y = 4$.



Eine Möglichkeit ist es, zu raten wo die Lösung x ungefähr liegen sollte. Sagen wir man rate x_0 . Diese grobe Annäherung könnte man verbessern, indem man statt f die Linearisierung von f bei x_0 verwendet. Das heißt, wir vermuten $y \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ und lösen

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

Wenn $f'(x_0) \neq 0$ folgt

$$x = x_0 + \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Wir hoffen, dass $x_1 = x_0 + \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)}$ eine bessere Approximation ist als x_0 . Wir können diesen Vorgang wiederholen mit x_1 statt x_0 usw. Wir bekommen so eine Folge $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ mit x_{i+1} für $i \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$x_{i+1} = x_i + \frac{y - f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (11.1)$$

Man nennt (11.1) das **Newton-Verfahren** für die Approximation einer Lösung von $y = f(x)$. Die Fragen, die zu beantworten sind, lauten:

Ist die Folge, die man so bekommt, konvergent?

Konvergiert Sie zu einer Lösung?

Wir schauen uns zwei Beispielen an.

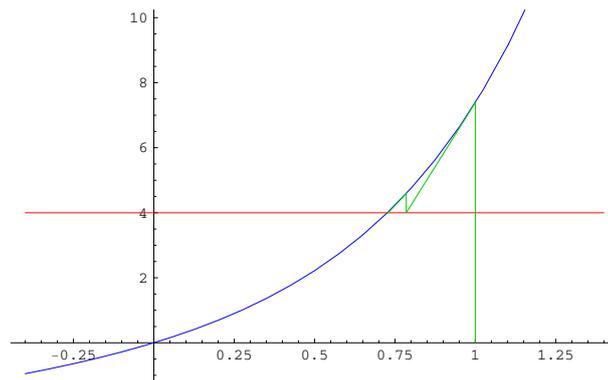
Beispiel 11.1 Wir nannten schon $f(x) = e^{2x} + x - 1$. Die Lösung für $f(x) = 4$ approximiert man wie folgt:

$$F(x) = x + \frac{4 - f(x)}{f'(x)} = x + \frac{4 - (e^{2x} + x - 1)}{2e^{2x} + 1}.$$

Fängt man an mit $x_0 = 1$, dann liefert der Rechner für $x_{i+1} = F(x_i)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.78520522249866928185\dots, \\ x_2 &= 0.72927481853190067928\dots, \\ x_3 &= 0.72625446771654076922\dots, \\ x_4 &= 0.72624626770602477443\dots, \\ x_5 &= 0.72624626764582663769\dots, \\ x_6 &= 0.72624626764582663769\dots \end{aligned}$$

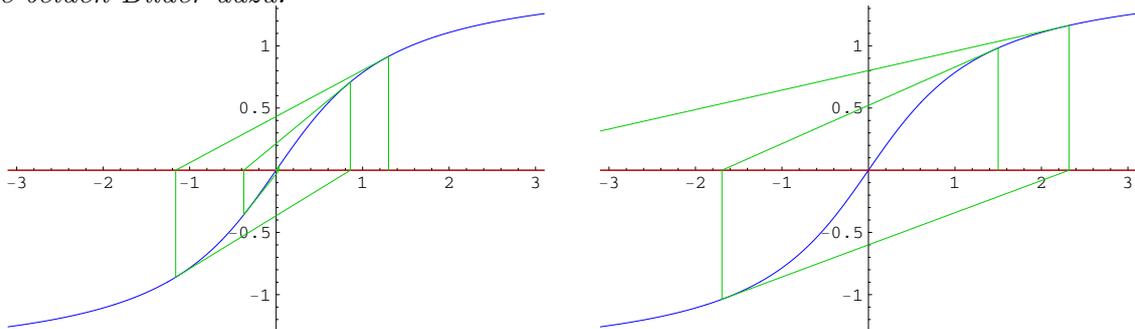
Es macht den Eindruck, dass diese Folge konvergiert. Wenn sie zu x_∞ konvergiert, dann gilt $x_\infty = F(x_\infty) = x_\infty + (f'(x_\infty))^{-1}(4 - f(x_\infty))$ und es folgt $f(x_\infty) = 4$. Graphisch lässt sich dieser Vorgang auch anschaulich machen.



Beispiel 11.2 Wir testen dieses Verfahren für die Lösung von $f(x) = 0$ mit $f(x) = \arctan x$ und fangen an mit $x_0 = 1.3$ und auch mit $x_0 = 1.5$. Die Funktion F wird:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - (1 + x^2) \arctan x.$$

Wir werden nicht die Werte von den x_i in beiden Fällen aufführen, sondern geben nur die beiden Bilder dazu.



Es sieht so aus, als ob das Newton-Verfahren nicht konvergiert, wenn man zu weit entfernt von der Lösung anfängt.

Auch in höheren Dimensionen für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann man versuchen, eine Lösung von $f(x) = y$ zu approximieren, indem man x^0 geschickt wählt und x^{i+1} für $i \in \mathbb{N}$ definiert als die Lösung des in x^i linearisiertes Problem:

$$y = f(x^i) + \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i).$$

Via $(\nabla f(x^i))^{-1} (y - f(x^i)) = x^{i+1} - x^i$ wird es

$$x^{i+1} = F(x^i) := x^i + (\nabla f(x^i))^{-1} (y - f(x^i)). \quad (11.2)$$

Auch (11.2) nennt man das **Newton-Verfahren** für die Approximation einer Lösung von $y = f(x)$.

Proposition 11.3 Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und sei $y \in \mathbb{R}^n$. Nehmen wir an, x^0 , R , M_1 und M_2 sind derartig, dass¹

- a. $\|(\nabla f)^{-1}\|_\infty := \sup \left\{ \|(\nabla f(x))^{-1}\|_{M^{n \times n}(\mathbb{R})}; x \in \overline{B_R(x^0)} \right\} \leq M_1;$
- b. $\|\nabla^2 f\|_\infty := \sup \left\{ \|\nabla^2 f_k(x)\|_{M^{n \times n}(\mathbb{R})}; x \in \overline{B_R(x^0)}, k \in \{1, \dots, n\} \right\} \leq M_2.$

Definiere für $x^{i+1} = F(x^i)$ als in (11.2). Wenn

$$\|x^1 - x^0\| \leq \min \left(n^{-1} M_1^{-1} M_2^{-1}, \frac{1}{2} R \right), \quad (11.3)$$

dann gilt:

1. die Folge $\{x^i\}_{i=0}^\infty$ ist konvergent;
2. der Limes ist eine Lösung: $f(x^\infty) = y$ für $x^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x^i$;
3. die Folge konvergiert quadratisch:

$$\text{es gibt } c > 0 \text{ derart, dass } \|x^{i+1} - x^\infty\| \leq c \|x^i - x^\infty\|^2.$$

Bemerkung 11.3.1 Die zwei Bedingungen a und b sind lästig zu kontrollieren. Wenn aber $(\nabla f)^{-1}$ und $\nabla^2 f$ existieren und beschränkt sind und man sieht während der Rechenrei, dass $\|x^{i+1} - x^i\|$ genügend klein wird, dann ist automatisch (11.3) erfüllt, wenn man so tut, als fänge man jetzt erst an mit x^0 (das alte x^i).

Beweis. Die Matrix $\nabla f(x)$ ist invertierbar für $x \in \overline{B_R(x_0)}$ und weil $x^0, x^1 \in B_R(x_0)$, sind x^1 und x^2 durch (11.2) wohldefiniert. Nehmen wir an, dass für $i = 0, \dots, n$ gilt dass x^i und x^{i+1} in $\overline{B_R(x_0)}$ liegen. Jedenfalls ist diese Folge bis $i = n$ so wohldefiniert. Weil

$$y = f(x^i) + \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i)^\top \quad \text{und} \quad y = f(x^{i+1}) + \nabla f(x^{i+1}) (x^{i+2} - x^{i+1}),$$

¹Sowohl $(\nabla f(x))^{-1}$ als auch $\nabla^2 f_k(x)$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$ sind Matrizen in $M^{n \times n}(\mathbb{R})$. Die Norm einer Matrix $M \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\|M\| = \sup \{ \|M\xi\|; \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|\xi\| = 1 \}.$$

folgt

$$\begin{aligned} x^{i+2} - x^{i+1} &= (\nabla f(x^{i+1}))^{-1} (y - f(x^{i+1})) = \\ &= (\nabla f(x^{i+1}))^{-1} (f(x^i) + \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i) - f(x^{i+1})) \\ &= -(\nabla f(x^{i+1}))^{-1} (f(x^{i+1}) - f(x^i) - \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i)). \end{aligned}$$

Der Satz von Taylor liefert uns, wenn $x^i, x^{i+1} \in \overline{B_R(x^0)}$, dass

$$f(x^{i+1}) - f(x^i) - \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (x^{i+1} - x^i) \cdot \nabla^2 f_1(\xi^1) (x^{i+1} - x^i) \\ \vdots \\ \frac{1}{2} (x^{i+1} - x^i) \cdot \nabla^2 f_n(\xi^n) (x^{i+1} - x^i) \end{pmatrix}$$

für $\xi^k \in [x^i, x^{i+1}] \subset \overline{B_R(x^0)}$. Also gilt

$$\|f(x^{i+1}) - f(x^i) - \nabla f(x^i) (x^{i+1} - x^i)\| \leq \frac{1}{2} n \|\nabla^2 f\|_\infty \|x^{i+1} - x^i\|^2$$

und es folgt, dass

$$\begin{aligned} \|x^{i+2} - x^{i+1}\| &\leq \frac{1}{2} \|(\nabla f)^{-1}\|_\infty n \|\nabla^2 f\|_\infty \|x^{i+1} - x^i\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} n M_1 M_2 \|x^{i+1} - x^i\|^2. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Wenn $\|x^1 - x^0\| \leq n^{-1} M_1^{-1} M_2^{-1}$, dann folgt

$$\|x^2 - x^1\| \leq \frac{1}{2} \|x^1 - x^0\|$$

und durch Wiederholung

$$\|x^{i+2} - x^{i+1}\| \leq \frac{1}{2} \|x^{i+1} - x^i\| \quad (11.5)$$

für $i = 0, \dots, n$. Das heißt,

$$\|x^{i+2} - x^{i+1}\| \leq \frac{1}{2^{i+1}} \min(M_1^{-1} M_2^{-1}, \frac{1}{2} R).$$

und außerdem gilt

$$\|x^{i+2} - x^0\| \leq \sum_{j=0}^{i+1} \|x^{j+1} - x^j\| < \sum_{j=0}^{i+1} \frac{1}{2^{j+1}} R < R.$$

Weil auch $x^{i+2} \in B_R(x^0)$ kann man diese Abschätzungen für beliebige n ableiten. Weil (11.5) für alle i gilt, finden wir, dass $\{x^i\}_{i=0}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergent.

Es gibt also $x^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x^i$. Weil f und ∇f stetig sind, und $(\nabla f(x^\infty))^{-1}$ existiert, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|x^{i+1} - x^i\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left\| (\nabla f(x^i))^{-1} (y - f(x^i)) \right\| = \\ &= \left\| (\nabla f(x^\infty))^{-1} (y - f(x^\infty)) \right\| \geq \|\nabla f(x^\infty)\|^{-1} \|y - f(x^\infty)\|, \end{aligned}$$

und es folgt $y = f(x^\infty)$.

Es bleibt uns noch die quadratische Konvergenz zu zeigen. Wir haben

$$\|x^{i+1} - x^i\| \leq \frac{1}{2} (M_1 M_2)^{-1} \quad \text{für } i \geq 1. \quad (11.6)$$

Es folgt aus (11.5) und (11.4) dass:

$$\begin{aligned} \|x^\infty - x^{i+1}\| &\leq \sum_{j=i}^{\infty} \|x^{j+2} - x^{j+1}\| \leq \sum_{j=i}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i} \|x^{i+2} - x^{i+1}\| = \\ &= 2 \|x^{i+2} - x^{i+1}\| \leq nM_1M_2 \|x^{i+1} - x^i\|^2 \end{aligned} \quad (11.7)$$

und mit (11.7) und (11.6), dass

$$\begin{aligned} \|x^\infty - x^i\| &\geq \|x^{i+1} - x^i\| - \|x^\infty - x^{i+1}\| \geq \\ &\geq \|x^{i+1} - x^i\| - nM_1M_2 \|x^{i+1} - x^i\|^2 \geq \frac{1}{2} \|x^{i+1} - x^i\|. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Kombinieren von (11.7) und (11.8) liefert

$$\|x^\infty - x^{i+1}\| \leq nM_1M_2 \|x^{i+1} - x^i\|^2 \leq 4nM_1M_2 \|x^\infty - x^i\|^2.$$

Das Ergebnis gilt ab $i = 1$ für $c = 4nM_1M_2$. Will man das Resultat für alle i haben, setzt man

$$c_0 = \frac{\|x^\infty - x^1\|}{\|x^\infty - x^0\|^2}$$

und nimmt $c = \max(4nM_1M_2, c_0)$. ■

Beispiel 11.4 Wir möchten das Minimum von $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y) = x^2 + xy + e^x + y^2$$

finden. Das Minimum ist eine Nullstelle von $\nabla g = f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und wir setzen

$$f(x, y) = \nabla g(x, y) = (2x + y + e^x, x + 2y).$$

Die Iteration wird dann

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = F(x_i, y_i)$$

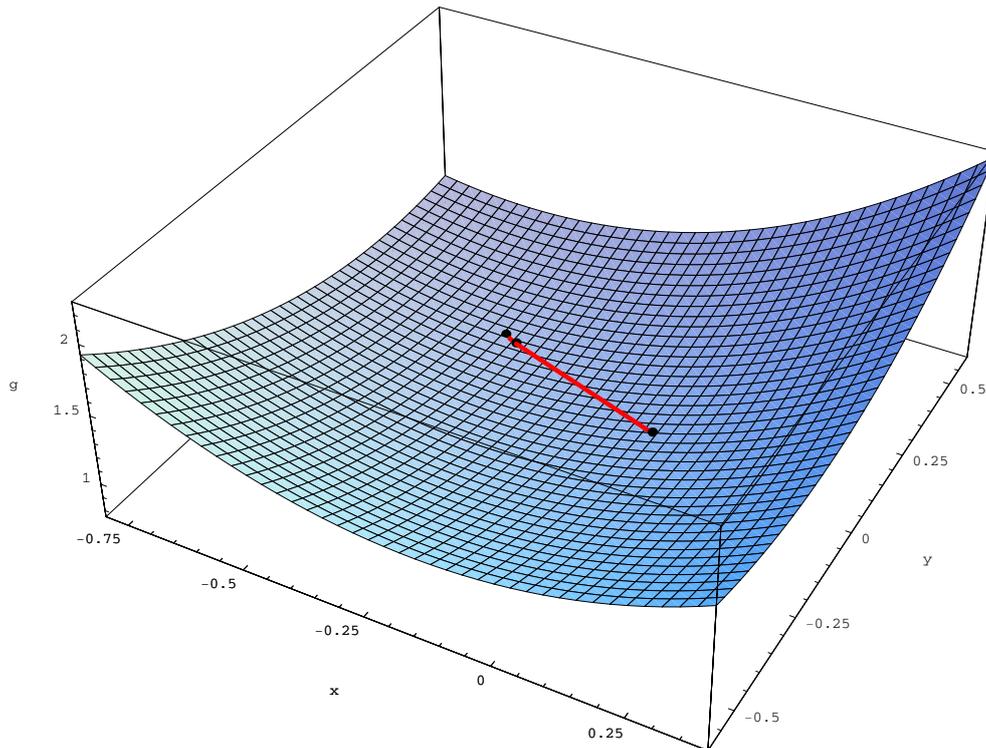
mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 + e^x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x + y + e^x \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

Fängt man an mit $(x_0, y_0) = (0, 0)$, dann liefert Maple oder Mathematica:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (-0.4, 0.2), \\ (x_2, y_2) &= (-0.43240077248702911343 \dots, 0.21620038624351455672 \dots), \\ (x_3, y_3) &= (-0.43256275157040301689 \dots, 0.21628137578520150845 \dots), \\ (x_4, y_4) &= (-0.43256275553199956671 \dots, 0.21628137776599978336 \dots), \\ (x_5, y_5) &= (-0.43256275553199956908 \dots, 0.21628137776599978454 \dots), \\ (x_6, y_6) &= (-0.43256275553199956908 \dots, 0.21628137776599978454 \dots). \end{aligned}$$

Wir haben keine Bedingung kontrolliert, sondern bloß gerechnet. Wenn wir ein wenig Glück haben, konvergiert diese Folge tatsächlich. Im Nachhinein sieht man, dass f sehr klein ist bei (x_6, y_6) und $(\nabla f)^{-1}$ da beschränkt ist. Hätten wir mit (x_6, y_6) angefangen, wären die Bedingungen wahrscheinlich erfüllt.



In der Skizze zu $(x, y) \mapsto g(x, y)$ sind die Iterationen $(x_i, y_i, g(x_i, y_i))$ eingezeichnet. Man kann $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ und $(x_1, y_1, g(x_1, y_1))$ noch deutlich von dem Rest trennen. Die Punkte $(x_i, y_i, g(x_i, y_i))$ mit $i \geq 2$ kann man nicht mehr unterscheiden.

11.2 Kontraktionen

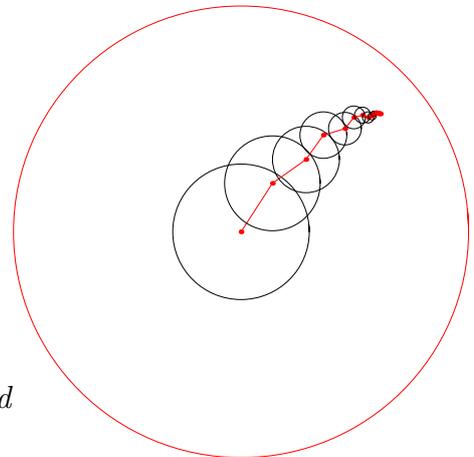
Wir brauchen ein paar allgemeinere Ergebnisse.

Lemma 11.5 Sei $\{x^i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge. Wenn $\theta \in (0, 1)$ existiert derart, dass

$$\|x^{i+2} - x^{i+1}\| \leq \theta \|x^{i+1} - x^i\|,$$

dann gilt

1. diese Folge ist konvergent: $x^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x^i \in \mathbb{R}^n$ und
2. $\|x^\infty - x^0\| \leq \frac{1}{1-\theta} \|x^1 - x^0\|$.



Beweis. Sei $k > \ell$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x^k - x^\ell\| &\leq \sum_{i=\ell}^{k-1} \|x^{i+1} - x^i\| \leq \sum_{i=\ell}^{k-1} \theta^{i-\ell} \|x^{\ell+1} - x^\ell\| \leq \\ &\leq \sum_{i=\ell}^{\infty} \theta^{i-\ell} \|x^{\ell+1} - x^\ell\| = \frac{1}{1-\theta} \|x^{\ell+1} - x^\ell\| \leq \frac{\theta^\ell}{1-\theta} \|x^1 - x^0\|. \end{aligned}$$

Weil $\theta^\ell \rightarrow 0$ für $\ell \rightarrow \infty$ hat man bewiesen, dass $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist. Cauchy-Folgen in \mathbb{R}^n sind konvergent. Nimmt man $\ell = 0$ und $k \rightarrow \infty$, dann folgt die Abschätzung.

■

Satz 11.6 (Kontraktionssatz auf einer Kugel) Sei $F : \overline{B_R(a)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion und sei $\theta \in [0, 1)$ derart, dass

1. $\|F(x) - F(\tilde{x})\| \leq \theta \|x - \tilde{x}\|$ für alle $x, \tilde{x} \in \overline{B_R(a)}$, und
2. $\|F(a) - a\| \leq (1 - \theta) R$.

Dann gilt $F(\overline{B_R(a)}) \subset \overline{B_R(a)}$ und es gibt genau eine Lösung in $\overline{B_R(a)}$ zu $F(x) = x$.

Bemerkung 11.6.1 Annahme 2 kann man ersetzen durch $F(\overline{B_R(a)}) \subset \overline{B_R(a)}$.

Bemerkung 11.6.2 Eine Funktion $F : D \rightarrow D$, wobei gilt: es gibt $\theta \in [0, 1)$ derart, dass

$$\|F(x) - F(\tilde{x})\| \leq \theta \|x - \tilde{x}\| \text{ für alle } x, \tilde{x} \in D$$

heißt eine **Kontraktion** auf D . Ein $x \in D$ mit $F(x) = x$ nennt man einen **Fixpunkt** für F .

Der Kontraktionssatz² für eine abgeschlossene Menge D besagt, dass F dann genau einen Fixpunkt hat.

Beweis. Sei $x \in \overline{B_R(a)}$. Dann gilt

$$\|F(x) - a\| \leq \|F(x) - F(a)\| + \|F(a) - a\| \leq \theta \|x - a\| + (1 - \theta) R \leq R$$

und $F(x) \in \overline{B_R(a)}$.

Wir setzen $x^0 = a$ und $x^{i+1} = F(x^i)$. Weil $F(\overline{B_R(a)}) \subset \overline{B_R(a)}$ ist die Folge $\{x^i\}_{i=1}^\infty$ wohldefiniert. Weil

$$\|x^{i+2} - x^{i+1}\| = \|F(x^{i+1}) - F(x^i)\| \leq \theta \|x^{i+1} - x^i\|,$$

liefert das letzte Lemma den Grenzwert $x^\infty \in \overline{B_R(a)}$. Die erste Annahme impliziert, dass F stetig ist. Es gilt

$$x^\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x^{i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} F(x^i) = F(\lim_{i \rightarrow \infty} x^i) = F(x^\infty)$$

und x^∞ ist ein Fixpunkt.

Wenn es noch einen zweiten Fixpunkt \bar{x} in $\overline{B_R(a)}$ geben würde, dann gilt

$$\|\bar{x} - x^\infty\| = \|F(\bar{x}) - F(x^\infty)\| \leq \theta \|\bar{x} - x^\infty\|.$$

Weil $\theta \in (0, 1)$ folgt $0 \leq (1 - \theta) \|\bar{x} - x^\infty\| \leq 0$ und $\bar{x} = x^\infty$. ■

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Wir sind daran interessiert wie man $x \in \mathbb{R}^n$ finden kann, wenn $y \in \mathbb{R}^n$ gegeben für

$$f(x) = y. \tag{11.9}$$

Wenn $\nabla f(x) \neq 0$ für alle x , dann ist es möglich mit dem Newton-Verfahren eine Lösung von (11.9) zu approximieren durch

$$\begin{cases} x^0 \text{ geschickt zu wählen, und} \\ x_{i+1} = x_i + (\nabla f(x_i))^{-1} (y - f(x_i)) \text{ für } i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

²Eine noch allgemeinere Version dieses Satzes ist bekannt als der Banachsche Fixpunktsatz.

Das Invertieren von $\nabla f(x_i)$ in jedem Schritt kann ziemlich aufwändig sein. Wir werden zeigen, dass man auch ein **vereinfachtes Newton-Verfahren** verwenden kann:

$$\begin{cases} x^0 \text{ geschickt zu wählen, und} \\ x_{i+1} = x_i + (f'(\bar{x}))^{-1} (y - f(x_i)) \text{ für } i \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

und auch \bar{x} geschickt zu wählen. Oft nimmt man $\bar{x} = x^0$. Man hat für dieses vereinfachte Newton-Verfahren:

$$\begin{aligned} x_{i+2} - x_{i+1} &= (f'(\bar{x}))^{-1} (y - f(x_{i+1})) = \\ &= (f'(\bar{x}))^{-1} (f(x_i) + f'(\bar{x})(x_{i+1} - x_i) - f(x_{i+1})) = \\ &= (f'(\bar{x}))^{-1} (f'(\bar{x}) - f'(\xi^i)) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= (f'(\bar{x}))^{-1} f''(\tilde{\xi}^i) (\bar{x} - \xi^i) (x_{i+1} - x_i). \end{aligned}$$

Hier ist zweimal der Mittelwertsatz angewendet worden:

es gibt $\xi^i \in [x_i, x_{i+1}]$ derart, dass $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi^i)(x_{i+1} - x_i)$;

es gibt $\tilde{\xi}^i \in [\bar{x}, \xi^i]$ derart, dass $f'(\bar{x}) - f'(\xi^i) = f''(\tilde{\xi}^i)(\bar{x} - \xi^i)$.

Wenn man garantieren kann, dass $\left| (f'(\bar{x}))^{-1} f''(\tilde{\xi}^i) (\bar{x} - \xi^i) \right| \leq \frac{1}{2}$, dann konvergiert $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ und $x_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ erfüllt $x_\infty = x_\infty + (f'(\bar{x}))^{-1} (y - f(x_\infty))$, anders gesagt: $y = f(x_\infty)$. Im Allgemeinen liegen die Schranken für $(f'(\bar{x}))^{-1}$ und $f''(\tilde{\xi}^i)$ fest. Durch $x^0 = \bar{x}$ genügend nahe bei der Lösung zu nehmen, kann man dafür sorgen, dass $\|\bar{x} - \xi^i\|$ klein bleibt. So eine Möglichkeit hat man, wenn man (\bar{x}, \bar{y}) kennt mit $\bar{y} = f(\bar{x})$ und man $y = f(x)$ lösen möchte für y nahe bei \bar{y} .

11.3 Umkehrfunktionen

Satz 11.7 (Satz über lokale Umkehrfunktionen) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und sei $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ derart, dass $\bar{y} = f(\bar{x})$ und

$$\det(\nabla f(\bar{x})) \neq 0.$$

Dann gibt es offene Umgebungen $U(\bar{x})$ von \bar{x} und $V(\bar{y}) = f(U(\bar{x}))$ von \bar{y} derart, dass

1. $f : U(\bar{x}) \rightarrow V(\bar{y})$ bijektiv ist;
2. $g := f^{\text{inverse}}$ ist stetig differenzierbar auf $V(\bar{y})$ und

$$(\nabla g)(y) = (\nabla f \circ g(y))^{-1} \text{ für } y \in V(\bar{y}).$$

Bemerkung 11.7.1 Es reicht hier, dass f einmal stetig differenzierbar ist. Die Abschätzungen werden etwas technischer. Wenn man den Beweis genau betrachtet, dann sieht man, dass nur $\nabla f(\tilde{x}) \rightarrow \nabla f(x)$ für $\tilde{x} \rightarrow x$ verwendet wird.

Bemerkung 11.7.2 Eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ nennt man einen **Homöomorphismus**, wenn f stetig ist und die Umkehrabbildung $f^{\text{inv}} : B \rightarrow A$ existiert und stetig ist.

Eine bijektive Abbildung $f : A \rightarrow B$ nennt man einen **Diffeomorphismus**, wenn f stetig differenzierbar ist und die Umkehrabbildung $f^{\text{inv}} : B \rightarrow A$ existiert und stetig differenzierbar ist.

Beweis. Wir betrachten $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$F(x, y) = x + (\nabla f(\bar{x}))^{-1} (y - f(x))$$

und werden den Fixpunktsatz verwenden für $x \mapsto F(x, y)$.

Setze

$$\begin{aligned} M_1 &= \|(\nabla f(\bar{x}))^{-1}\|_{M^{n \times n}(\mathbb{R})}, \\ M_2 &= n \sup \left\{ \left\| (\nabla^2 f_k(x))^{-1} \right\|_{M^{n \times n}(\mathbb{R})}; k \in \{1, \dots, n\} \text{ und } x \in \overline{B_1(\bar{x})} \right\}. \end{aligned}$$

Es gilt für $x, \tilde{x} \in \overline{B_1(\bar{x})}$, dass

$$\begin{aligned} \|F(x, y) - F(\tilde{x}, y)\| &= \|x - \tilde{x} - (\nabla f(\bar{x}))^{-1} (f(x) - f(\tilde{x}))\| = \\ &= \|(\nabla f(\bar{x}))^{-1} (f(\tilde{x}) - f(x) + \nabla f(\bar{x}) (x - \tilde{x}))\| \leq \\ &\leq M_1 \|f(\tilde{x}) - f(x) + \nabla f(\bar{x}) (x - \tilde{x})\| \leq \\ &\leq M_1 (\|f(\tilde{x}) - f(x) + \nabla f(\tilde{x}) (x - \tilde{x})\| + \|\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(\tilde{x})\| \|x - \tilde{x}\|). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Weil f zweimal stetig differenzierbar ist, folgt aus dem Satz von Taylor angewendet auf jede Komponente, dass

$$\begin{aligned} \|f(\tilde{x}) - f(x) + \nabla f(\tilde{x}) (x - \tilde{x})\| &\leq \frac{1}{2} M_2 \|x - \tilde{x}\|^2, \\ \text{und } \|\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(\tilde{x})\| &\leq M_2 \|\bar{x} - \tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Setzen wir die Abschätzung in (11.10) fort, bekommen wir für $x, \tilde{x} \in \overline{B_R(\bar{x})}$ mit $R \in (0, 1]$, dass

$$\|F(x, y) - F(\tilde{x}, y)\| \leq M_1 \left(\frac{1}{2} M_2 \|x - \tilde{x}\|^2 + M_2 \|\bar{x} - \tilde{x}\| \|x - \tilde{x}\| \right) \leq \frac{3}{2} M_1 M_2 R \|x - \tilde{x}\|.$$

Jetzt nehmen wir $R = \min \left(\frac{1}{3} M_1^{-1} M_2^{-1}, 1 \right)$ und finden so

$$\|F(x, y) - F(\tilde{x}, y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\| \text{ für } x, \tilde{x} \in \overline{B_R(\bar{x})}. \quad (11.11)$$

Die zweite Bedingung in Satz 11.6 muss noch erfüllt werden. Wir haben

$$\|F(\bar{x}, y) - \bar{x}\| = \|(\nabla f(\bar{x}))^{-1} (y - f(\bar{x}))\| = \|(\nabla f(\bar{x}))^{-1} (y - \bar{y})\| \leq M_1 \|y - \bar{y}\|.$$

Wenn wir also $\|y - \bar{y}\| \leq \frac{1}{2} M_1^{-1} R$ nehmen, gilt

$$\|F(\bar{x}, y) - \bar{x}\| \leq \frac{1}{2} R$$

und die Bedingungen von Satz 11.6 sind erfüllt für $\theta = \frac{1}{2}$.

Zusammengefasst: nehme $R = \min \left(\frac{1}{3} M_1^{-1} M_2^{-1}, 1 \right)$ und $S = \frac{1}{2} M_1^{-1} R$ und Satz 11.6 gibt uns für $y \in B_S(\bar{y})$ genau ein $x_y \in B_R(\bar{x})$ mit $y = f(x_y)$. Die Funktion $g : B_S(\bar{y}) \rightarrow B_R(\bar{x})$ mit $g(y) = x_y$ ist also wohldefiniert und $f \circ g(y) = y$ für alle $y \in B_S(\bar{y})$. Weil wegen (11.11) und der Definition von F gilt, dass

$$\begin{aligned} \|g(y) - g(\tilde{y})\| &= \|F(x, y) - F(\tilde{x}, \tilde{y})\| \leq \\ &\leq \|F(x, y) - F(\tilde{x}, y)\| + \|F(\tilde{x}, y) - F(\tilde{x}, \tilde{y})\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \|g(y) - g(\tilde{y})\| + \|(\nabla f(\bar{x}))^{-1} (y - \tilde{y})\|, \end{aligned}$$

folgt

$$\|g(y) - g(\tilde{y})\| \leq 2M_1 \|y - \tilde{y}\|$$

und so, dass g sogar stetig ist.

Für die Differenzierbarkeit von g betrachten wir die folgende Gleichung. Wenn (x, y) und (\tilde{x}, \tilde{y}) beide Lösungen sind, dann gilt

$$y - \tilde{y} = f(x) - f(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\xi^1) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\xi^n) \end{pmatrix} (x - \tilde{x}) \quad (11.12)$$

und weil $\nabla f(\bar{x})$ invertierbar ist, gibt es $B_r(\bar{x})$ mit $r \in (0, R)$ derart, dass für alle $\xi^1, \dots, \xi^n \in [x, \tilde{x}] \subset B_r(\bar{x})$ die Matrix in (11.12) invertierbar ist. Wir bekommen

$$g(y) - g(\tilde{y}) = x - \tilde{x} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\xi^1) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\xi^n) \end{pmatrix}^{-1} (y - \tilde{y}).$$

Weil $\xi^1, \dots, \xi^n \in [g(y), g(\tilde{y})]$ und g stetig ist, folgt dass $\nabla f_k(\xi^k) \rightarrow \nabla f_k(g(\tilde{y}))$ für $y \rightarrow \tilde{y}$ und auch³

$$\begin{pmatrix} \nabla f_1(\xi^1) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\xi^n) \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} \nabla f_1(\tilde{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\tilde{x}) \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{für } y \rightarrow \tilde{y}.$$

Das heißt,

$$\lim_{y \rightarrow \tilde{y}} \frac{\|g(y) - g(\tilde{y}) - (\nabla f \circ g(\tilde{y}))^{-1} (y - \tilde{y})\|}{\|y - \tilde{y}\|} = 0.$$

Für $s = \frac{1}{2}M_1^{-1}r$ ist $g : B_s(\bar{y}) \rightarrow B_r(\bar{x})$ sogar differenzierbar und die Ableitung ist wie vorhergesagt.

Wir setzen $V(\bar{y}) = B_s(\bar{y})$ und $U(\bar{x}) = g(B_s(\bar{y}))$. Weil $U(\bar{x}) = f^{-1}(B_s(\bar{y})) \cap B_r(\bar{x})$ ist auch $U(\bar{x})$ offen. ■

Beispiel 11.8 Wir betrachten $f(x, y) = (e^{xy}, x + y)$ und untersuchen sowohl auf einer Umgebung von $(0, 0)$, als auch auf einer Umgebung von $(1, 0)$ die Existenz einer Umkehrfunktion.

Wir haben

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

³ $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$. Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left((-1)^{i+j} \det(A_{j,i}) \right)_{i,j}$$

wo

$$\det(A_{i,j}) = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ \hline a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right)$$

Weil die Einträge von A^{-1} rationale Funktionen der Einträge in A sind, ist $A \mapsto A^{-1}$ stetig für $\det(A) \neq 0$.

und finden

$$\det(\nabla f(0,0)) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \det(\nabla f(1,0)) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Die Bedingungen des Satzes sind also nicht in $(0,0)$ aber schon in $(1,0)$ erfüllt. Das heisst dass es eine Umgebung $B_\varepsilon(1,0)$ gibt und $g : f(B_\varepsilon(1,0)) \rightarrow B_\varepsilon(1,0)$ mit

$$(\eta, \xi) = f(x, y) \Leftrightarrow g(\eta, \xi) = (x, y).$$

In einer Umgebung von $(0,0)$ ist der Satz nicht anwendbar. Lässt man Mathematica Bilder dazu anfertigen, dann sieht man, dass die Funktion bei $(0,0)$ für eine Faltung sorgt.

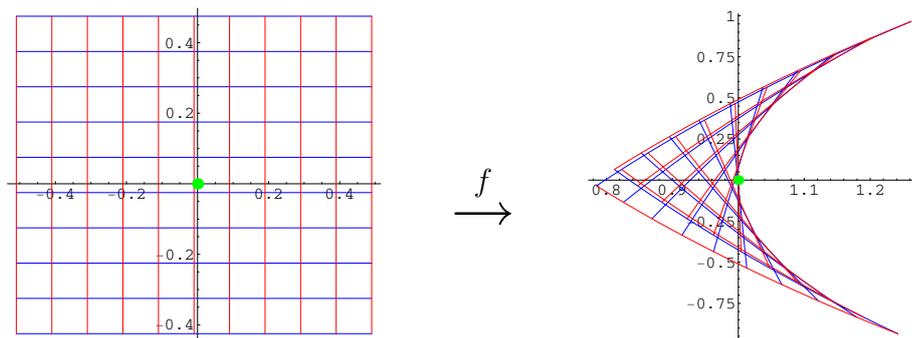


Abbildung 11.1: Das Bild eines Gitters um $(0,0)$ bei f aus Beispiel 11.8 füllt keine Umgebung von $f(0,0) = (1,0)$ sondern ‘faltet’ sich zusammen. Es gibt keine Umkehrfunktion um $(0,0)$ weil f nicht mal injektiv ist.

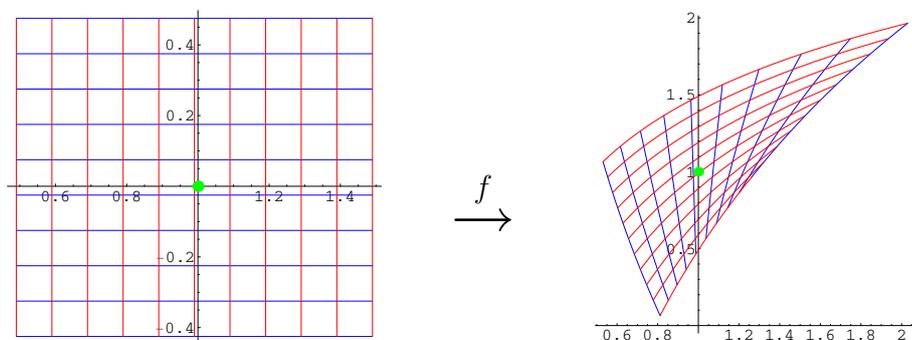
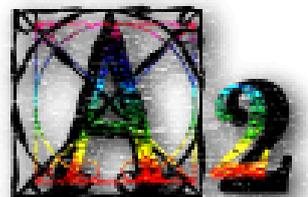


Abbildung 11.2: Das Bild unter eines Gitters um $(1,0)$ bei f aus Beispiel 11.8 wirkt zwar verzerrt aber füllt ein-eindeutig eine Umgebung von $f(1,0) = (1,1)$. Es gibt lokal eine Umkehrfunktion.

Analysis 2, Woche 12

Implizite Funktionen



12.1 Implizite Funktionen in 2D

Wenn man den Kreis mit Radius 1 um $(0, 0)$ beschreiben möchte, dann ist

$$\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$$

eine Möglichkeit. Oft ist es bequemer, so eine Figur oder einen Teil einer solcher Figur als Graph einer Funktion darzustellen. Für die obere Hälfte geht das:

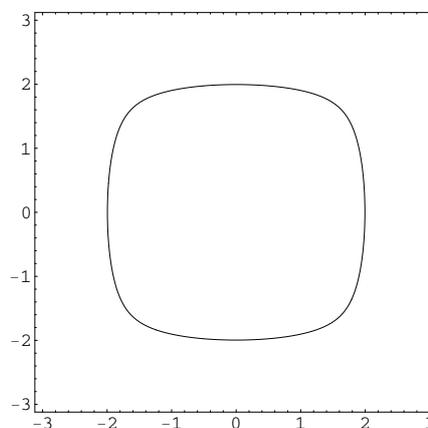
$$y = f(x) \text{ mit } f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ und } f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Auch die untere Hälfte kann man ähnlich explizit beschreiben: $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Wenn man aber eine Figur betrachtet, die definiert ist durch

$$\{(x, y); e^{x^2} + 4x^2y^2 + e^{y^2} = e^4\},$$

hat man zwar etwas, das aussieht wie ein Fernseher aus 1950, aber nicht etwas, das sich leicht mit Hilfe von Funktionen $y = f(x)$ oder $x = f(y)$ beschreiben läßt. Trotzdem das Bild betrachtet, würde man doch erwarten, auch hier lokal das Bild als Graph einer Funktion beschreiben zu können. Mathematisch geht das wie folgt.



Satz 12.1 (Satz über implizite Funktionen in 2D.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ derart, dass $f(a, b) = 0$ und $\partial_2 f(a, b) \neq 0$.

Dann gibt es eine Umgebung $B_r(a) \times B_s(b)$ von (a, b) und eine differenzierbare Funktion $g : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(a) = b$ derart, dass:

- Für $(x, y) \in B_r(a) \times B_s(b)$ gilt

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

- Für $x \in B_r(a)$ gilt

$$g'(x) = - \left(\frac{\partial_1 f(x, y)}{\partial_2 f(x, y)} \right)_{y=g(x)}.$$

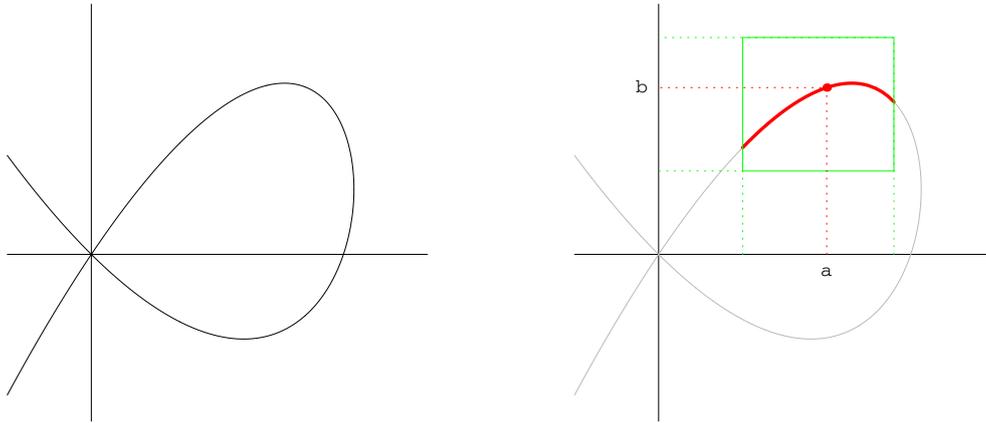


Abbildung 12.1: $f(x, y) = 0$ ist lokal $y = g(x)$. Der Graph von g ist in rot dargestellt. Hier wird übrigens $f(x, y) = xy + 3x^2 - 2y^2 - 2x^3$ und $(a, b) = (1, 1)$ verwendet.

Bemerkung 12.1.1 Für $x \in B_r(a)$ gilt $f(x, g(x)) = 0$.

Bemerkung 12.1.2 Der Satz für inverse Funktionen wird benutzt und man kann sehen, dass es auch hier reicht, wenn f einmal stetig differenzierbar ist.

Bemerkung 12.1.3 Die Bedingung, dass f stetig differenzierbar ist, kann man nicht weglassen. Man kann Beispiel 9.11 verwenden um zu zeigen, dass differenzierbar alleine nicht reicht! Die Funktion in dem Beispiel ist

$$f(x, y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{für } y \geq x^2, \\ y \left(\frac{|y|}{x^2} - 1 \right) & \text{für } -x^2 < y < x^2, \\ y + x^2 & \text{für } y \leq -x^2, \end{cases}$$

und man hat $\partial_2 f(0, 0) = 1 \neq 0$. Es hat aber mindestens drei Funktionen g derart, dass $g(0) = 0$ und $f(x, g(x)) = 0$, nämlich $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = 0$ und $g_3(x) = -x^2$. Übrigens sieht man mit $\partial_2 f(x, 0) = -1$ für $x \neq 0$, dass $\partial_2 f$ nicht stetig ist in $(0, 0)$.

Beweis. Definiere $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Dann ist F zweimal stetig differenzierbar und

$$\nabla F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 f(x, y) & \partial_2 f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Man hat

$$F \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \det \left(\nabla F \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \partial_2 f(a, b) \neq 0.$$

Durch Satz 11.7 gibt es für $F|_{B_\varepsilon(a, b)}$ eine inverse Funktion $G : B_\delta(a, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} G \circ F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_\varepsilon(a, b) \text{ und} \\ F \circ G \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \text{ für } \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in F(B_\varepsilon(a, b)), \end{aligned}$$

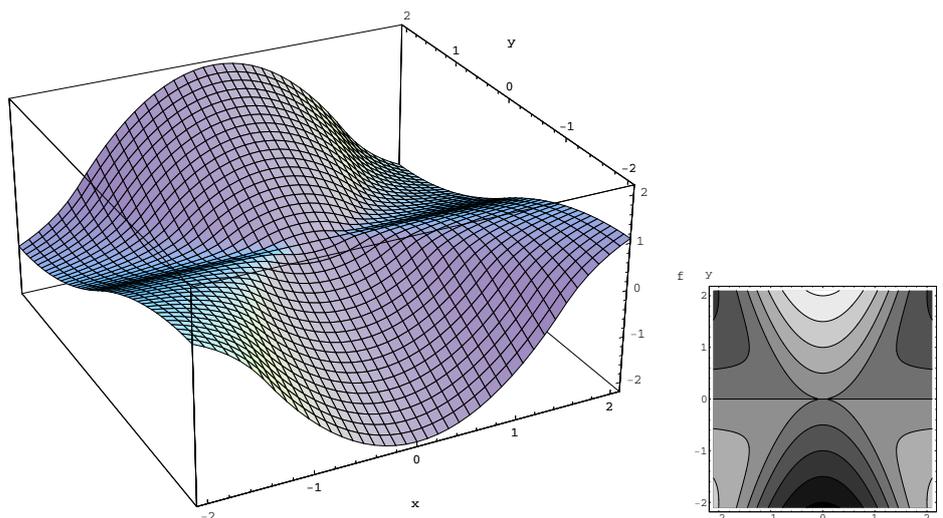


Abbildung 12.2: Graphen und Niveaulinien der Funktion aus Beispiel 9.11 und Bemerkung 12.1.3. Man kann die drei g 's erkennen ($g_0(x) = 0$, $g_{\pm 1}(x) = \pm x^2$), die zusammen $f(x, y) = 0$ um $(0, 0)$ beschreiben.

und G ist differenzierbar. Anders gesagt: für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_\varepsilon(a, b)$ und $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in F(B_\varepsilon(a, b))$ gilt

$$\begin{cases} x = \xi \\ f(x, y) = \eta \end{cases} \quad \begin{cases} x = \xi \\ y = g(\xi, \eta) \end{cases} \\ \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G\left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$

Wir setzen $r = \frac{1}{2}\varepsilon$ und definieren $g : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ für $r = \frac{1}{2}\varepsilon$ durch

$$g(x) = G_2\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

Es gilt $B_r(a) \times B_r(b) \subset B_\varepsilon(a, b)$. Dann folgt für $x \in (a - r, a + r)$ dass

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y = g(x) \end{cases} \\ \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\ F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = G\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Anders gesagt, $f(x, y) = 0$ in $B_r(a) \times B_r(b)$ kann man auch beschreiben durch $y = g(x)$ für $x \in (a - r, a + r)$.

Weil f und g differenzierbar sind, gilt außerdem für $h(x) = f(x, g(x))$, dass

$$0 = h'(x) = \partial_1 f(x, g(x))1 + \partial_2 f(x, g(x))g'(x),$$

also

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial_1 f(x, y)}{\partial_2 f(x, y)}\right)_{y=g(x)}.$$

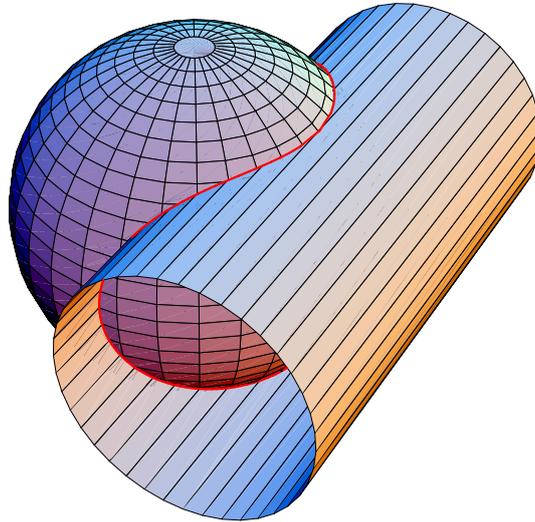
■

12.2 Implizite Funktionen in höheren Dimensionen

Betrachten wir die folgende Menge:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ und } (y - 1)^2 + z^2 = 1\}.$$

Das sind die Punkte in \mathbb{R}^3 , die sowohl auf einer Kugel mit Radius $\sqrt{2}$ um $(0, 0, 0)$ liegen als auch auf einem Zylinder mit Radius 1 und Achse $\{(1, t, 0); t \in \mathbb{R}\}$.



Der Durchschnitt dieser beiden Oberflächen gibt eine Kurve in \mathbb{R}^3 . Lokal sollte man so eine Kurve auch bei fast allen Punkten beschreiben können durch

$$\{(x, f_1(x), f_2(x)); x \in I\}. \quad (12.1)$$

Das geht auch fast immer. In diesem Fall kann man die Funktionen f_1, f_2 sogar berechnen:

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad f_2(x) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^4} \quad \text{und } I = [0, 1]$$

Nur wenn $f_2(x) = 0$, also bei $x = \pm\sqrt{2}$, kommen beide Alternativen zusammen und K ist lokal nicht mehr eindeutig wie in (12.1) zu schreiben.

Zusammenfassung 12.2 Wir haben angefangen mit $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, nämlich

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 2 \\ (y - 1)^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix},$$

und haben $G(x, y, z) = 0$ nach einer Variablen gelöst:

$$y = f_1(x) \text{ und } z = f_2(x).$$

Die Idee ist, dass 2 unabhängige Gleichungen mit 3 Variablen nur einen Freiheitsgrad ergeben. Hier haben wir x freigelassen und y und z als Funktion von x geschrieben.

Allgemeiner hat man $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $n > m$ und man möchte diese m Gleichungen

$$G(x_1, \dots, x_n) = 0$$

lösen nach $(n - m)$ Variablen. Das heißt, wir suchen $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ derart, dass

$$\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Die Frage lautet:

Wann existiert (lokal) eine derartige Funktion?

Wenn wir wissen, dass es eine solche Funktion gibt, heißt das nicht, dass wir die auch als explizite Formel finden können. Es heißt aber, dass Lösungen eines solchen Problems sich regulär verhalten und sich dann auch zum Beispiel mit Taylorreihen oder auch numerisch approximieren lassen.

Die Antwort, ob eine solche Funktion existiert, wird gegeben in:

Satz 12.3 (Satz über implizite Funktionen) Sei $n > m$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ derart, dass $f(a, b) = 0$ und

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial b_1} f_1(a, b) & \frac{\partial}{\partial b_2} f_1(a, b) & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_m} f_1(a, b) \\ \frac{\partial}{\partial b_1} f_2(a, b) & \frac{\partial}{\partial b_2} f_2(a, b) & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_m} f_2(a, b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial b_1} f_m(a, b) & \frac{\partial}{\partial b_2} f_m(a, b) & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_m} f_m(a, b) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Dann gibt es eine Umgebung $B_r(a) \times B_s(b)$ von (a, b) und eine differenzierbare Funktion

$$g : B_r(a) \subset \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mit $g(a) = b$ und derart, dass:

- Für $(x, y) \in B_r(a) \times B_s(b)$ gilt

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

- Für $x \in B_r(a)$ gilt:

$$\nabla g(x) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m+2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-m+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-m+2}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m+1}} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m+2}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m}} \end{pmatrix} \Big|_{(x, g(x))}.$$

Beweis. Der Beweis ist ähnlich zu dem für den zweidimensionalen Fall.

Die ersten $n - m$ Koordinaten nennen wir x und die letzten m nennen wir y :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-m} \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} x_{n-m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten $F : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\nabla F(x, y) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-m}} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-m}} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array} \right)_{|(x,y)}$$

und

$$\det(\nabla F(x, y)) = 1^{n-m} \det \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array} \right)_{|(x,y)}.$$

Aus der Annahme folgt, dass $\det(\nabla F(a, b)) \neq 0$, und der Satz über inverse Funktionen liefert uns lokal einen Inversen G zu F . Das heißt, es gibt $\varepsilon > 0$ und $G : F(B_\varepsilon(a, b)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ derart, dass:

$$G \circ F(x, y) = (x, y) \text{ für alle } (x, y) \in B_\varepsilon(a, b).$$

Weil $F_i(x, y) = x_i$ für $i = 1, \dots, n - m$ und $(x, y) \in B_\varepsilon(a, b)$, folgt $G_i(F(x, y)) = x_i$ für $i = 1, \dots, n - m$. Wir setzen $r = \frac{1}{2}\varepsilon$ und legen dann $g : B_r(a) \subset \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ fest durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} G_{n-m+1}(x, 0) \\ \vdots \\ G_n(x, 0) \end{pmatrix}.$$

Wir finden für $(x, y) \in B_r(a) \times B_r(b)$ dass

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y) = G(x, 0) \Leftrightarrow y = g(x).$$

Weil $F(x, g(x)) = 0$ folgt außerdem, dass

$$0 = \nabla(F(x, g(x))) = (\nabla_x F)(x, y)|_{y=g(x)} + (\nabla_y F)(x, y)|_{y=g(x)} (\nabla g)(x),$$

und weil $(\nabla_y F)(x, y)$ invertierbar ist auf $B_r(a, b)$, gilt

$$(\nabla g)(x) = -((\nabla_y F)(x, g(x)))^{-1} (\nabla_x F)(x, g(x))$$

wie oben behauptet. ■

12.3 Extrema unter Nebenbedingungen

Wenn die Temperatur auf der Oberfläche einer Kugel,

$$G(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \text{ mit } R = 1 \text{ (= 12742 km),}$$

definiert ist durch $T(x, y, z) = x^2 + y + z$, kann es sein, dass das Maximum in Heiligendamm erreicht wird?

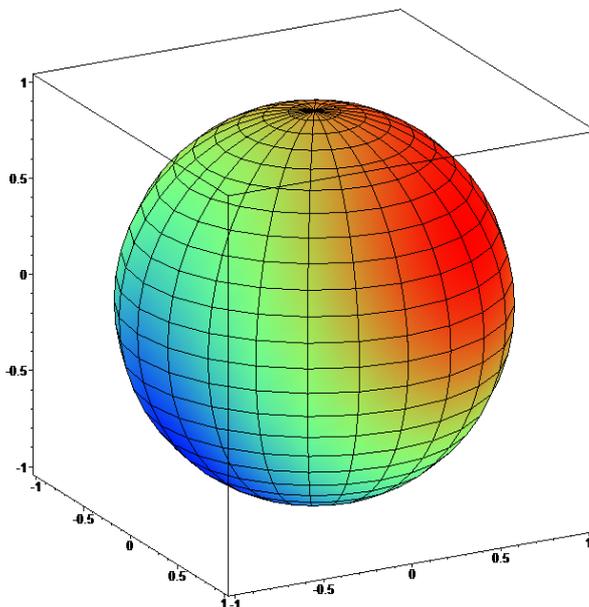


Abbildung 12.3: Die Farbe ist abhängig von $T(x, y, z)$.

Um die Stelle zu finden wo t maximal ist, könnte man z als Funktion von x und y schreiben (implizite Funktion!) und $z = g(x, y)$ in T einsetzen und anschließend auf die übliche Weise $\tilde{T}(x, y) := T(x, y, g(x, y))$ untersuchen. Das heißt, man hat als Kandidaten für die Extrema die stationären Punkte von \tilde{T} . Diese stationären Punkte findet man, indem man $\nabla \tilde{T} = 0$ löst:

$$\begin{aligned} \left(\nabla \tilde{T} \right) (x, y) &= \nabla (T(x, y, g(x, y))) = \nabla T(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_1 g(x, y) & \partial_2 g(x, y) \end{pmatrix} = \\ &= \left(\partial_1 T(x, y, z) + \partial_3 T(x, y, z) \partial_1 g(x, y), \quad \partial_2 T(x, y, z) + \partial_3 T(x, y, z) \partial_2 g(x, y) \right)_{z=g(x, y)}. \end{aligned}$$

Der Satz über implizite Funktionen (Satz 12.3) sagt

$$\nabla g(x, y) = - (\partial_3 G(x, y, z))^{-1} (\partial_1 G(x, y, z), \partial_2 G(x, y, z))|_{z=g(x, y)}.$$

Zusammengefasst bedeutet $\left(\nabla \tilde{T} \right) (x, y) = 0$, dass

$$\begin{aligned} \partial_1 T(x, y, z) &= \frac{\partial_3 T(x, y, z)}{\partial_3 G(x, y, z)} \partial_1 G(x, y, z), \\ \partial_2 T(x, y, z) &= \frac{\partial_3 T(x, y, z)}{\partial_3 G(x, y, z)} \partial_2 G(x, y, z), \\ \partial_3 T(x, y, z) &= \frac{\partial_3 T(x, y, z)}{\partial_3 G(x, y, z)} \partial_3 G(x, y, z). \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist beigefügt als Trivialität aber auch weil man so sieht, dass an einer stationären Stelle gilt: es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\nabla T(x, y, z) = \lambda \nabla G(x, y, z)$$

Wir haben angenommen, dass $z = g(x, y)$ existiert und das darf man wegen des Satzes über implizite Funktionen wenn $\partial_3 G(x, y, z) \neq 0$. Wenn aber $\partial_3 G(x, y, z) = 0$ und $\partial_2 G(x, y, z) \neq 0$, hätten wir eine ähnliche Geschichte erzählen können wenn wir y und z vertauschen.

Für das Beispiel haben wir

$$\nabla T(x, y, z) = (y, x, 1) \text{ und } \nabla G(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Weil $\|\nabla G(x, y, z)\| \neq 0$ für $G(x, y, z) = 0$ kann man mit der Satz über implizite Funktionen immer eine Variable wählen mit $\partial_i G(x, y, z) \neq 0$. Das heißt, die stationären Punkte findet man durch

$$(2x, 1, 1) = \lambda (2x, 2y, 2z) \text{ und } G(x, y, z) = 0,$$

das heißt

$$2x = 2\lambda x, \quad 1 = 2\lambda y, \quad 1 = 2\lambda z \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Wir finden ($x = 0$ oder $\lambda = 1$) und $y = z$. Dann haben diese vier Gleichungen mit vier Variablen folgende Lösungen:

	x	y	z	λ	T
P_1 :	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
P_2 :	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
P_3 :	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
P_4 :	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Man findet zwei Maxima, nämlich in P_3 und P_4 und ein Minimum in P_2 .

Dieser Ansatz bringt uns folgendes Ergebnis:

Satz 12.4 (Multiplikatorsatz von Lagrange für eine Nebenbedingung)

Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Wenn

$$F : \{x \in \mathbb{R}^n; G(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

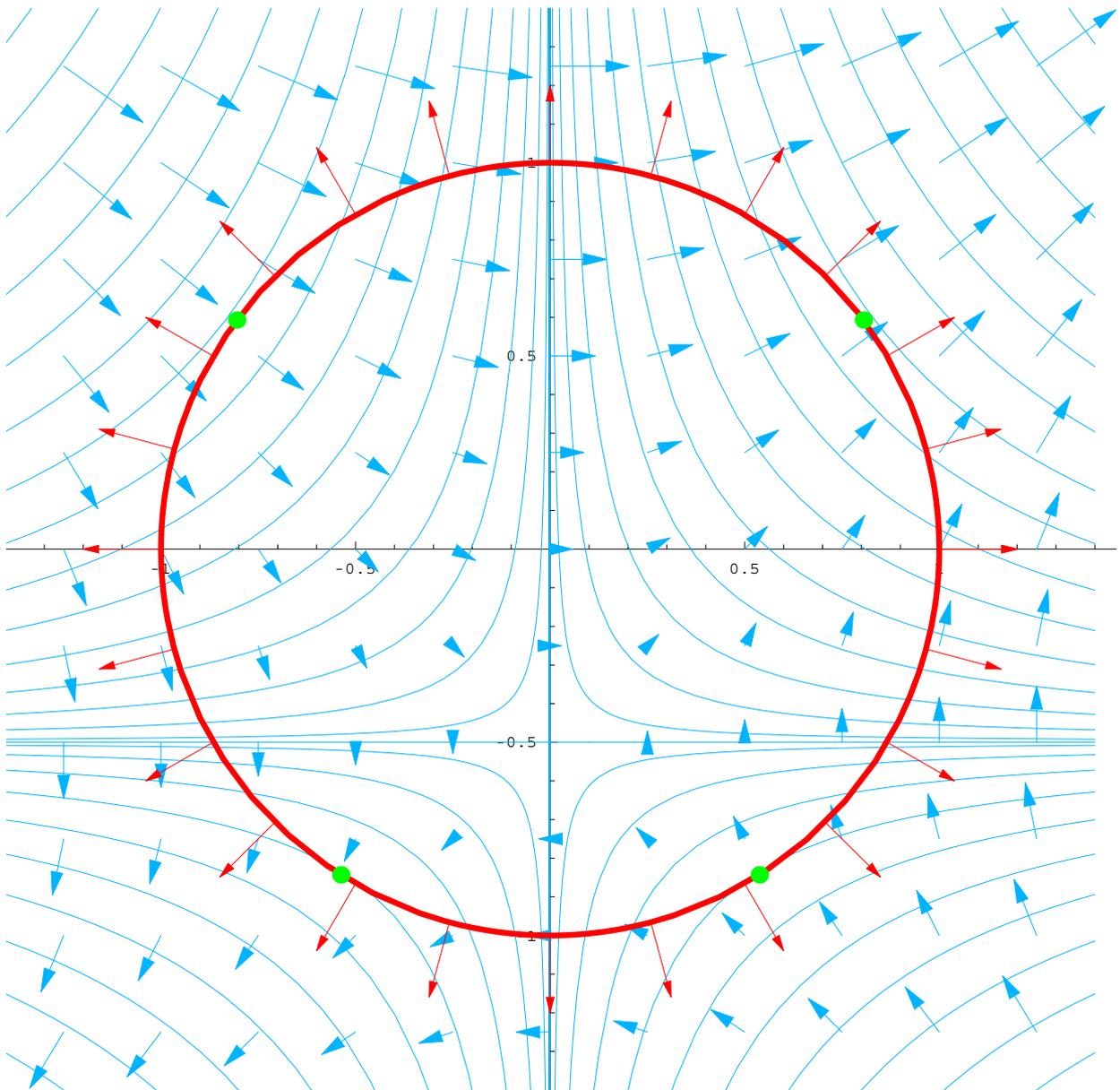
ein Extremum hat in a , dann gilt:

- $\nabla F(a) = \lambda \nabla G(a)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, oder
- $\nabla G(a) = 0 \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung 12.4.1 Die Frage, die dieser Satz hilft zu beantworten, ist:

Wie findet man ein Extremum von $x \mapsto F(x)$ unter der Nebenbedingung $G(x) = 0$?

Bemerkung 12.4.2 Wir haben schon mal gesehen, dass bei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der Gradient ∇F die Richtung der größten Zunahme zeigt. Auch ist der Vektor $\nabla G(a)$ in a orthogonal auf der (Hyper-)Oberfläche $\{x \in \mathbb{R}^n; G(x) = G(a)\}$. Für $F(x) = x_1(2x_2 + 1)$ und $G(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ sieht das wie folgt aus:



In blau die Niveaulinien von F und das zugehörige Gradientenfeld. Die Nebenbedingung $G(x) = 0$ bedeutet, dass man nur x auf dem Kreisrand betrachtet. In den grünen Punkten gilt, ∇F und ∇G sind gleich oder gegengesetzt gerichtet. Dort liegen auch die vier Extrema:

$$P_{st} = \left(\frac{s}{4} \sqrt{\frac{1}{2} (15 - t\sqrt{33})}, \frac{1}{8} (-1 - t\sqrt{33}) \right) \text{ für } s, t \in \{\pm 1\}.$$

Auch dieser Ansatz lässt sich verallgemeinern.

Satz 12.5 (Multiplikatorsatz von Lagrange) Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, mit $m < n$, stetig differenzierbare Funktionen. Wenn

$$F : \{x \in \mathbb{R}^n; G(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

ein Extremum hat in a , dann gilt:

- $\nabla F(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla G_i(a)$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, oder
- $\text{Rang}(\nabla G(a)) < m$.

Bemerkung 12.5.1 Für $m = 1$ bedeutet $\text{Rang}(\nabla G(a)) < m$ genau $\nabla G(a) = 0$. Das heißt, Satz 12.4 ist ein Spezialfall von Satz 12.5.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\text{Rang}(\nabla G(a)) = m$. Dann gibt es in

$$\begin{pmatrix} \partial_1 G_1(a) & \partial_2 G_1(a) & \cdots & \partial_n G_1(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 G_m(a) & \partial_2 G_m(a) & \cdots & \partial_n G_m(a) \end{pmatrix}$$

m unabhängige Spalten. Ohne Verlust der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass diese Spalten die letzten m sind:

$$\begin{pmatrix} \partial_{n-m+1} G_1(a) \\ \partial_{n-m+1} G_2(a) \\ \vdots \\ \partial_{n-m+1} G_m(a) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{n-m+2} G_1(a) \\ \partial_{n-m+2} G_2(a) \\ \vdots \\ \partial_{n-m+2} G_m(a) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \partial_n G_1(a) \\ \partial_n G_2(a) \\ \vdots \\ \partial_n G_m(a) \end{pmatrix}.$$

Wegen des Satzes über implizite Funktionen gibt es eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n-m}$ von $a^* = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ und eine Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ derart, dass für $x \in B_r(a)$ gilt

$$G(x) = 0 \Leftrightarrow (x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Auch kann man die Ableitungen von g schreiben mit Hilfe der Ableitungen von G . Bevor wir noch länger jede Menge riesige Matrizen schreiben, schlagen wir folgende kürzere Notation vor:

$$\mathcal{G}_1 = \begin{pmatrix} \partial_1 G_1(a) & \cdots & \cdots & \partial_{n-m} G_1(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 G_m(a) & \cdots & \cdots & \partial_{n-m} G_m(a) \end{pmatrix}, \mathcal{G}_2 = \begin{pmatrix} \partial_{n-m+1} G_1(a) & \cdots & \partial_n G_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n-m+1} G_m(a) & \cdots & \partial_n G_m(a) \end{pmatrix}.$$

Das heißt $\nabla G(a) = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ mit $\mathcal{G}_1 \in M^{m \times (n-m)}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{G}_2 \in M^{m \times m}(\mathbb{R})$.

Der Satz über implizite Funktionen liefert uns so

$$\nabla g(a^*) = -\mathcal{G}_2^{-1} \mathcal{G}_1.$$

Wir setzen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, g(x_1, x_2, \dots, x_m))$$

und definieren ähnlich $\nabla F(a) = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ mit $\mathcal{F}_1 \in M^{1 \times (n-m)}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_2 \in M^{1 \times m}(\mathbb{R})$. Wir finden

$$\nabla f(a^*) = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \nabla g(a^*) = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} \mathcal{G}_1. \quad (12.2)$$

Die Funktion $F : \{x \in B_r(a); G(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ hat ein Extremum in a , genau dann, wenn f ein Extremum hat in a^* . Weil f differenzierbar ist, hat man $\nabla f(a^*) = 0$. Schreiben wir zu (12.2) auch noch $0 = \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} \mathcal{G}_2$, dann folgt

$$\nabla F(a) = \mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} \nabla G(a).$$

Man soll bemerken, dass $\mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1} \in M^{1 \times m}(\mathbb{R})$. Mit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) := \mathcal{F}_2 \mathcal{G}_2^{-1}$ folgt das Ergebnis. ■

Beispiel 12.6 Wir möchten die Extreme von $f(x, y, z) = x^2(y^2 + z^2)$ für $(x, y, z) \in K$, wobei K die Menge ist, die wir schon in Abbildung 12.2 auf Seite 118 begegnet sind:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ und } (y-1)^2 + z^2 = 1\}.$$

Nennen wir $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$ und $g_2(x, y, z) = (y-1)^2 + z^2 - 1$. Der Multiplikatorsatz besagt, dass die Kandidaten für Extreme sich befinden in (x, y, z) mit

- $\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z)$, oder
- $\text{Rang} \begin{pmatrix} \nabla g_1(x, y, z) \\ \nabla g_2(x, y, z) \end{pmatrix} < 2$.

Die erste Möglichkeit ergibt

$$\begin{pmatrix} 2x(y^2 + z^2) \\ 2x^2y \\ 2x^2z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$(x = 0 \text{ oder } y^2 + z^2 = \lambda_1) \text{ und } x^2y = (\lambda_1 + \lambda_2)y - \lambda_2 \\ \text{und } (z = 0 \text{ oder } x^2 = \lambda_1 + \lambda_2).$$

Wir unterscheiden vier Fälle:

1. $x = 0$ und $z = 0$. Dann soll gelten, dass $y^2 = 2$ und $(y-1)^2 = 1$ und wir finden keine Lösung.
2. $x = 0$ und $x^2 = \lambda_1 + \lambda_2$. Dann bekommt man $y^2 + z^2 = 2$ und $(y-1)^2 + z^2 = 1$. Also $-2y + 2 = 0$ und wir haben als Kandidaten

$$P_1 = (0, 1, 1) \text{ und } P_2 = (0, 1, -1).$$

3. $y^2 + z^2 = \lambda_1$ und $z = 0$. Dann bekommt man $x^2 + y^2 = 2$ und $(y-1)^2 = 1$. Dann folgt $y = 2$ oder $y = 0$, aber wir haben nur neuen Kandidaten für $y = 0$:

$$P_3 = (\sqrt{2}, 0, 0) \text{ und } P_4 = (-\sqrt{2}, 0, 0).$$

Für $y = 2$ finden wir einen Widerspruch zu $2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq y^2 = 4$.

4. $y^2 + z^2 = \lambda_1$ und $x^2 = \lambda_1 + \lambda_2$. Mit $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ folgt $2\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ und $\lambda_2 = 2 - 2\lambda_1 = 2 - 2y^2 - 2z^2$. Wir haben zu lösen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ und } (y-1)^2 + z^2 = 1 \text{ und } x^2y = x^2y - (2 - 2y^2 - 2z^2).$$

Das letzte liefert $y^2 + z^2 = 1$ und mit $(y-1)^2 + z^2 = 1$ folgt $y = \frac{1}{2}$. Die Kandidaten sind:

$$P_{5,6,7,8} = \left(\pm 1, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Die zweite Möglichkeit ist, dass $\nabla g_1(x, y, z)$ und $\nabla g_2(x, y, z)$ abhängig sind. Man kann zeigen, dass das auf K nicht passiert.

In den Punkten P_i nimmt f folgende Werten an:

$$f(0, 1, \pm 1) = 0, \quad f(\pm\sqrt{2}, 0, 0) = 0 \quad \text{und} \quad f\left(\pm 1, \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1.$$

Weil K kompakt ist, werden die Extreme angenommen. Es lässt sich raten, welche Punkten die Maxima und welche die Minima liefern. Ein Bild steht auf der nächsten Seite.

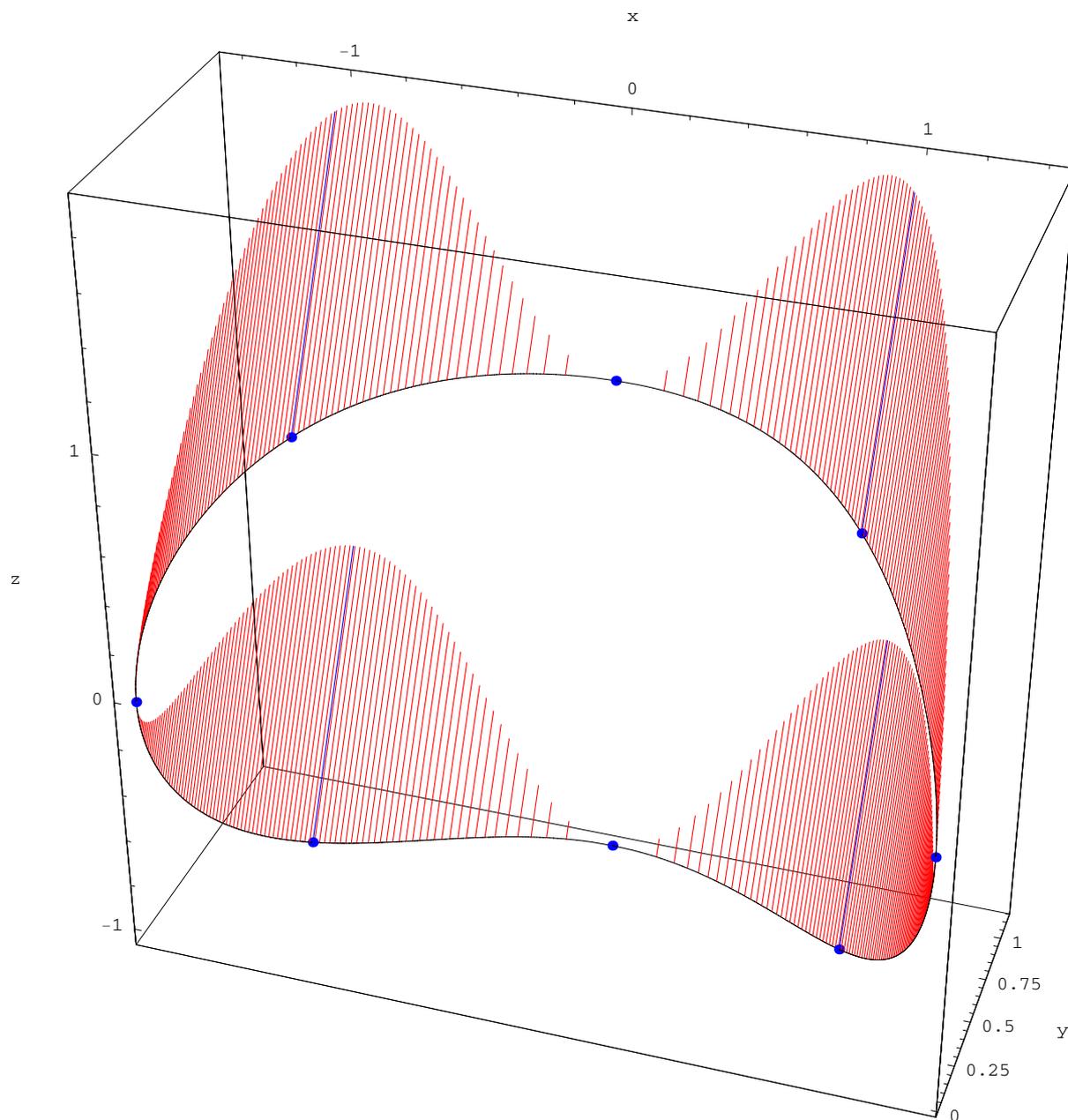
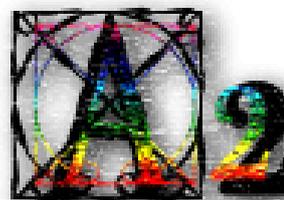


Abbildung 12.4: Eine Skizze zu Beispiel 12.6. K wird dargestellt durch die schwarze Kurve; die Extremstellen sind blau; die Funktionswerte sind proportional zu der Länge der Stäbchen.

Analysis 2, Woche 13

Integrale in mehreren Dimensionen I



13.1 Volumen

Die geometrisch inspirierten Prinzipien für ein Volumen sind:

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq a$ setzen wir $\text{Vol}_{\mathbb{R}}(a, b) = b - a$ und $\text{Vol}_{\mathbb{R}}(\{a\}) = 0$.
- Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ beide ein Volumen haben, dann gilt

$$\text{Vol}_{\mathbb{R}^{n+m}}(A \times B) = \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(A) \text{Vol}_{\mathbb{R}^m}(B).$$

- Wenn $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beide ein Volumen haben und $A \cap B = \emptyset$, dann gilt

$$\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(A \cup B) = \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(A) + \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B).$$

- Wenn $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beide ein Volumen haben und $A \subset B$, dann gilt

$$\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(A) \leq \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B).$$

Wenn deutlich ist, um welche Dimension es sich handelt, dann schreiben wir nur Vol. Wir nennen

$$B := (x_1, y_1] \times (x_2, y_2] \times \cdots \times (x_n, y_n] = \{z \in \mathbb{R}^n; x_i < z_i \leq y_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

mit $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ einen Block in \mathbb{R}^n . Definieren wir für so einen Block mit $x_i \leq y_i$

$$\text{Vol}((x_1, y_1] \times (x_2, y_2] \times \cdots \times (x_n, y_n]) = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \cdots (y_n - x_n)$$

dann sieht man, dass die oben genannten Regeln erfüllt sind.

Als nächstes definieren wir für

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^k B_i$$

wobei B_1, \dots, B_k paarweise disjunkte Blöcke sind:

$$\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^k B_i\right) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}(B_i).$$

Für andere Gebiete wird folgendes verabredet:

Definition 13.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge.

- Wir nennen $\{B_i\}_{i=1}^\ell$ eine äußere Familie von Blöcken zu Ω , wenn $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^\ell B_i$. Das **äußere Volumen** von Ω wird definiert als

$$\text{Vol}_a(\Omega) = \inf \left\{ \text{Vol} \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right); \{B_i\}_{i=1}^\ell \text{ ist eine äußere Familie von Blöcken zu } \Omega \right\}.$$

- Wir nennen $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^\ell$ eine innere Familie von Blöcken zu Ω , wenn $\tilde{B}_i \cap \tilde{B}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^\ell \tilde{B}_i \subset \Omega$. Das **innere Volumen** von Ω wird definiert als

$$\text{Vol}_{in}(\Omega) = \sup \left\{ \text{Vol} \left(\bigcup_{i=1}^k \tilde{B}_i \right); \{\tilde{B}_i\}_{i=1}^\ell \text{ ist eine innere Familie von Blöcken zu } \Omega \right\}.$$

Definition 13.2 Wenn $\text{Vol}_a(\Omega) = \text{Vol}_{in}(\Omega)$, dann sagen wir “ Ω hat ein Volumen” und schreiben $\text{Vol}(\Omega) = \text{Vol}_a(\Omega) = \text{Vol}_{in}(\Omega)$.

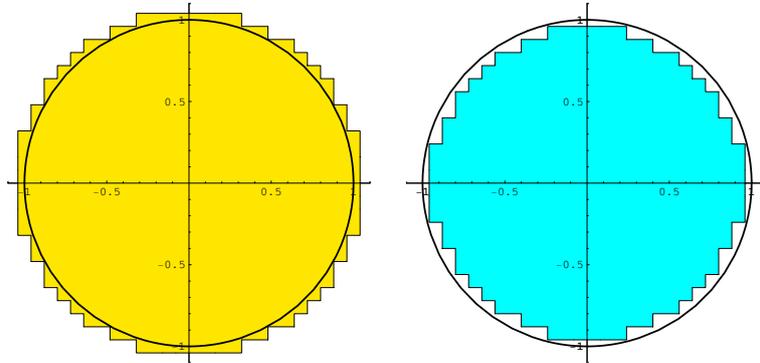


Abbildung 13.1: Kreis, von außen und von innen mit Rechtecken approximiert

Bemerkung 13.2.1 Jedes beschränkte Gebiet hat ein äußeres und ein inneres Volumen. Ein Beispiel, bei dem beide verschieden sind, ist $\Omega = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$: $\text{Vol}_a(\Omega) = 1$ und $\text{Vol}_{in}(\Omega) = 0$.

Bemerkung 13.2.2 Um zu zeigen, dass Ω ein Volumen hat, reicht es zu zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine äußere Familie $\{B_i\}_{i=1}^\ell$ und eine innere Familie $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^m$ gibt mit

$$\text{Vol} \left(\bigcup_{i=1}^\ell B_i \right) \leq \text{Vol} \left(\bigcup_{i=1}^m \tilde{B}_i \right) + \varepsilon$$

Bemerkung 13.2.3 Wir haben Blöcke genommen, die zusammengestellt sind mit Hilfe von halboffenen Intervallen. Stattdessen kann man abgeschlossene Blöcke $[x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \times \cdots \times [x_n, y_n]$ oder auch offene $(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) \times \cdots \times (x_n, y_n)$ betrachten, wenn man in Definition 13.1 annimmt, dass eine Familie von Blöcken $\{B_i\}_{i=1}^\ell$ derart ist, dass $B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset$ für $i \neq j$.

Lemma 13.3 Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und konvex¹ ist, existiert $\text{Vol}(\Omega)$.

¹Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für jede $a, b \in \Omega$ gilt $[a, b] \subset \Omega$. Zur Erinnerung:

$$[a, b] = \{sa + (1-s)b; 0 \leq s \leq 1\}.$$

13.2 Integrale durch Ober- und Untersummen

Definition 13.4 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit endlichem Volumen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion. Setze $f(x) = 0$ für $x \notin \Omega$.

- Wir nennen $O_f \in \mathbb{R}$ eine *Obersumme*, wenn es eine äußere Familie von Blöcken $\{B_i\}_{i=1}^{\ell}$ zu Ω gibt und es $\bar{f}_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, \ell$) gibt derart, dass

- $\bigcup_{i=1}^{\ell} B_i \supset \Omega$ und
- $\bar{f}_i \geq f(x)$ für $x \in B_i$ und
- $O_f = \sum_{i=1}^{\ell} \bar{f}_i \text{Vol}(B_i)$.

- Wir nennen $U_f \in \mathbb{R}$ eine *Untersumme*, wenn es eine innere $\{\tilde{B}_i\}_{i=1}^{\ell}$ zu Ω gibt, und es $\underline{f}_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, \ell$) gibt derart, dass

- $\bigcup_{i=1}^{\ell} \tilde{B}_i \subset \Omega$ und
- $\underline{f}_i \leq f(x)$ für $x \in \tilde{B}_i$ und
- $U_f = \sum_{i=1}^{\ell} \underline{f}_i \text{Vol}(\tilde{B}_i)$.

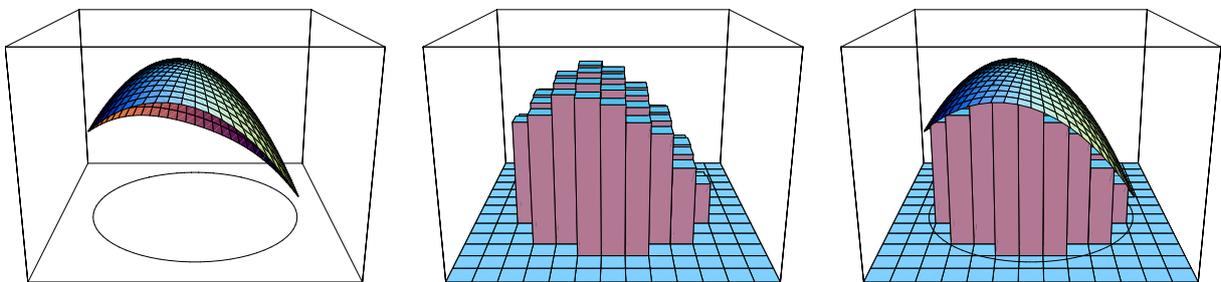


Abbildung 13.2: Skizzen zu einer Funktion $f : B_1(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$, einer Untersumme und beiden zusammen

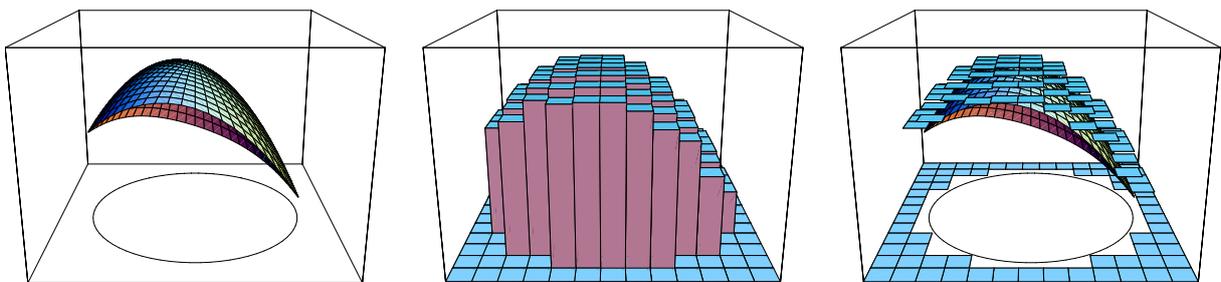


Abbildung 13.3: Skizzen zu einer Funktion $f : B_1(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$, einer Obersumme und beiden zusammen (aber ohne Stäbchen).

Definition 13.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit endlichem Volumen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtnegative Funktion.

Wir nennen f *R-integrierbar* über Ω , wenn

$$I_f := \sup \{U_f; \text{Untersummen für } f \text{ auf } \Omega\} = \inf \{O_f; \text{Obersummen für } f \text{ auf } \Omega\},$$

und $I_f \in \mathbb{R}$. Wir nennen diese Zahl das *R-Integral* für f auf Ω und schreiben

$$\int_{\Omega} f(x) dx := I_f.$$

Integrale sind hier nur für nichtnegative Funktionen definiert. Für negative Funktionen und Funktionen mit Vorzeichenwechsel betrachtet man f^+ und f^- getrennt. Die Funktionen f^+ und f^- definiert man als

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{und} \quad f^-(x) = -\min(f(x), 0).$$

Es folgt, dass f^+ und f^- nichtnegative Funktionen sind und dass

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

Definition 13.6 Wir nennen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *R-integrierbar* über Ω , wenn sowohl $f^+ : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ als auch $f^- : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *R-integrierbar* über Ω sind, und setzen

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \int_{\Omega} f^+(x) dx - \int_{\Omega} f^-(x) dx.$$

Bemerkung 13.6.1 Der Buchstabe *R*, der hier erscheint verweist auf Riemann. Was wir hier definiert haben, ist nicht genau so wie Riemann es gemacht hat, aber reicht vorläufig für unsere Zwecke aus. Das *R-Integral* und auch das originale Riemann-Integral haben leider nicht all die schönen Eigenschaften, die man eigentlich haben möchte. In Analysis 3 wird statt diesem Integral dann auch das Lebesgue-Integral eingeführt und verwendet.

Lemma 13.7 Seien $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *R-integrierbar* auf Ω . Dann gilt $f + g$ ist *R-integrierbar* auf Ω und

$$\int_{\Omega} (f(x) + g(x)) dx = \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Omega} g(x) dx$$

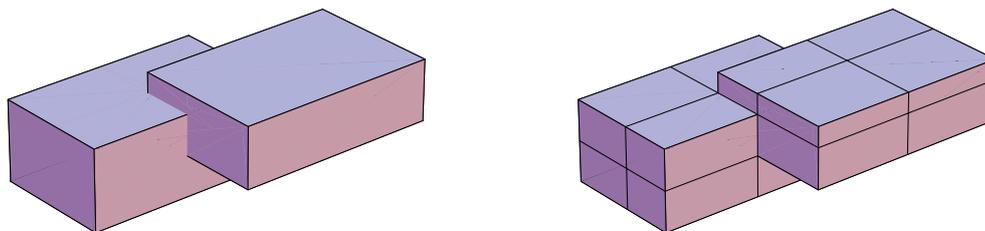
Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\{\tilde{B}_i^{f^+}\}_{i=1}^{m_{f^+}}$ und $\{B_i^{f^+}\}_{i=1}^{m_{f^+}}$ die Unter- und Obersummen für $\int_{\Omega} f^+(x) dx$ liefern mit

$$O_{f^+} - \frac{1}{2}\varepsilon \leq U_{f^+} \leq \int_{\Omega} f^+(x) dx \leq O_{f^+} \leq U_{f^+} + \frac{1}{24}\varepsilon.$$

Ebenso gibt es $\{\tilde{B}_i^{g^+}\}_{i=1}^{m_{g^+}}$ und $\{B_i^{g^+}\}_{i=1}^{m_{g^+}}$ die Unter- und Obersummen für $\int_{\Omega} g^+(x) dx$ liefern mit

$$O_{g^+} - \frac{1}{2}\varepsilon \leq U_{g^+} \leq \int_{\Omega} g^+(x) dx \leq O_{g^+} \leq U_{g^+} + \frac{1}{24}\varepsilon.$$

Jetzt kann man mit $\{B_i^{f^+}\}_{i=1}^{m_{f^+}}$ und $\{B_j^{g^+}\}_{j=1}^{m_{g^+}}$ eine neue Familie von Blöcken bilden. Wenn zwei Blöcke $B_i^{f^+}$ und $B_j^{g^+}$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, teilt man diese in höchstens $2^{n+1} - 1$ neue Teilblöcke.



Wenn man so in endlich vielen Schritten eine neue Familie $\{B_k^{f^++g^+}\}_{k=1}^{m_{f^++g^+}}$ bekommen hat, nimmt man als Abschätzung von unten für $f^+ + g^+$ die ‘alten’ $f_i^+ + g_j^+$. So bekommt man eine Untersumme $U_{f^++g^+} = U_{f^+} + U_{g^+}$. Ebenso konstruiert man eine Obersumme und

$$O_{f^++g^+} - \varepsilon \leq U_{f^++g^+} \leq \int_{\Omega} (f^+(x) + g^+(x)) dx \leq O_{f^++g^+} \leq U_{f^++g^+} + \varepsilon.$$

Weil sich diese Konstruktion für jedes $\varepsilon > 0$ machen lässt folgt, dass $\int_{\Omega} (f^+(x) + g^+(x)) dx$ existiert und dass sogar gilt

$$\int_{\Omega} (f^+(x) + g^+(x)) dx = \int_{\Omega} f^+(x) dx + \int_{\Omega} g^+(x) dx.$$

Das gleiche macht man für f^- und f^+ und das Ergebnis folgt. ■

Lemma 13.8 Sei $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ und $f : \Omega_2 \cup \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die R-integrierbar ist auf Ω_1 und auf Ω_2 . Dann gilt f ist R-integrierbar auf $\Omega_2 \cup \Omega_1$ und

$$\int_{\Omega_2 \cup \Omega_1} f(x) dx = \int_{\Omega_1} f(x) dx + \int_{\Omega_2} f(x) dx.$$

Beweis. Auch hier gibt es nur ein Problem, wenn sich zwei Blöcke bei Ober- oder Untersummen für f^+ oder f^- überschneiden. Die betreffenden Blöcke zu zerschneiden wie oben führt zur Lösung dieses Problems. ■

Lemma 13.9 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wenn $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbare Funktionen sind mit $f \leq g$ auf Ω . Dann gilt

$$\int_{\Omega} f(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) dx.$$

Beweis. Wenn $f \leq g$ auf Ω , dann gilt auch $f^+ \leq g^+$ und $f^- \geq g^-$ auf Ω . Wiederum bastelt man mit den Blöcken $\{B_i^{f^+}\}_{i=1}^{m_{f^+}}$ und $\{B_j^{g^+}\}_{j=1}^{m_{g^+}}$ eine neue $\{B_k\}_{k=1}^m$ durch Teilung in gemeinsame Teilblöcke. Wenn B_k die beiden Väter $B_i^{f^+}$ und $B_j^{g^+}$ hat, und f_i^+ und g_j^+ die obere Abschätzung für f und g sind, ist $\min(f_i^+, g_j^+)$ beziehungsweise \bar{g}_j^+ eine obere Abschätzung für f^+, g^+ . Das heißt, für jede Obersumme O_{g^+} für g^+ gibt es eine Obersumme \tilde{O}_{f^+} für f^+ mit $\tilde{O}_{f^+} \leq O_{g^+}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f^+(x) dx &= \inf \{O_{f^+}; \text{Obersummen für } f\} \leq \\ &\leq \inf \{O_{g^+}; \text{Obersummen für } g\} = \int_{\Omega} g^+(x) dx. \end{aligned}$$

Ebenso geht man voran für f^- und g^- und findet

$$\int_{\Omega} f^-(x) dx \geq \int_{\Omega} g^-(x) dx$$

und das Ergebnis folgt aus (13.6). ■

Satz 13.10 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und konvex. Eine Funktion $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ die stetig ist, ist R-integrierbar auf Ω .

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $\Omega \subset [-M, M]^n$ und dass $f \geq 0$ gilt. Wenn f das Vorzeichen wechselt, dann betrachtet man f^+ und f^- getrennt. Stetigkeit von f impliziert Stetigkeit von f^+ und f^- .

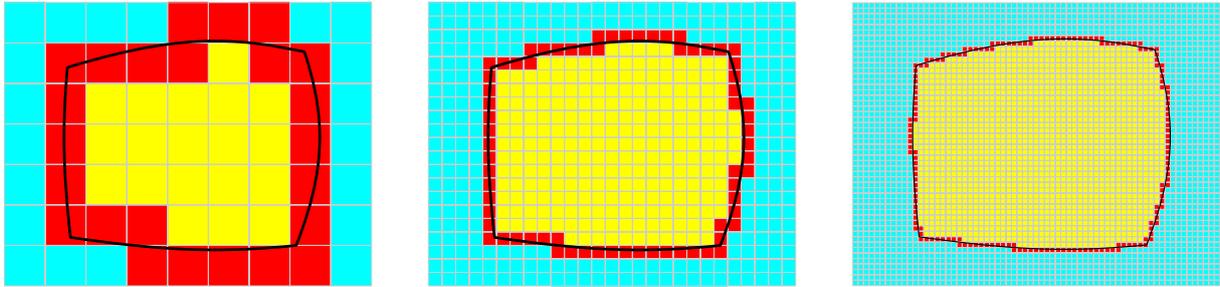
Weil $\bar{\Omega}$ kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig auf $\bar{\Omega}$: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass $|x - y| < \delta$ impliziert $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir nehmen $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{4}\varepsilon(4M)^{-n} > 0$ und es gibt ein $\delta_{\tilde{\varepsilon}}$ wie oben. Anschließend teilen wir $[-M, M]^n$ in m^n gleichgroße Blöcke für m genügend groß. Wir nehmen m so groß, dass

$$m \geq 4(8M)^n \|f\|_\infty \varepsilon^{-1} \text{ und } m \geq 2M\sqrt{n} \delta_{\tilde{\varepsilon}}^{-1}.$$

Für die Obersumme beziehungsweise Untersumme setzen wir auf die Blöcke B_i mit $\partial\Omega \cap B_i \neq \emptyset$ als obere Abschätzung $\bar{f}_i = \|f\|_\infty$ und als untere Abschätzung $\underline{f}_i = 0$. Wenn ein Block B_i außerhalb Ω liegt, setzen wir $\bar{f}_i = \underline{f}_i = 0$. Wenn B_i innerhalb Ω liegt, setzen wir $\bar{f}_i = f(y^i) + \tilde{\varepsilon}$ und $\underline{f}_i = f(y^i) - \tilde{\varepsilon}$, wobei y^i der Mittelpunkt von B_i ist.

Aus elementaren geometrischen Überlegungen folgt, weil Ω konvex ist, dass es höchstens $2^n m^{n-1}$ Blöcke gibt, die den Rand $\partial\Omega$ überdecken.



Es folgt

$$\begin{aligned} O_f &= \sum_{B_i} \bar{f}_i \text{Vol}(B_i) = \sum_{B_i} \bar{f}_i \frac{4^n M^n}{m^n} = \\ &= \frac{4^n M^n}{m^n} \left(\sum_{B_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset} \|f\|_\infty + \sum_{B_i \subset \Omega} (f(y^i) + \tilde{\varepsilon}) \right) \leq \\ &\leq \frac{4^n M^n}{m^n} (2^n m^{n-1} \|f\|_\infty) + \frac{4^n M^n}{m^n} \sum_{B_i \subset \Omega} f(y^i) + \frac{4^n M^n}{m^n} m^n \tilde{\varepsilon} \leq \\ &\leq \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{4^n M^n}{m^n} \left(\sum_{B_i \subset \Omega} f(y^i) \right) + \frac{1}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

und ähnlich

$$U_f \geq \frac{4^n M^n}{m^n} \sum_{B_i \subset \Omega} (f(y^i) - \tilde{\varepsilon}) \geq \frac{4^n M^n}{m^n} \left(\sum_{B_i \subset \Omega} f(y^i) \right) - \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Wir haben eine Zerlegung gefunden mit

$$O_f - U_f < \varepsilon.$$

Weil wir das für jedes $\varepsilon > 0$ ausführen können, ist f integrierbar auf Ω . ■

Im letzten Satz haben wir die sehr einschränkende Bedingung gebraucht, dass das Gebiet konvex ist. Wenn man den Beweis genau betrachtet, dann sieht man, dass diese

Bedingung nur benutzt wird um zu zeigen, dass der Sprung von f auf 0 am Rande $\partial\Omega$ überdeckt werden kann mit Blöcken, deren gesamtes Volumen man so klein bekommen kann wie man möchte. Anders gesagt, den Beitrag des Randes kann man vernachlässigen. Für konvexe Gebiete ist das leicht einzusehen. Es würde hier zu weit führen, eine weniger restriktive Bedingung zu formulieren. Zum Beispiel sind Gebiete erlaubt, die man bekommt durch Vereinigung endlich vieler konvexen Teilgebiete. Auch Gebiete, die sich mit einem Diffeomorphismus auf ein konvexes Gebiet abbilden lassen, sind erlaubt.

13.3 Berechnen von mehrdimensionalen Integralen

Wir haben jetzt zwar Integrale definiert, aber wie kann man sie, wenn überhaupt möglich, berechnen oder zumindestens so vereinfachen, dass sie geradeaus zu approximieren sind?

13.3.1 Integrale auf rechteckigen Gebieten

Satz 13.11 (Satz von Fubini-Tonelli auf Rechtecken) Sei $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_B f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1.$$



Abbildung 13.4: Links Leonida Tonelli, und rechts Guido Fubini

Bemerkung 13.11.1 Übrigens kann man die Integrationsreihenfolge beliebig wählen und statt x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 auch x_5, x_3, \dots, x_2 nehmen, wenn bloß alle genau einmal vorkommen.

Bemerkung 13.11.2 Dieser Satz, nach Fubini und Tonelli benannt, ist auch gültig in allgemeineren Fällen. Für f stetig und unseres R-Integral ist der Beweis einfacher.

Beweis. Es reicht, wenn wir für $B = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ und $I = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mit $a_i < b_i$ zeigen können, dass gilt

$$\begin{aligned} \int_{B \times I} f(x, x_{n+1}) d(x, x_{n+1}) &= \int_B \left(\int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1} \right) dx = \\ &= \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} \left(\int_B f(x, x_{n+1}) dx \right) dx_{n+1}. \end{aligned}$$

Wenn wir die erste Gleichung betrachten, kommen die folgenden Fragen auf. Weil f stetig ist, ist f integrierbar auf $B \times I$. Heißt das auch, dass $x_{n+1} \mapsto f(x, x_{n+1})$ R-integrierbar ist auf I , und dass $x \mapsto \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}$ R-integrierbar ist auf B ? Und wenn das so ist, ergibt diese wiederholte Integration den gleichen Wert?

Antworten zu diesen Fragen geben die folgenden Überlegungen.

1. Wenn f stetig ist, ist $x_{n+1} \mapsto f(x, x_{n+1})$ stetig und R-integrierbar.
2. Wenn f stetig ist auf einem kompakten Gebiet, dann ist f gleichmäßig stetig und das heißt, für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta_\varepsilon > 0$ derart, dass

$$|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, x_{n+1}) - f(y, x_{n+1})| < \varepsilon.$$

Für $|x - y| < \delta_{\varepsilon/(1+\text{Vol}(B))}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} & \left| \int_B f(x, x_{n+1}) dx_{n+1} - \int_B f(y, x_{n+1}) dx_{n+1} \right| \leq \\ & \leq \int_B |f(x, x_{n+1}) - f(y, x_{n+1})| dx_{n+1} \leq \int_B \frac{\varepsilon}{1 + \text{Vol}(B)} dx_{n+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $x \mapsto \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}$ stetig und dann auch R-integrierbar.

3. Wir definieren $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = \int_{a_{n+1}}^{b_{n+1}} f(x, x_{n+1}) dx_{n+1}$. Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass

$$\inf \{O_{f, B \times I}; \text{Obersummen für } f\} = \inf \{O_{g, B}; \text{Obersummen für } g\}.$$

Mit einer Obersumme für $(x, x_{n+1}) \mapsto f(x, x_{n+1})$ lässt sich sofort eine Obersumme $O_{x \mapsto f(x, x_{n+1})}(x_{n+1})$ für $x \mapsto f(x, x_{n+1})$ bei jedem x_{n+1} konstruieren. Zählt man die mit dem richtigen Gewicht versehen zusammen, dann bekommt man eine Obersumme für g . Das zeigt

$$\inf \{O_{f, B \times I}; \text{O.f. } f\} \geq \inf \{O_{g, B}; \text{O.f. } g\}.$$

Ebenso findet man

$$\sup \{U_{f, B \times I}; \text{U.f. } f\} \leq \sup \{U_{g, B}; \text{U.f. } g\}.$$

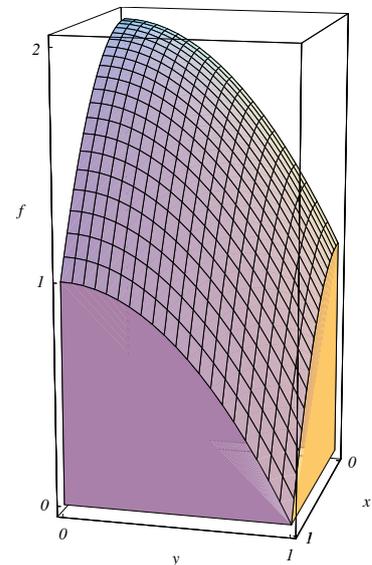
Weil $\sup \{U_{f, B \times I}; \text{U.f. } f\} = \inf \{O_{f, B \times I}; \text{O.f. } f\}$ folgt das Resultat.

Der Beweis für die zweite Gleichung verläuft ähnlich. ■

Beispiel 13.12 Gefragt ist $\int_{[0,1]^2} (2 - x_1^2 - x_2^2) dx$.

Der Satz von Fubini-Tonelli besagt

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^2} (2 - x_1^2 - x_2^2) dx = \\ & = \int_0^1 \left(\int_0^1 (2 - x_1^2 - x_2^2) dx_1 \right) dx_2 = \\ & = \int_0^1 \left([2x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - x_2^2 x_1]_{x_1=0}^{x_1=1} \right) dx_2 = \\ & = \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{3} - x_2^2 \right) dx_2 = \left[\frac{5}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_2^3 \right]_{x_2=0}^{x_2=1} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



13.3.2 Integrale auf allgemeineren Gebieten

Wie benutzt man den Satz von Fubini-Tonelli, wenn man kein rechteckiges Gebiet hat?

Lemma 13.13 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und konvex. Setze

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \{0\} \text{ und} \\ \Omega_m &= \{x \in \mathbb{R}^m; \exists y \in \mathbb{R}^{n-m} \text{ mit } (x, y) \in \Omega\} \text{ für } m \in \{1, \dots, n-1\}\end{aligned}$$

Dann sind die Ω_m konvex und es gibt stetige Funktionen $\phi_m^+, \phi_m^- : \Omega_m \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass

$$\begin{aligned}\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \quad & \phi_{n-1}^-(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) < x_n < \phi_{n-1}^+(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}), \\ & \phi_{n-2}^-(x_1, \dots, x_{n-2}) < x_{n-1} < \phi_{n-2}^+(x_1, \dots, x_{n-2}), \\ & \vdots \\ & \phi_1^-(x_1) < x_2 < \phi_1^+(x_1), \\ & \phi_0^- < x_1 < \phi_0^+ \}.\end{aligned}$$

Bemerkung 13.13.1 Selbstverständlich gibt es noch $n!-1$ andere mögliche Anordnungen für x_1 bis x_n . Jede Anordnung hat seine eigenen Ω_m und $\phi_{n-1}^-, \phi_{n-1}^+$.

Beweis. Wir bemerken nur, dass man mit Induktion rückwärts folgendes zeigen kann. Für $\Omega_{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ konvex, setzt man

$$\Omega_m := \{x \in \mathbb{R}^m; \text{es gibt } x_{m+1} \in \mathbb{R} \text{ mit } (x, x_{m+1}) \in \Omega_{m+1}\}.$$

Dann ist Ω_m konvex und gibt es Funktionen $\phi_m^+, \phi_m^- : \Omega_m \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Omega_{m+1} = \{(x, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}; x \in \Omega_m \text{ und } \phi_m^-(x) < x_{m+1} < \phi_m^+(x)\}.$$

Die Konvexität von Ω_{m+1} liefert die Stetigkeit von ϕ_m^+, ϕ_m^- . Übrigens fängt man die vollständige Induktion an mit $\Omega_n = \Omega$, also $m+1 = n$, und endet bei $\Omega_0 = \{0\}$. ■

Korollar 13.14 (Fubini-Tonelli für konvexe Gebiete) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und konvex und sei $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei Ω_m, ϕ_m^+ und ϕ_m^- wie in Lemma 13.13. Dann gilt

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega} f(x) dx = \\ &= \int_{\phi_0^-}^{\phi_0^+} \int_{\phi_1^-(x_1)}^{\phi_1^+(x_1)} \cdots \int_{\phi_{n-2}^-(x_1, \dots, x_{n-2})}^{\phi_{n-2}^+(x_1, \dots, x_{n-2})} \int_{\phi_{n-1}^-(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\phi_{n-1}^+(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_2 dx_1.\end{aligned}\tag{13.1}$$

Bemerkung 13.14.1 Für $\Omega \subset B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ kann man dieses Ergebnis auch schreiben wie

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} (\mathbf{1}_{\Omega} f)(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1 \tag{13.2}$$

mit

$$(\mathbf{1}_{\Omega} f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \notin \Omega. \end{cases}$$

Beweis. Die Idee des Beweises ist wiederum, das Gebiet mit Blöcken zu approximieren und auf diesen Blöcken Fubini-Tonelli anzuwenden. Am Rande hat man möglicherweise schlechte Abschätzungen, aber indem man feiner approximiert wie im Beweis von Satz 13.10, wird dieses Problemgebiet immer dünner und dessen Beitrag in Ober- und Untersummen konvergiert nach 0. Man findet so (13.2). Mit Hilfe von Lemma 13.13 folgt (13.1). ■

Beispiel 13.15 Gefragt ist $\int_{\Omega} (2 - x_1^2 - x_2^2) dx$ mit

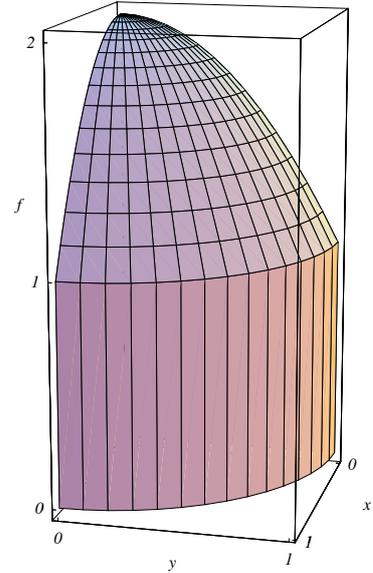
$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0, x_2 > 0 \text{ und } \|x\| < 1\}.$$

Man hat

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2); 0 < x_2 < \sqrt{1 - x_1^2}, 0 < x_1 < 1 \right\}$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (2 - x_1^2 - x_2^2) dx &= \\ &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} (2 - x_1^2 - x_2^2) dx_2 dx_1 = \\ &= \int_0^1 \left[2x_2 - x_1^2 x_2 - \frac{1}{3} x_2^3 \right]_0^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_1 = \\ &= \int_0^1 \left(2\sqrt{1-x_1^2} - x_1^2 \sqrt{1-x_1^2} - \frac{1}{3} (1-x_1^2)^{3/2} \right) dx_1 = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{3} \sqrt{1-x_1^2} - \frac{2}{3} x_1^2 \sqrt{1-x_1^2} \right) dx_1 = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5}{3} \cos t - \frac{2}{3} (\sin t)^2 \cos t \right) \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5}{3} (\cos t)^2 - \frac{1}{6} (\sin 2t)^2 \right) dt = \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{6} \right) \frac{\pi}{4} = \frac{3}{8} \pi. \end{aligned}$$



Beispiel 13.16 Gefragt ist $\int_{\Omega} e^{-x_1^2} dx$ mit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 < x_2 < x_1 < 1\}$.

Dieses Gebiet Ω wird dargestellt durch ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$. Wenn wir das Integral aufspalten in ein Integral für x_1 und anschließend eins für x_2 , dann wird das

$$\int_{\Omega} e^{-x_1^2} dx = \int_{x_2=0}^1 \int_{x_1=x_2}^1 e^{-x_1^2} dx_1 dx_2.$$

Diese Berechnung ist leider so nicht weiterzuführen, weil uns eine Stammfunktion zu $x_1 \mapsto e^{-x_1^2}$ fehlt.

Wir können aber die Anordnung von x_1, x_2 umkehren.

In umgekehrter Folge finden wir:

$$\int_{\Omega} e^{-x_1^2} dx = \int_{x_1=0}^1 \int_{x_2=0}^{x_1} e^{-x_1^2} dx_2 dx_1 = \tag{13.3}$$

(bevor wir weiter machen, soll man bemerken, dass nicht nur die Folge sich ändert, sondern auch die Funktionen ϕ_i^{\pm} in den Integrationsintervallen!)

$$(13.3) = \int_{x_1=0}^1 \left[x_2 e^{-x_1^2} \right]_{x_2=0}^{x_2=x_1} dx_1 = \int_{x_1=0}^1 x_1 e^{-x_1^2} dx_1 = \left[-\frac{1}{2} e^{-x_1^2} \right]_{x_1=0}^{x_1=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}.$$

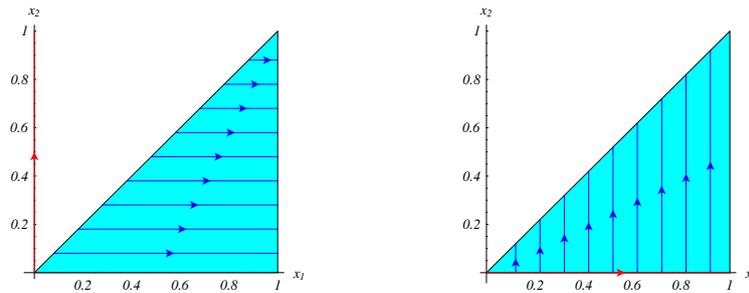


Abbildung 13.5: Darstellung zu den unterschiedlichen Folgen beim Berechnen vom Integral: links erst $x_1 : x_2 \rightarrow 1$ und anschließend $x_2 : 0 \rightarrow 1$; rechts erst $x_2 : 0 \rightarrow x_1$ und dann $x_1 : 0 \rightarrow 1$.

13.3.3 Volumen in Scheiben

Wenn man die Definitionen vom Integral und vom Volumen genau anschaut, dann sieht man, dass wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Volumen hat, folgendes gilt:

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx.$$

Diese Bemerkung führt uns zum folgenden Satz:

Satz 13.17 (Das Prinzip von Cavalieri) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ darstellbar durch

$$\Omega = \{(x^*, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; x^* \in \Omega_t \text{ und } a \leq t \leq b\}.$$

Wenn für jedes $t \in [a, b]$ das Volumen $\text{Vol}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\Omega_t)$ existiert und $t \mapsto \text{Vol}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\Omega_t)$ stetig ist, dann gilt

$$\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(\Omega) = \int_a^b \text{Vol}_{\mathbb{R}^{n-1}}(\Omega_t) dt.$$

Bemerkung 13.17.1 Dieses Prinzip von Cavalieri ist fast 400 Jahre älter als der Satz von Fubini!

Beweis. Man verwende Fubini-Tonelli für $f = 1$. ■

Beispiel 13.18 Das Volumen der Einheitskugel $K_3 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq 1\}$:

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{\mathbb{R}^3}(K_3) &= \int_{-1}^1 \text{Vol}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1 - z^2\}) dz = \\ &= \int_{-1}^1 \pi(1 - z^2) dz = \pi \left[z - \frac{1}{3}z^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Für das Volumen der Kugel $K = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| \leq r\}$ gilt

$$\text{Vol}_{\mathbb{R}^3}(K) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

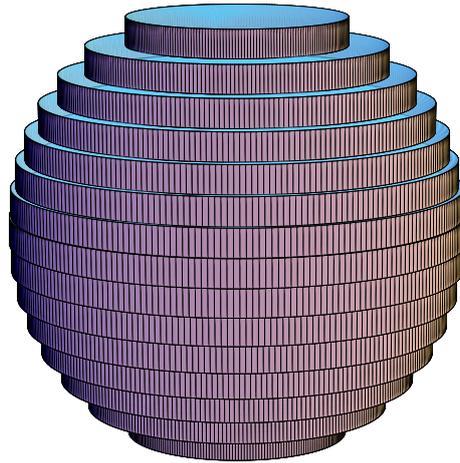


Abbildung 13.6: Cavalieri würde die Kugel in Scheiben schneiden und die Scheiben summieren um das Volumen zu berechnen.

Beispiel 13.19 Das Volumen der Einheitskugel $K_4 = \{x \in \mathbb{R}^4; \|x\| \leq 1\}$:

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}_{\mathbb{R}^4}(K_4) &= \int_{-1}^1 \text{Vol}_{\mathbb{R}^3}(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1 - t^2\}) dt = \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{4}{3}\pi (1 - t^2)^{3/2} dt \stackrel{t=\sin s}{=} \\
 &= \frac{4}{3}\pi \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\cos s)^3 \cos s ds = \\
 &= \frac{8}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} ((\cos s)^2 - (\cos s)^2 (\sin s)^2) ds = \\
 &= \frac{8}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} ((\cos s)^2 - \frac{1}{4}(\sin 2s)^2) ds = \\
 &= \frac{8}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi^2.
 \end{aligned}$$

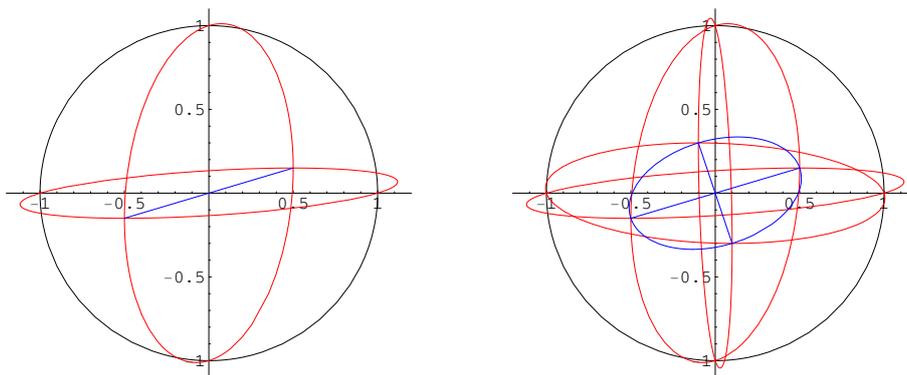


Abbildung 13.7: Projektionen von K_3 und K_4 in die Ebene.

13.4 Alternative Koordinatensysteme

Wir wollen hier nicht nur alternative Koordinatensysteme betrachten, sondern auch gleichzeitig Flächeninhalte und Volumeninhalte definieren, die diese neuen Koordinaten ver-

wenden. Wir haben kartesische Blöcke benutzt aber Flächeninhalte, die definiert werden durch Approximation mit anderen elementaren Gebieten, sollten das gleiche Ergebnis liefern. Dann muss da etwas bewiesen werden.

13.4.1 Polarkoordinaten

Definition 13.20 Sei P ein Punkt in der Ebene mit kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Wenn $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ derart sind, dass

$$x_1 = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad x_2 = r \sin \varphi$$

dann nennt man (r, φ) die Polarkoordinaten von P .

Bemerkung 13.20.1 Manchmal nimmt man auch $\varphi \in (-\pi, \pi]$ oder sogar \mathbb{R} .

Diese Definition gibt eine Abbildung $T : (r, \varphi) \mapsto (x_1, x_2)$. Der Umkehrsatz sagt, dass es lokal eine Inverse hat, wenn

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Man hat

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r.$$

Nichts neues, denn weil $T(0, \varphi) = (0, 0)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$, wußten wir schon, dass es bei $r = 0$ ein Problem gab.

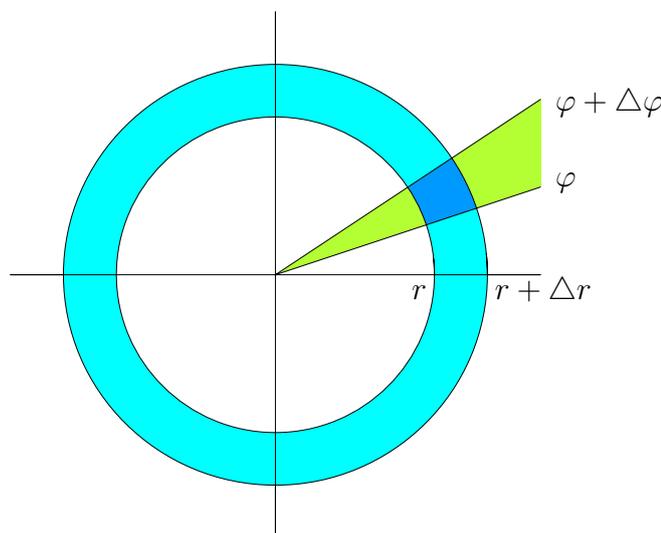


Abbildung 13.8: Polarkoordinaten und Flächenelement

Lemma 13.21 Das Gebiet in Polarkoordinaten $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi)$ definiert durch

$$E = \{(\tilde{r}, \tilde{\varphi}); r < \tilde{r} < r + \Delta r \text{ und } \varphi < \tilde{\varphi} < \varphi + \Delta \varphi\}, \quad (13.4)$$

mit $\Delta r > 0$ und $\Delta \varphi > 0$, hat den Flächeninhalt

$$\text{Vol}(E) = \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right) \Delta r \Delta \varphi. \quad (13.5)$$

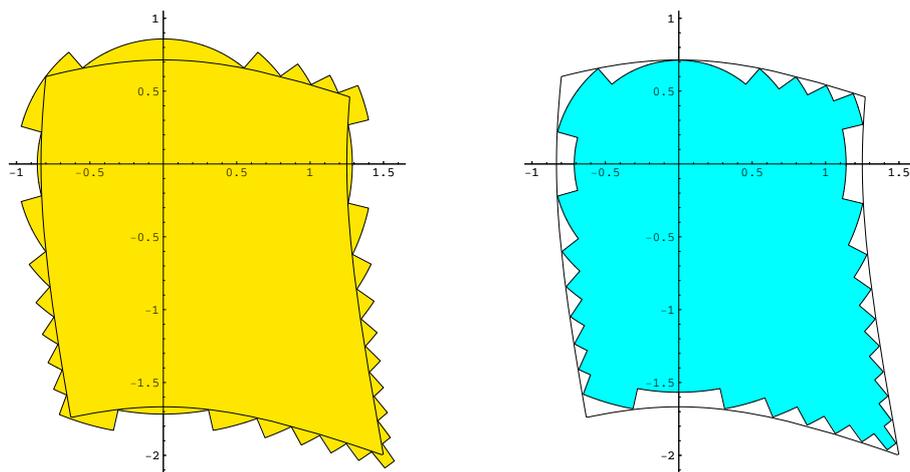


Abbildung 13.9: Ein Gebiet von Außen und Innen approximiert mit 'polarischen Rechtecken'

Beweis. Wenn wir davon ausgehen, dass eine Kreisscheibe mit Radius r als Flächeninhalt πr^2 und als Umfang $2\pi r$ hat, dann gilt

$$\text{Vol}(E) = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} (\pi(r + \Delta)^2 - \pi r^2)$$

und das liefert unsere Behauptung. Der Flächeninhalt vom Ring zwischen beiden Kreisen ist $\pi(r + \Delta)^2 - \pi r^2$ und $\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$ ist der Teil vom ganzen Ring, der betrachtet wird. ■

In Polarkoordinaten bekommt man Ober- und Untersummen in der Form

$$\sum_{\substack{B_{ij} \text{ 'polarische'} \\ \text{Rechtecken}}} f_{ij} \left(r_i + \frac{1}{2} \Delta r_i \right) \Delta r_i \Delta \varphi_j.$$

Verfeinerung, also $\Delta r_i \rightarrow 0$ und $\Delta \varphi_j \rightarrow 0$, wird führen zu

$$\int_{\Omega} f(x, y) d(x, y) = \int_{\tilde{\Omega}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi).$$

Hier vertreten Ω und $\tilde{\Omega}$ das gleiche Gebiet, nämlich einmal beschrieben in kartesische und einmal in Polarkoordinaten. Wir werden dies noch genauer betrachten.

13.4.2 Zylinderkoordinaten

Definition 13.22 Sei P ein Punkt im Raum mit kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Wenn $r \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$ derart sind, dass

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \varphi \quad \text{und} \quad x_3 = z,$$

dann nennt man (r, φ, z) die Zylinderkoordinaten von P .

Lemma 13.23 Das Gebiet in Zylinderkoordinaten $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ beschrieben durch

$$E = \{(\tilde{r}, \tilde{\varphi}, \tilde{z}); r < \tilde{r} < r + \Delta r, \quad \varphi < \tilde{\varphi} < \varphi + \Delta \varphi \text{ und } z < \tilde{z} < z + \Delta z\}, \quad (13.6)$$

hat den Volumeninhalt

$$\text{Vol}(E) = (r + \frac{1}{2} \Delta r) \Delta r \Delta \varphi \Delta z. \quad (13.7)$$

Beweis. Wenn man (13.4) mit endlich vielen Blöcken B_i von Innen und von Außen approximieren kann, dann kann man (13.6) mit $B_i \times [r, r + \Delta r]$ approximieren. ■

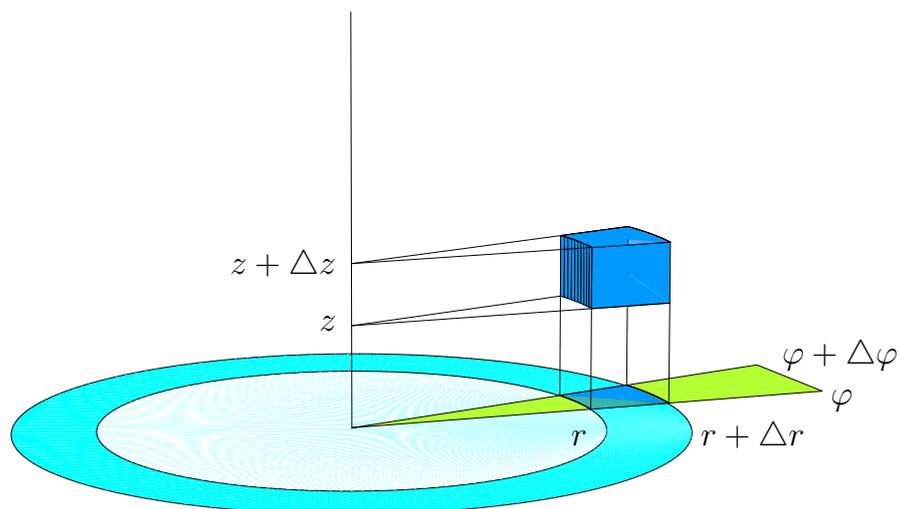


Abbildung 13.10: Zylinderkoordinaten und Volumenelement

13.4.3 Kugelkoordinaten

Definition 13.24 Sei P ein Punkt im Raum mit kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Wenn $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$ derart sind, dass

$$x_1 = r \cos \varphi \sin \theta, \quad x_2 = r \sin \varphi \sin \theta \quad \text{und} \quad x_3 = r \cos \theta,$$

dann nennt man (r, φ, θ) die Kugelkoordinaten von P .

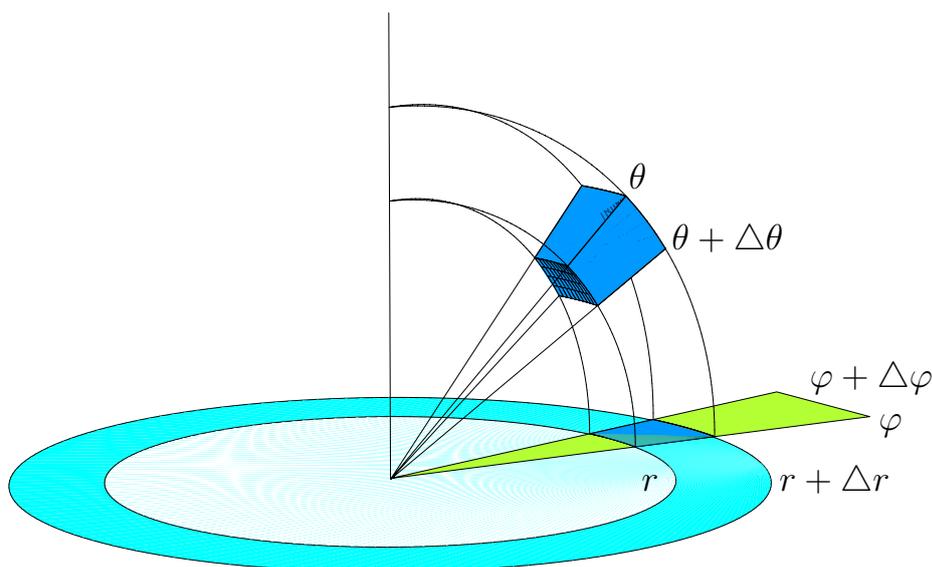


Abbildung 13.11: Kugelkoordinaten und Volumenelement

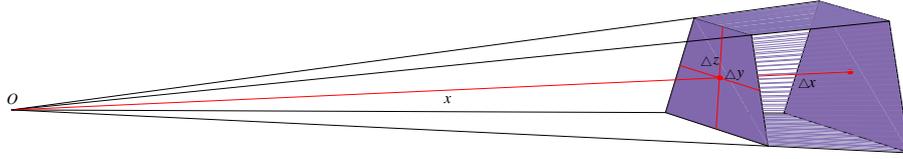
Lemma 13.25 Das Gebiet in Kugelkoordinaten $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$ beschrieben durch

$$E = \left\{ (\tilde{r}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}); r < \tilde{r} < r + \Delta r, \quad \varphi < \tilde{\varphi} < \varphi + \Delta \varphi \quad \text{und} \quad \theta < \tilde{\theta} < \theta + \Delta \theta \right\}, \quad (13.8)$$

hat den Volumeninhalt

$$\text{Vol}(E) = \left(r^2 + r\Delta r + \frac{1}{3}(\Delta r)^2 \right) \Delta r \Delta \varphi (\cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta)). \quad (13.9)$$

Beweis. Man kann dieses Lemma mit elementaren Mitteln beweisen. Der erste Schritt ist, dass man die folgende Figur in Blöcke, halbe Blöcke und sechstel Blöcke zerschneiden kann.



Man kann so die Definition des Volumens elementarer Blöcke verwenden und findet in endlich vielen Schritten, dass für dieses Gebiet \tilde{E} mit 'flachen Wänden' gilt

$$\text{Vol}(\tilde{E}) = \left(1 + \frac{\Delta x}{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2\right) \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (13.10)$$

Die Variablen x , Δx , Δy und Δz sind die Längen der mit rot dargestellten Geraden. Wenn man Abbildung 13.11 vergleicht mit \tilde{E} , dann hofft man, wie folgt zu approximieren:

$$x = r, \quad \Delta x = \Delta r, \quad \Delta y = r \Delta \varphi \sin \theta \quad \text{und} \quad \Delta z = r \Delta \theta. \quad (13.11)$$

Diese Approximation passt aber nur, wenn $\Delta \varphi, \Delta \theta \downarrow 0$. Dann hätte man

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &\approx \left(1 + \frac{\Delta r}{r} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2\right) \Delta r r \Delta \varphi \sin \theta r \Delta \theta = \\ &= \left(r^2 + r \Delta r + \frac{1}{3} (\Delta r)^2\right) \Delta r \Delta \varphi \sin \theta \Delta \theta. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Im zweiten Schritt verteilen wir $\Delta \varphi, \Delta \theta$ beide in m und ℓ gleichgroße Stücke: $\Delta_\ell \varphi = \frac{1}{\ell} \Delta \varphi$ und $\Delta_m \theta = \frac{1}{m} \Delta \theta$. Setzen wir $g(r, \Delta r) = \left(r^2 + r \Delta r + \frac{1}{3} (\Delta r)^2\right) \Delta r$. Für jedes $\varepsilon > 0$ können wir das elementare Gebiet in Abbildung 13.11 mit $\ell \times m$ Figuren derart von Innen und von Außen approximieren, dass

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &\leq g(r - \varepsilon, \Delta r + \varepsilon) \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \Delta_\ell \varphi \sin(\theta + k \Delta_m \theta) \Delta_m \theta, \\ \text{Vol}(E) &\geq g(r + \varepsilon, \Delta r - \varepsilon) \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \Delta_\ell \varphi \sin(\theta + k \Delta_m \theta) \Delta_m \theta. \end{aligned}$$

Man hat

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \Delta_\ell \varphi \sin(\theta + k \Delta_m \theta) \Delta_m \theta = \Delta \varphi \sum_{k=0}^{m-1} \sin(\theta + k \Delta_m \theta) \Delta_m \theta.$$

Wir lassen $m \rightarrow \infty$ gehen und finden, wie wir eindimensionale Integrale definiert haben, dass gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sin(\theta + k \Delta_m \theta) \Delta_m \theta = \int_{\theta}^{\theta + \Delta \theta} \sin s \, ds = \cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta).$$

Fassen wir zusammen. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &\leq g(r - \varepsilon, \Delta r + \varepsilon) (\cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta)) \Delta \theta \Delta \varphi, \\ \text{Vol}(E) &\geq g(r + \varepsilon, \Delta r - \varepsilon) (\cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta)) \Delta \theta \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Es bleibt nur noch zu bemerken, dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(r - \varepsilon, \Delta r + \varepsilon) = g(r, \Delta r)$. ■

Weil

$$\lim_{(\Delta r, \Delta \varphi, \Delta \theta) \rightarrow 0} \frac{(r^2 + r\Delta r + \frac{1}{3}(\Delta r)^2) \Delta r \Delta \varphi (\cos \theta - \cos(\theta + \Delta \theta))}{\Delta r \Delta \varphi \Delta \theta} = r^2 \sin \theta$$

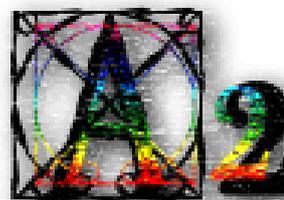
werden Approximationen durch Ober- und Untersummen mit Kugelelementen führen zu

$$\int_{\Omega} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z) = \int_{\tilde{\Omega}} f \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} r^2 \sin \theta d(r, \varphi, \theta). \quad (13.13)$$

Hier vertreten Ω und $\tilde{\Omega}$ das gleiche Gebiet, einmal beschrieben in kartesischen und einmal in Kugelkoordinaten.

Analysis 2, Woche 14

Integrale in mehreren Dimensionen II



14.1 Volumenabschätzungen

Wir haben drei verschiedene Möglichkeiten gesehen, wie man mit alternativen Koordinatensystemen alternative Möglichkeiten für eine Integraldefinition bekommt. Mit viel Mühe ist gezeigt worden, dass die Ergebnisse nicht abhängig sind (jedenfalls für Integrale von netten Funktionen auf netten Gebieten). Bevor wir einen allgemeinen Transformationssatz beweisen können, sind einige Probleme zu bewältigen.

Das erste Problem, das sich meldet, ist, dass die Transformation von einem konvexen Gebiet nicht länger konvex sein muss. Das heißt, zunächst ist nicht klar, ob man noch von Volumen reden kann. Nur bei konvexen Gebieten haben wir gesehen, dass die Blöcke, die für den Rand verwendet werden, zusammen ein Volumen haben, das man willkürlich klein machen kann indem man es verfeinert.

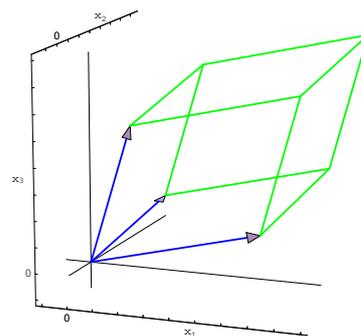
Eine der Komponenten des Beweises ist folgendes Lemma, das man aus der linearen Algebra kennen sollte.

Lemma 14.1 Seien $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}^n$ und definiere das Parallelepiped

$$P = \{\theta_1\varphi_1 + \theta_2\varphi_2 + \dots + \theta_n\varphi_n; 0 \leq \theta_i \leq 1\}.$$

Dann gilt

$$\text{Vol}(P) = |\det(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)|.$$



Beweis. Für zwei Dimensionen verweisen wir auf Lemma 1.16. In höheren Dimensionen kann man sich auf ähnliche Art überzeugen, dass

$$P = \{\theta_1\varphi_1 + \theta_2\varphi_2 + \theta_3\varphi_3 + \dots + \theta_n\varphi_n; 0 \leq \theta_i \leq 1\}$$

und

$$\tilde{P} = \{\theta_1\varphi_1 + \theta_2(\varphi_2 - c\varphi_1) + \theta_3\varphi_3 + \dots + \theta_n\varphi_n; 0 \leq \theta_i \leq 1\}$$

das gleiche Volumen haben. In endlich vielen Schritten kann man so P zurückführen auf einen Block B mit gleichem Volumen:

$$B = \{\theta_1c_1e_1 + \theta_2c_2e_2 + \dots + \theta_nc_n e_n; 0 \leq \theta_i \leq 1\},$$

wo $\{e_i\}_{i=1}^n$ die Standardbasis auf \mathbb{R}^n ist. Parallel dazu verwendet man die Eigenschaften der Determinanten wie

$$\begin{aligned}\det(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) &= \det(\varphi_1, \varphi_2 - c\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_n), \\ \det(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_n) &= -\det(\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n),\end{aligned}$$

um zu finden, dass

$$\text{Vol}(P) = \text{Vol}(\tilde{P}) \quad \text{und} \quad |\det(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)| = |\det(\varphi_1, \varphi_2 - c\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_n)|.$$

Nach endlich vielen Schritte findet man

$$\begin{aligned}\text{Vol}(P) &= \dots = \text{Vol}(B) = \prod_{i=1}^n |c_i| \\ &\parallel \\ |\det(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)| &= \dots = |\det(c_1 e_1, \dots, c_n e_n)|\end{aligned}$$

und so das Ergebnis. ■

Korollar 14.2 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $A \in M^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Definiere $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $T(x) = Ax + b$.

Sei $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wenn einer der beiden folgenden Integrale existiert, dann existieren beide und es gilt

$$\int_D f(x) dx = |\det(A)| \int_{T^{\text{inv}}(D)} f(Ty) dy. \quad (14.1)$$

Beweis. Benennen wir die Spalten von A durch $\varphi_1, \dots, \varphi_n$:

$$A = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

und verwenden wir für das rechte Integral Parallelepipeden als Volumenelemente, dann sind wegen Lemma 14.1 beide Seiten von (14.1) identisch. Das heißt, zu jeder Obersumme mit Blöcken links finden wir eine Obersumme mit Parallelepipeden für die rechte Seite. Ähnliches gilt für Untersummen. Es bleibt übrig, Obersummen mit Parallelepipeden durch Obersummen mit Rechtecken abzuschätzen. ■

Lemma 14.3 (Sard's Lemma) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Block und $g: \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\text{Vol}_a(g(B)) \leq \int_B |\det(\nabla g(x))| dx.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $\text{Vol}_a(g(B)) > \int_B |\det(\nabla g(x))| dx$ und setzen

$$\varepsilon = \frac{\text{Vol}_a(g(B)) - \int_B |\det(\nabla g(x))| dx}{\text{Vol}(B)}.$$

Wir werden einen Widerspruch erzielen, indem wir wiederholt B in 2^n kongruente Teilblöcke verteilen.

Erster Schritt Es gibt eine Folge von Blöcken $\{B_k\}_{k=0}^\infty$ mit $B = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$ und $\text{Vol}(B_k) = 2^{-nk} \text{Vol}(B_0)$ und

$$\frac{\text{Vol}_a(g(B_k)) - \int_{B_k} |\det(\nabla g(x))| dx}{\text{Vol}(B_k)} \geq \varepsilon. \quad (14.2)$$

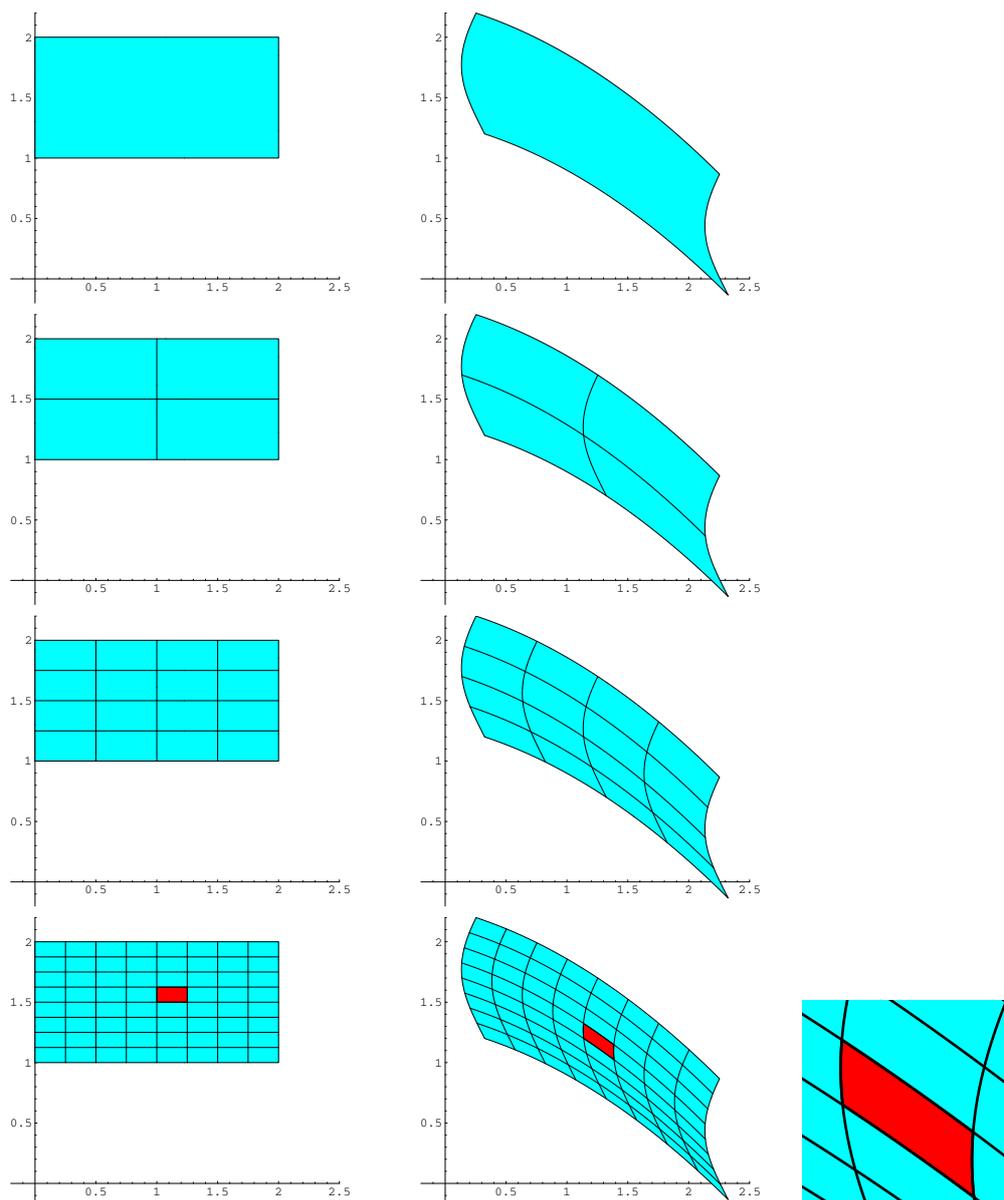


Abbildung 14.1: Im Beweis von Sard's Lemma wird Block B verteilt bis man auf ein Teilblock der Unterschied zu einer linearen Transformation vernachlässigen kann.

Angenommen (14.2) gilt für k (für $k = 0$ haben wir es angenommen). In der Menge der 2^n Teilblöcke von B_k gibt es mindestens einen B_T derart, dass

$$\frac{\text{Vol}_a(g(B_T)) - \int_{B_T} |\det(\nabla g(x))| dx}{\text{Vol}(B_T)} \geq \varepsilon, \quad (14.3)$$

denn wenn nicht, dann würde aus

$$\text{Vol}_a(g(B_k)) \leq \sum_{2^n \text{ Teilblöcke}} \text{Vol}_a(g(\text{Teilblock}_i))$$

und

$$\int_B |\det(\nabla g(x))| dx = \sum_{2^n \text{ Teilblöcke}} \int_{\text{Teilblock}_i} |\det(\nabla g(x))| dx$$

folgen, dass $\#(14.2) < \varepsilon$ gelten würde, ein Widerspruch.

Zweiter Schritt Es gibt ein $x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k$ und $k_{1,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ derart, dass für $k \geq k_{1,\varepsilon}$ gilt

$$\int_{B_k} |\det(\nabla g(x))| dx \leq \int_{B_k} |\det(\nabla g(x^*))| dx + \frac{1}{3}\varepsilon \text{Vol}(B_k). \quad (14.4)$$

Wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R}^n gibt es $x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k$. Weil g stetig differenzierbar ist, gibt es $k_{1,\varepsilon}$ derart, dass

$$|\det(\nabla g(x)) - \det(\nabla g(x^*))| \leq \frac{1}{3}\varepsilon,$$

und (14.4) folgt.

Dritter Schritt Es gibt $k_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\frac{\text{Vol}_a(g(B_k))}{\text{Vol}(B_k)} - |\det(\nabla g(x^*))| \leq \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Die Funktion g ist stetig differenzierbar. Es folgt für $x \in \bar{B}_k$, dass

$$g(x) = g(x^*) + \nabla g(x^*)(x - x^*) + R(x, x^*)$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{\|R(x^*, x)\|}{\|x - x^*\|} = 0. \quad (14.5)$$

Das heißt, für jedes $\delta > 0$ gibt es $k_{2,\delta}$ derart, dass $\|R(x^*, x)\| \leq 2^{-k}\delta$ für alle $x \in \bar{B}_k$. Sei $\bar{B}_k = [a_1^k, b_1^k] \times \cdots \times [a_n^k, b_n^k]$. Weil auch gilt

$$g(a^k) = g(x^*) + \nabla g(x^*)(a^k - x^*) + R(a^k, x^*),$$

findet man für $x \in \bar{B}_k$, dass

$$g(x) = g(a^k) + \nabla g(x^*)(x - a^k) + R(x, x^*) - R(a^k, x^*).$$

Wir setzen

$$S = 2^k \nabla g(x^*)(\bar{B}_k - a^k) = \nabla g(x^*)(\bar{B}_0 - a^0)$$

und es folgt für $F(\bar{B}_k)$ mit $F(x) = 2^k(g(x) - g(a^k))$ gilt, dass

$$F(\bar{B}_k) \subset S + B_{c\delta}(0) \text{ für } k > k_\delta$$

mit $c = 2 \text{diam}(\bar{B}_0)$. Wir können δ so klein wählen, dass

$$\text{Vol}(S + B_{c\delta}(0)) \leq \text{Vol}(S) + \frac{\text{Vol}(B_0)}{3}\varepsilon$$

und wir finden, dass

$$\frac{\text{Vol}_a(f(B_k))}{\text{Vol}(B_k)} = \frac{\text{Vol}_a(F(B_k))}{\text{Vol}(B_0)} \leq \frac{\text{Vol}(S)}{\text{Vol}(B_0)} + \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Wegen Korollar 14.2 gilt

$$\text{vol}(S) = \int_{B_0} |\det(\nabla g(x^*))| dx = \text{Vol}(B_0) |\det(\nabla g(x^*))|.$$

Für den letzten Schritt soll man bemerken, dass die Kombination von den Teilergebnissen einen Widerspruch geben für $k > \max(k_{1,\varepsilon}, k_{2,\varepsilon})$. ■

Korollar 14.4 Sei B ein Block in \mathbb{R}^n , $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $G : \bar{B} \rightarrow K$ stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Inverse. Dann gilt

$$\begin{aligned}\text{Vol}_a(K) &\leq \max_{x \in \bar{B}} |\det(\nabla G(x))| \text{Vol}(B), \\ \text{Vol}_{in}(K) &\geq \min_{x \in \bar{B}} |\det(\nabla G(x))| \text{Vol}(B).\end{aligned}$$

Beweis. Aus Sard's Lemma folgt

$$\text{Vol}_a(K) \leq \int_B |\det(\nabla G(x))| dx \leq \max_{x \in \bar{B}} |\det(\nabla G(x))| \text{Vol}(B).$$

Weil G ein Diffeomorphismus ist, existiert $F = G^{-1}$ und $\nabla F(x) = (\nabla G \circ F(x))^{-1}$. Für jeden Block $B^* \subset K$ gilt ebenso

$$\begin{aligned}\text{Vol}_a(F(B^*)) &\leq \max_{x \in \bar{B}^*} |\det(\nabla F(x))| \text{Vol}(B^*) = \\ &= \max_{x \in \bar{B}^*} (|\det(\nabla G \circ F(x))|^{-1}) \text{Vol}(B^*) = \\ &= \left(\min_{x \in \bar{B}^*} |\det(\nabla G \circ F(x))| \right)^{-1} \text{Vol}(B^*).\end{aligned}\tag{14.6}$$

Wir haben verwendet, dass für invertierbare Matrizes gilt

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Aus (14.6) folgt

$$\text{Vol}(B^*) \geq \min_{x \in K} |\det(\nabla G(x))| \text{Vol}_a(F(B^*))$$

und approximiert man K von innen mit disjunkten Blöcken, folgt

$$\text{Vol}_{in}(K) \geq \min_{x \in K} |\det(\nabla G(x))| \text{Vol}(B).$$

■

14.2 Transformationssatz

Satz 14.5 (Transformationssatz) Seien $D, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete, die beide ein Volumen haben. Sei $G : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{D}$ stetig differenzierbar und mit stetig differenzierbarer Inverse und sei $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_D f(x) dx = \int_{\Omega} (f \circ G)(y) \left| \det(\nabla G(y)) \right| dy.$$

Bemerkung 14.5.1 Den Extrafaktor $\left| \det(\nabla G(y)) \right|$ nennt man **Jacobi-Determinante**. Die Matrix $\nabla G(y)$ heißt **Jacobi-Matrix**.

Bemerkung 14.5.2 Dieser Satz ist gültig unter schwächeren Bedingungen. Wir verlangen zum Beispiel, dass G ein Diffeomorphismus ist. Für eine Transformation mit Polar oder Kugelkoordinaten ist das bei 0 zuviel verlangt. Man kann zeigen, dass einzelne singuläre Stellen am Rande des Gebietes keine Probleme verursachen.

Bemerkung 14.5.3 Sei $g : I = [a, b] \rightarrow J$ ein Diffeomorphismus. In einer Dimension haben wir die Substitutionsregel:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ g)(y) g'(y) dy.$$

Aus Satz 14.5 folgt, dass

$$\int_J f(x) dx = \int_I (f \circ g)(y) |g'(y)| dy.$$

Wieso gibt dieser zusätzliche Betrag keinen Widerspruch?

Beweis. Sei $F = G^{inv}$ und setze

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \bar{D}} |f(x)|, \quad M_\Omega = \text{Vol}(\Omega) + 1, \quad M_D = \text{Vol}(D) + 1,$$

$$M_G = \max_{x \in \Omega} |\det(\nabla G(y))| \quad \text{und} \quad M_F = \max_{x \in \bar{D}} |\det(\nabla F(y))|.$$

Wir nehmen an, dass $f \geq 0$. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\{B_i\}_{i=1}^\ell$ eine innere und $\{B_i^*\}_{i=1}^m$ eine derartige äußere Familie von Blöcken zu Ω , dass

$$\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^\ell B_i^*\right) - \text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^\ell B_i\right) < \frac{1}{4\|f\|_\infty M_G} \varepsilon.$$

Wir können diese Blöcke in gemeinsame kleinere Teilblöcke $\{A_i\}_{i=1}^{m_a}$ derartig zerlegen, dass die ersten ℓ_a die innere Familie bildet und so, dass

$$\max_{y \in \bar{A}} |\det(\nabla G(y))| - \min_{y \in \bar{A}} |\det(\nabla G(y))| < \frac{1}{4\text{Vol}(\Omega)\|f\|_\infty + 1} \varepsilon,$$

$$\max_{x \in F(\bar{A})} |f(x)| - \min_{x \in F(\bar{A})} |f(x)| < \frac{1}{4\text{Vol}(\Omega)M_G + 1} \varepsilon,$$

für jeden Teilblock A . Es folgt mit Korollar 14.4, dass

$$\begin{aligned} \int_D f(x) dx &\leq \sum_{i=1}^{m_a} \left(\max_{F(A_i) \cap \bar{D}} f \right) \int_{F(A_i)} dx = \\ &= \sum_{i=1}^{m_a} \left(\max_{F(A_i) \cap \bar{D}} f \right) \text{Vol}(F(A_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{m_a} \left(\max_{F(A_i) \cap \bar{D}} f \right) \max_{A_i} |\det(\nabla G)| \text{Vol}(A_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell_a} \left(\min_{F(A_i) \cap \bar{D}} f \right) \min_{A_i} |\det(\nabla G)| \text{Vol}(A_i) + \varepsilon \leq \\ &\leq \int_\Omega (f \circ G)(y) \left| \det(\nabla G(y)) \right| dy + \varepsilon. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Art können wir zeigen, dass

$$\int_D f(x) dx \geq \int_\Omega (f \circ G)(y) \left| \det(\nabla G(y)) \right| dy - \varepsilon.$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt das Ergebnis. ■

Beispiel 14.6 *Welches Volumen hat*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq xy \leq 4 \text{ und } x \leq 2y \leq 4x\}.$$

Die Transformation, die D überführt in etwas nettes, ist

$$F : D \rightarrow [1, 4] \times [\frac{1}{2}, 2] \text{ mit } F(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right).$$

Setzen wir $u = xy$ und $v = y/x$, dann löst man durch $uv = y^2$ und $u/v = x^2$. Weil $x, y > 0$ folgt für $G = F^{inv}$, dass

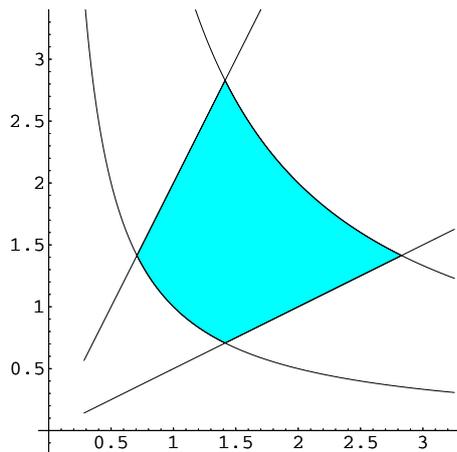
$$G(u, v) = \left(\sqrt{u/v}, \sqrt{uv}\right).$$

Dann findet man

$$\det \nabla G(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}v^{-1},$$

und

$$\text{Vol}(D) = \int_D 1 \, d(x, y) = \int_{F(D)} \frac{1}{2}v^{-1} \, d(u, v) = \int_{u=1}^4 \int_{v=\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2}v^{-1} \, dv \, du = \ln 8.$$



Übrigens hätten man sich einige Arbeit sparen können, wenn man bemerkt, dass

$$\begin{aligned} \det \nabla G(u, v) &= (\det \nabla F(x, y))_{(x,y)=G(u,v)}^{-1} = \left(\det \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix}_{(x,y)=G(u,v)} \right)^{-1} = \\ &= \left(\left(\frac{2y}{x} \right)_{(x,y)=G(u,v)} \right)^{-1} = (2v)^{-1} = \frac{1}{2v}. \end{aligned}$$

Beispiel 14.7 *Wie schon gesagt, so wie er formuliert ist, kann man Satz 14.5 formell nicht verwenden für Polarkoordinaten, es sei denn man bleibt weg von $(-\infty, 0] \times \{0\}$. Definiere $G : (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ durch*

$$G(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Dann gilt

$$\det (\nabla G(r, \varphi)) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r.$$

Das heißt für $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus (-\infty, 0] \times \{0\}$, dass

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_{G^{-1}(D)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi).$$

Diesen Faktor hatten wir schon gefunden in (13.5).

Beispiel 14.8 Für Kugelkoordinaten

$$x_1 = r \cos \varphi \sin \theta, \quad x_2 = r \sin \varphi \sin \theta \quad \text{und} \quad x_3 = r \cos \theta,$$

betrachte man die Abbildung

$$G(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

und findet

$$\begin{aligned} \det(\nabla G(r, \varphi, \theta)) &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= r^2 \sin \theta \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{pmatrix} = -r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Der Faktor $|\det(\nabla G(r, \varphi, \theta))| = r^2 \sin \theta$ haben wir auch schon in (13.13) gesehen. Man bemerke übrigens, dass für Kugelkoordinaten $\theta \in [0, \pi]$ liegt und $\sin \theta \geq 0$ für diese θ gilt.

Beispiel 14.9 Das Volumen einer Kugel mit Radius R in \mathbb{R}^3 wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \int_{x \in B_R(0)} 1 dx &= \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \\ &= \left(\int_{r=0}^R r^2 dr \right) \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \right) \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi \right) = \\ &= \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^R \left[-\cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi} \left[\varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Korollar 14.10 Sei Ω das Gebiet in kartesischen Koordinaten und sei $\tilde{\Omega}$ das gleiche Gebiet in den alternativen Koordinaten.

- Für Polarkoordinaten $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ hat man

$$\int_{\Omega} f(x, y) d(x, y) = \int_{\tilde{\Omega}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi).$$

- Für Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ hat man

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\tilde{\Omega}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d(r, \varphi, z).$$

- Für Kugelkoordinaten $(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$ hat man

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{\tilde{\Omega}} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d(r, \varphi, \theta).$$

Literaturverzeichnis

- [1] Amann, Herbert; Escher, Joachim. Analysis 1, 2. Birkhäuser.
- [2] Bröcker, Theodor. Analysis 2. Bibliographisches Institut.
- [3] Forster, Otto. Analysis 2 Differentialrechnung im \mathbb{R}^n , gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg Studium.
- [4] Königsberger, Konrad. Analysis 2. Springer-Lehrbuch.
- [5] Spivak, Michael. Calculus. Publish or Perish Inc/Cambridge University Press.
- [6] Walter, Wolfgang. Analysis 2. Springer-Lehrbuch.