Funktionentheorie, Woche 6

Analytische Funktionen

6.1 Holomorphe Funktionen und Potenzreihen

Definition 6.1 *Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nennt man* ***analytisch*** *in $z_0 \in U$, wenn es $r > 0$ gibt mit $B_r(z_0) \subset U$ derart, dass eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius größer oder gleich r existiert und*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \text{ für } z \in B_r(z_0).$$

Wir haben schon bewiesen, dass Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius komplex differenzierbar, also holomorph, sind.

Satz 6.2 *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in U$ und sei $B_r(z_0) \subset U$. Dann gilt für die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n, \tag{6.1}$$

dass sie Konvergenzradius $R \geq r$ hat und dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n \text{ für alle } z \in B_r(z_0).$$

Bemerkung 6.2.1 *Man bemerke, dass in (6.1) genau die Taylorreihe zu f steht. In $\mathbb{R}$ hat man das einigermaßen unbefriedigende Ergebnis, dass die Taylorreihe existieren kann aber nicht unbedingt zu der Funktion konvergiert. Man erinnere sich an die beliebig oft differenzierbare Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\left(x^{-2}\right)} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

die in 0 die triviale Potenzreihe als Taylorreihe hat.

Für eine Funktion, die holomorph ist in z_0, gibt es wegen der Definition eine Umgebung $B_r(z_0)$ in der sie holomorph ist und der Satz sagt aus, dass diese Funktion als die Potenzreihe (6.1) zu schreiben ist. Anders gesagt, die Taylorreihe konvergiert zu der Funktion. Noch anders gesagt, wenn eine Funktion holomorph ist, ist sie analytisch.

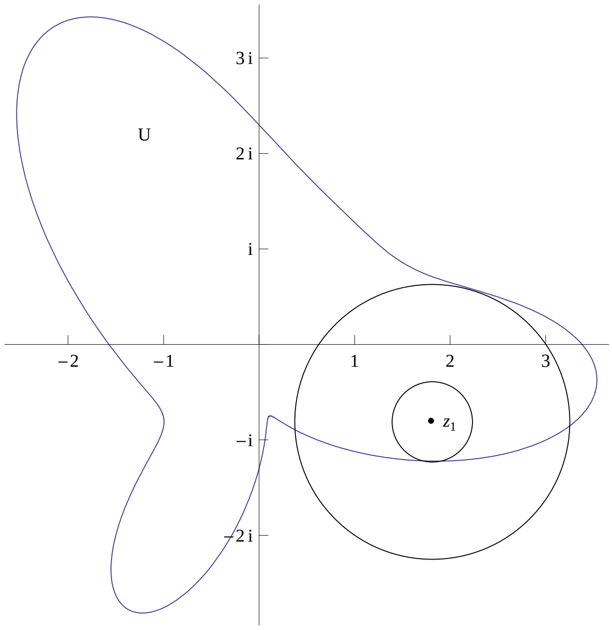

Abbildung 6.1: *Sei f holomorph auf U. Satz 6.2 besagt, dass im kleinen Kreis $B_r(z_1)$ um z_1 die Funktion als Potenzreihe p zu schreiben ist. Wenn diese Potenzreihe einen größeren Konvergenzradius R hat, dann hat man eine holomorphe Funktion auf $B_R(z_1)$, die auf $B_r(z_1)$ gleich f ist. Wenn sie auf $U \cap B_R(z_1)$ übereinstimmen, hat man eine holomorphe Fortsetzung von f auf $U \cup B_R(z_1)$ gefunden. Man soll sich also noch überlegen, wieso die Potenzreihe und f auf $U \cap (B_R(z_1) \backslash B_r(z_1))$ übereinstimmen.*

Beweis. Aus der Integralformel von Cauchy folgt, dass für jede $\rho < r$ und $z \in B_\rho(z_0)$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z_0+\rho e^{it} \\ t\in[0,2\pi]}} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Verwenden wir, dass für $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$ gilt

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n,$$

bekommen wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z_0+\rho e^{it} \\ t\in[0,2\pi]}} \left(\frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \right) dw.$$

Für festes $z \in B_\rho(z_0)$ gilt $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| \le \frac{|z-z_0|}{\rho} < 1$ und die Reihe konvergiert gleichmäßig. Wir dürfen beide Grenzprozesse vertauschen und es folgt, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z_0+\rho e^{it} \\ t\in[0,2\pi]}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n$$

Für die Potenzreihe zu f hat man

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{z_0+\rho e^{it} \\ t\in[0,2\pi]}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Diese letzte Identität folgt aus (5.3).

Weil diese Reihe konvergiert für alle z mit $|z - z_0| < \rho$, ist der Konvergenzradius größer oder gleich ρ. Weil $\rho < r$ beliebig ist, ist der Konvergenzradius größer oder gleich r. ■

Ein Zwischenergebnis wollen wir noch festhalten:

Lemma 6.3 *Sei $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und sei $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Definiere die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Dann gilt*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Beispiel 6.4 *Betrachte die Potenzreihe zu $\operatorname{Log}(z)$ um $z_0 = 1 + i$. Man findet*

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \operatorname{Log}(z) = (-1)^{n-1} (n-1)! z^{-n} \text{ für } n \geq 1. \tag{6.2}$$

Dann folgt für $|z - 1 - i| < R$, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(z) &= \operatorname{Log}(1+i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+i)^n} (z-1-i)^n = \\ &= \tfrac{1}{2} \ln 2 + \tfrac{1}{4}\pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^n (z-1-i)^n. \end{aligned}$$

Für den Konvergenzradius gilt $R = \left|\tfrac{1}{2}\sqrt{2} e^{\frac{3}{4}\pi i}\right|^{-1} = \sqrt{2}$. Das passt zu der bekannten Singularität vom Logarithmus in 0.

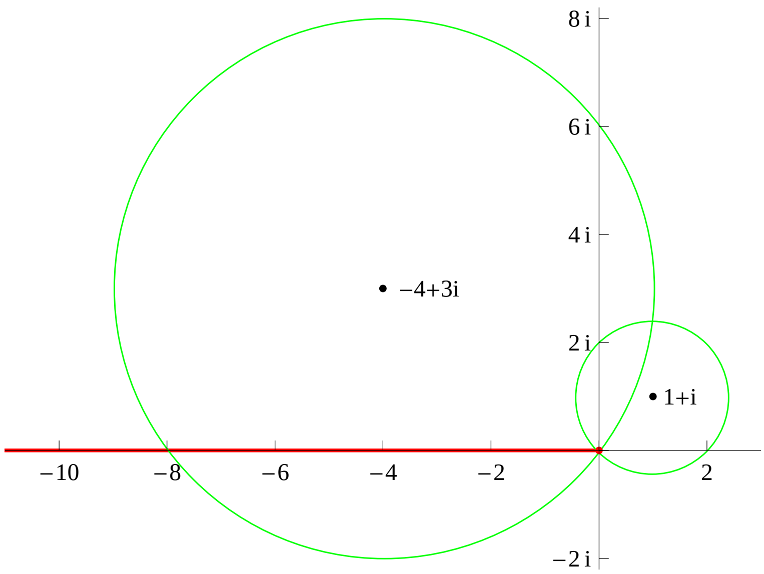

Abbildung 6.2: *Definitionsgebiete von Log und von den zwei zugehörigen Potenzreihen aus Beispiel 6.4 und 6.5.*

Beispiel 6.5 *Betrachte die Potenzreihe zu* $\mathrm{Log}\,(z)$ *um* $z_0 = -4+3i$. *Die Ableitungen sind wie in (6.2) und es folgt für* $|z-(-4+3i)| < R$ *mit* $\mathrm{Im}\, z > 0$, *dass*

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\,(z) &= \mathrm{Log}\,(-4+3i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(-4+3i)^n} (z-(-4+3i))^n = \\ &= \ln 5 + \left(\pi - \arctan \tfrac{3}{4}\right) i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\tfrac{1}{5} e^{i \arctan \frac{3}{4}}\right)^n (z-(-4+3i)) .\end{aligned}$$

Für den Konvergenzradius gilt $R = \left|\frac{1}{5} e^{i \arctan(3/4)}\right|^{-1} = 5$. *Das scheint nicht zu passen zur Unstetigkeit vom Logarithmus auf* $(-\infty, 0]$, *oder? Man erinnere sich aber, dass* 0 *die eigentliche Singularität vom Logarithmus ist und dass man für eine passende Definition, die* $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *holomorph erweitert, einen Sprung haben soll auf irgendeiner Kurve, die* 0 *mit "*$\infty_{\mathbb{C}}$*" verbindet. Man findet für* $|z-(-4+3i)| < 5$ *dass*

$$\mathrm{Log}\,(-iz) + \tfrac{1}{2}\pi i = \mathrm{Log}\,(-4+3i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,(-4+3i)^n} (z-(-4+3i))^n .$$

Für $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Arg}\,(z) \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$ *gilt* $\mathrm{Log}\,(-iz) + \frac{1}{2}\pi i = \mathrm{Log}\,(z)$.

Wie wir soeben beim Logarithmus gesehen haben, kann der Konvergenzradius größer sein als a-priori vom Definitionsgebiet zugelassen wird. Auf diese Weise läßt sich oft eine holomorphe Funktion erweitern zu einer holomorphen Funktion mit größerem Definitionsgebiet.

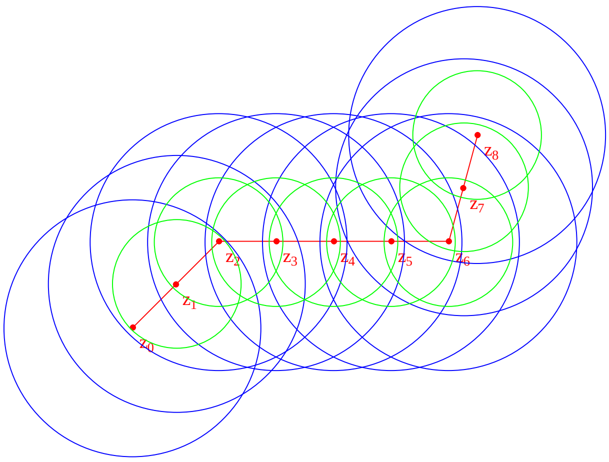

Abbildung 6.3: *Skizze zu Satz 6.6.*

Satz 6.6 (zur eindeutigen Fortsetzung) *Seien* $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ *Gebiete und* $f_i : U_i \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorphe Funktionen. Sei* $z_0 \in U_1 \cap U_2$ *und nehme an, es gibt* $r > 0$ *mit*

$$f_1(z) = f_2(z) \text{ für } z \in B_r(z_0).$$

Dann gilt für jedes Gebiet $A \subset U_1 \cap U_2$ *mit* $z_0 \in A$:

$$f_1(z) = f_2(z) \text{ für } z \in A.$$

Bemerkung 6.6.1 *Ein Gebiet in* $\mathbb{C}$ *ist eine offene zusammenhängende Menge.*

Beweis. Sei $z_* \in A$. Weil A offen und zusammenhängend ist, gibt es einen Polygonzug ℓ, die z_0 mit z_* innerhalb von A verbindet. Sei d die Distanz von ℓ zu A^c.

Man kann endlich viele Kreisscheiben $\{B_d(z_i)\}_{i=1}^n$ wählen derart, dass $z_i \in \ell$, $z_n = z$ und $|z_i - z_{i-1}| \leq \frac{1}{2}d$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Weil $f_1 = f_2$ auf $B_d(z_0)$ und $B_{\frac{1}{2}d}(z_1) \subset B_d(z_0)$, hat f_1 und f_2 die gleiche Potenzreihe p_1 auf $B_{\frac{1}{2}d}(z_1)$. Weil diese Potenzreihe konvergiert auf $B_d(z_1)$ findet man

$$f_1 = p_1 = f_2 \text{ auf } B_d(z_1).$$

Ähnlich folgt mit der Potenzreihe p_2 zu $f_1 = f_2$ auf $B_{\frac{1}{2}d}(z_2)$, dass

$$f_1 = p_2 = f_2 \text{ auf } B_d(z_2).$$

Nach n Schritten hat man $f_1(z_*) = f_2(z_*)$. ■

6.2 Nullstellen eines Polynoms

Als eine Folge von der Formel von Cauchy hat man, dass:

Korollar 6.7 *Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}^+$ und seien $\alpha_i \in \mathbb{C}$ für $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Betrachten wir das Polynom

$$p(z) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \alpha_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0. \tag{6.3}$$

Es gilt für $|z| \geq R_0 := 2n \max\{|\alpha_{n-1}|, |\alpha_{n-2}|, |\alpha_{n-3}|, \dots, |\alpha_1|, |\alpha_0|\} + 1$, dass

$$\begin{gathered}
|p(z)| = |z|^n \left|1 + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \frac{\alpha_{n-2}}{z^2} + \dots + \frac{\alpha_1}{z^{n-1}} + \frac{\alpha_0}{z^n}\right| \geq \\
\text{... Dreiecksungleichung ...} \\
\geq |z|^n \left(1 - \left|\frac{\alpha_{n-1}}{z}\right| - \left|\frac{\alpha_{n-2}}{z^2}\right| - \dots - \left|\frac{\alpha_1}{z^{n-1}}\right| - \left|\frac{\alpha_0}{z^n}\right|\right) \geq \\
\text{... wegen } |z| \geq R_0 \geq 1 \text{ ...} \\
\geq |z|^n \left(1 - \frac{|\alpha_{n-1}|}{|z|} - \frac{|\alpha_{n-2}|}{|z|} - \dots - \frac{|\alpha_1|}{|z|} - \frac{|\alpha_0|}{|z|}\right) \geq \\
\text{... wegen } |z| \geq R_0 \geq 2n\,|\alpha_i| \text{ ...} \\
\geq |z|^n \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} - \dots - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}\,|z|^n\,.
\end{gathered}$$

Nehmen wir an, dass p keine Nullstelle hat. Dann ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

eine holomorphe Funktion. Aus der Formel von Cauchy folgt dann für $R > R_0$, dass

$$\begin{gathered}
|f(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-0} dz\right| = \left|\frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=R} \frac{1}{zp(z)} dz\right| \leq \\
\leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left|\frac{1}{Re^{it}p(Re^{it})} iR\, e^{it}\right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left|\frac{1}{\frac{1}{2}R^n}\right| dt = 2R^{-n}.
\end{gathered}$$

Weil dies gilt für alle $R > R_0$, findet man $f(0) = 0$, eine Unmöglichkeit. ■

Wenn man das Polynom p aus (6.3) durch $z - z_1$ dividiert, findet man β_{n-2}, β_{n-1}, ..., β_0 und β_* in $\mathbb{C}$, mit

$$\frac{p(z)}{z - z_1} = z^{n-1} + \beta_{n-2} z^{n-2} + \dots + \beta_1 z + \beta_0 + \frac{\beta_*}{z - z_1}.$$

Wenn p die Nullstelle z_1 hat, dann folgt $\beta_* = 0$ und so auch

$$\frac{p(z)}{z - z_1} = z^{n-1} + \beta_{n-2} z^{n-2} + \dots + \beta_1 z + \beta_0.$$

Man kann wiederholt das Korollar anwenden und findet schlußendlich, dass es z_1, ..., $z_n \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_n) \dots (z - z_n).$$

Ein Polynom vom Grad n hat n Nullstellen (wenn man sie einschließlich der Multiplizität zählt).

6.3 Das Maximum-Prinzip

Die Formel von Cauchy erlaubt es uns, holomorphe Funktionen abzuschätzen.

Korollar 6.8 *Sei $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und U offen. Wenn $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, dann gilt*

- *entweder* $|f(z_0)| < \max\{|f(z)|\,; z \in \partial B_r(z_0)\}$,
- *oder* $|f(z_0)| = \max\{|f(z)|\,; z \in \partial B_r(z_0)\}$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{it}) \right| dt \leq \max\{|f(z)|\,; z \in \partial B_r(z_0)\}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist streng, wenn $|f(z_0 + re^{it})| \neq \max\{|f(z)|\,; z \in \partial B_r(z_0)\}$. ■

Auf ähnliche Weise kann man auch zeigen, dass

- entweder
$$\min_{z \in \partial B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)) < \operatorname{Re}(f(z_0)) < \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)),$$
- oder
$$\min_{z \in \partial B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(f(z_0)) = \max_{z \in \partial B_r(z_0)} \operatorname{Re}(f(z)).$$

Wenn man den Beweis von Korollar 6.8 anschaut, bekommt man noch eine andere schöne Eigenschaft:

Korollar 6.9 *Sei $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und U offen. Wenn $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, dann gilt die erste **Mittelwerteigenschaft**:*

$$f(z_0) = \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}. \tag{6.4}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{t=0}^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}} ire^{it}dt \leq \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0+re^{i\varphi})d\varphi \end{aligned}$$

und das ist genau die Aussage. ■

Korollar 6.10 *Sei $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und U offen. Wenn $\overline{B_R(z_0)} \subset U$, dann gilt die zweite **Mittelwerteigenschaft**:*

$$f(z_0) = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})rd\varphi dr}{\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} rd\varphi dr}.$$

Beweis. Weil (6.4) gilt für jedes $r \in [0, R]$ folgt

$$\begin{aligned} &\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(z_0+re^{i\varphi})rd\varphi dr = 2\pi\int_{r=0}^{R} f(z_0)rdr = \\ &= \pi R^2 f(z_0) = f(z_0)\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} rd\varphi dr. \end{aligned}$$

■

Satz 6.11 (Das Maximum-Prinzip für holomorphe Funktionen) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei f holomorph auf U.*

- *Wenn $z \mapsto |f(z)|$ ein lokales Maximum hat in $z_0 \in U$, dann ist f konstant.*
- *Falls U beschränkt ist und f stetig auf $\overline{U}$ ist, nimmt $|f|$ das Maximum an auf ∂U.*

Beweis. Wenn $|f|$ ein lokales Maximum hat, dann gilt wegen Korollar 6.8, dass

$$|f(z_0)| = \max\{|f(z)|\,; z \in \partial B_r(z_0)\} \tag{6.5}$$

für $r \in (0, r_0)$. Das heißt, $|f|$ ist konstant auf $B_{r_0}(z_0)$. Wenn $f(z_0) = 0$ folgt $f(z) = 0$ auf $B_{r_0}(z_0)$. Wenn $f(z_0) \neq 0$, dann ist

$$z \mapsto \operatorname{Log}(f(z)/f(z_0)) \tag{6.6}$$

in eine Umgebung von z_0 eine wohldefinierte holomorphe Funktion mit wegen (6.5) konstantem Realteil:

$$\operatorname{Re}(\operatorname{Log}(f(z)/f(z_0))) = \ln|f(z)/f(z_0)| = 0.$$

Aus den Cauchy-Riemann Gleichungen folgt, dass das Imaginärteil von (6.6) konstant ist:

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Log}(f(z)/f(z_0))) = \operatorname{Arg}(f(z)/f(z_0)) = \operatorname{Arg}(1) = 0.$$

Das bedeutet

$$\operatorname{Log}\left(f(z)/f(z_0)\right) = 0$$

und dass $f(z)$ konstant ist in einer Umgebung von z_0, denn

$$f(z)/f(z_0) = e^{\operatorname{Log}(f(z)/f(z_0))} = e^0 = 1.$$

Die Fortsetzung wie in Lemma 6.6 zeigt, dass f konstant ist auf G.

Für die zweite Aussage erinnert man sich, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge, hier $\overline{U}$, ihr Maximum annimmt. Wenn sie nicht konstant ist, kann das Maximum nur auf ∂U liegen. ■

Lemma 6.12 (Minimum-Prinzip für holomorphe Funktionen) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn $z \mapsto |f(z)|$ ein lokales Minimum hat in $z_0 \in U$, dann gilt $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant auf U.*

Beweis. Wenn $|f(z_0)| > 0$, dann ist $g : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

für $r > 0$ genügend klein, holomorph auf $B_r(z_0)$ und es gilt wegen des Maximum-Prinzips entweder, dass $g(z)$ ist konstant auf $B_r(z_0)$ oder

$$|g(z_0)| < \max_{z \in B_r(z_0)} |g(z)| .$$

Weil $\max_{z \in B_r(z_0)} |g(z)| = |g(z_0)|$ folgt $g(z)$ ist konstant auf $B_r(z_0)$. Dann ist auch $f(z)$ konstant auf $B_r(z_0)$ und wegen der eindeutigen Fortsetzung sogar auf U. ■