Plattengleichungen:
Biegen oder Brechen?

oder

Wieso man ableiten möchte.

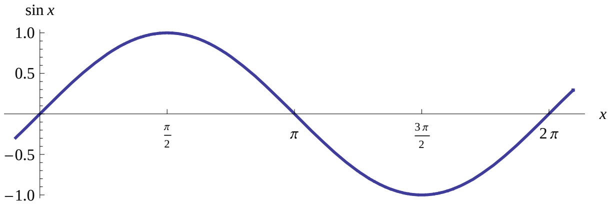
- Schulmathematik
- Die Ableitung
- Die Leine
- Der Balken
- Die Platte

Schulmathematik

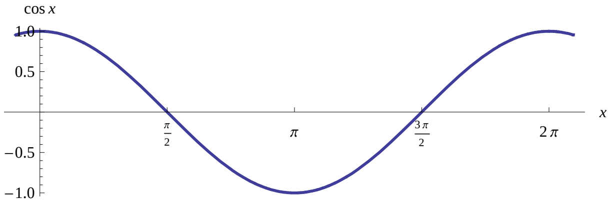
Woran man sich aus der Schule erinnnert:

Und woran man sich vielleicht auch noch erinnnert ...

Leitet man den Sinus ab,

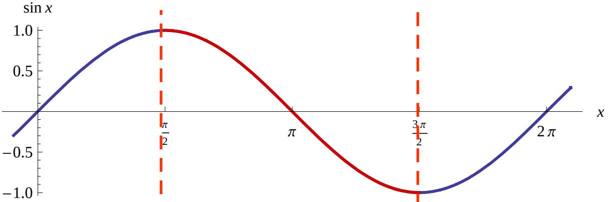


erhält man den Cosinus.

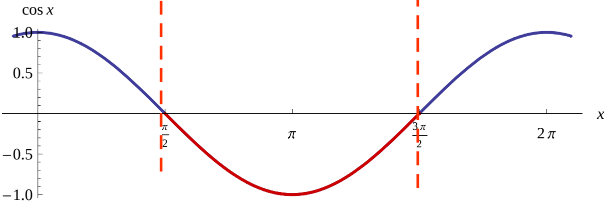


Und woran man sich vielleicht auch noch erinnnert ...

Leitet man den Sinus ab,



erhält man den Cosinus.



Einige Beispiele

Funktion $f(x)$:	x^n	$\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$\ln(x)$
Ableitung $f'(x)$:	nx^{n-1}	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$

Einige Beispiele

Funktion $f(x)$:	x^n	$\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$\ln(x)$
Ableitung $f'(x)$:	nx^{n-1}	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$

Wenn $f(x) = 10\,x^6 + \sin(x)$, dann $f'(x) = 60\,x^5 + \cos(x)$.

Regel zur Linearität: $(f+g)' = f' + g'$ und $(cf)' = c\,f'$.

Einige Beispiele

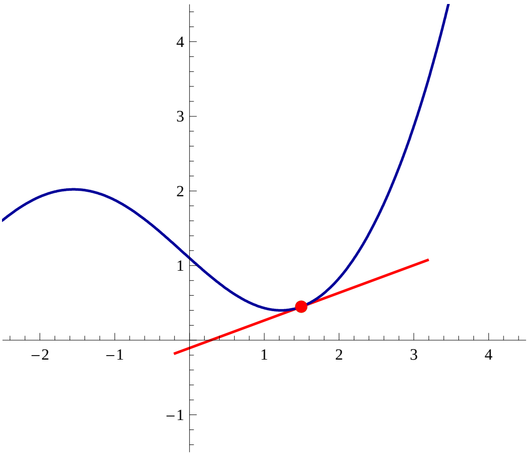
Funktion $f(x)$:	x^n	$\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$\ln(x)$
Ableitung $f'(x)$:	nx^{n-1}	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	e^x	$\frac{1}{x}$

Wenn $f(x) = x^3 \sin(x)$, dann $f'(x) = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x)$.

Produktregel: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

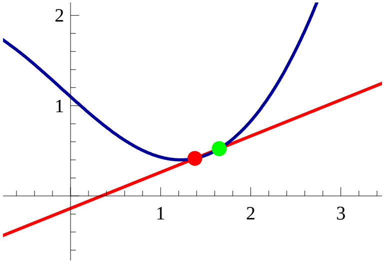
Die Ableitung

Was ist die Ableitung?



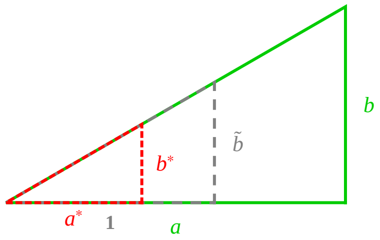
Man möchte die Größe der Steigung beschreiben.

Erstes Problem: Wie bestimmt man die Tangente?



Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, und man wählt die zwei Punkte „*sehr, sehr nah*“ zusammen.

Zweites Problem: Wie legt man die Richtung fest?



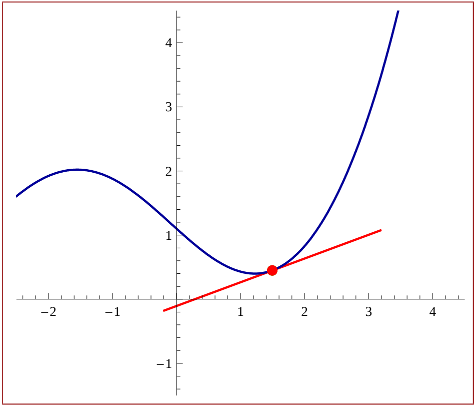
Für **ähnliche** Dreiecke gilt

$$\frac{b}{a} = \frac{b^*}{a^*} = \frac{\tilde{b}}{\mathbf{1}} = \tilde{b}.$$

Wenn die Tangente in $(x, f(x))$ eine „solche“ Richtung hat, setzt man

$$f'(x) = \tilde{b} = \frac{\textbf{vertikale Zunahme}}{\textbf{horizontale Zunahme}}.$$

Geometrische Darstellung der Ableitung



Software: © Mathematica

Definition der Ableitung

$$f'(x) = \frac{\textbf{infinitesimale vertikale Zunahme}}{\textbf{infinitesimale horizontale Zunahme}} = $$

$$= \lim_{a \to x} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Was ist ein Limes? $\longrightarrow$ **Analysis**

Einige historische Bemerkungen

- **Aryabhata** (476 – 550, Indien) benutzt die Ableitung bei der Bewegung des Mondes.
- **Bhāskarācārya**, oder „Bhaskara der Gelehrte" (1114 – 1185, Indien), beschreibt die Ableitung.
- **Leibniz** (1684) und **Newton** (1687) versuchen etwa gleichzeitig, die Ableitung mathematisch korrekt zu definieren.

  Newton beschuldigt Leibniz des Plagiats.

Mehr Geschichtliches

- **Isaac Newton** (1643 – 1727) verwendete $y = f(t)$ für die Funktion, $\dot{y}$ für die erste Ableitung und $\ddot{y}$ für die zweite. Bei ihm war t die Zeit. In der Physik wird diese Notation auch heute noch benutzt.

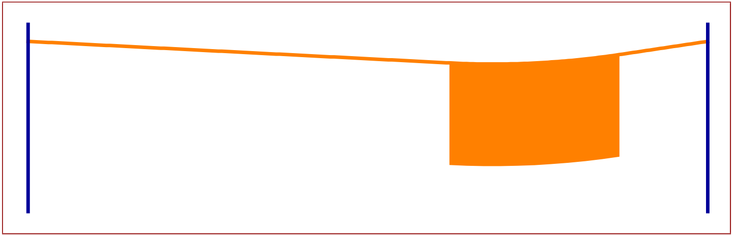
- **Gottfried Leibniz** (1646 – 1716) schrieb $\frac{df(x)}{dx}$ für die Ableitung.

- **Joseph-Louis Lagrange** (1736 – 1813) notierte die Ableitung einer Funktion f mit einem extra Strich f'.

  Er wurde als Giuseppe Lodovico Lagrangia in Turin geboren und verfasste seine bekannteste Arbeit an der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Sie heißt: Mécanique Analytique (1788).

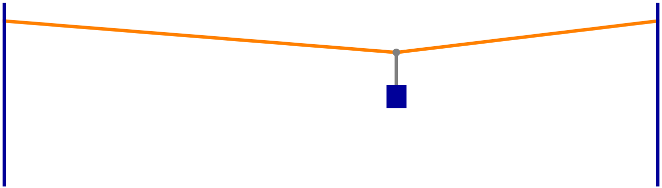
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/

Die Wäscheleine



Die Wäscheleine

Wenn man an die Stelle x ein Gewicht mit Masse m auf eine Leine hängt, findet man:

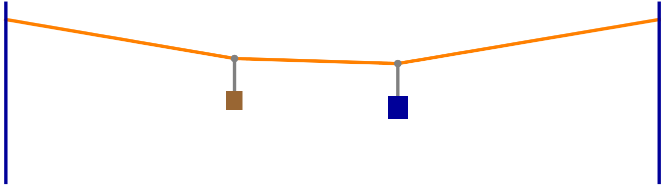


Nennen wir u die Auslenkung, dann gilt

$$u' \,(\text{rechts von } x) - u' \,(\text{links von } x) = c\; m.$$

Die Wäscheleine

Wenn man an die Stellen x_1, x_2 Gewichte mit Massen m_1, m_2 auf die Leine hängt, findet man:

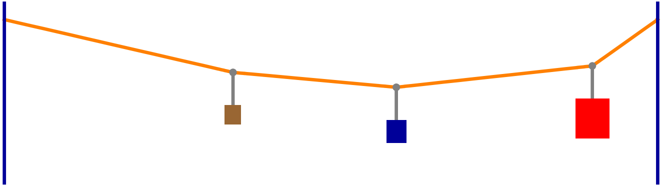


Für die Auslenkung u gilt

$$u' \,(\text{gleich rechts von } x_i) - u' \,(\text{gleich links von } x_i) = c\, m_i.$$

Die Wäscheleine

Wenn man an die Stellen x_1, x_2, x_3 Gewichte mit Massen m_1, m_2, m_3 auf die Leine hängt, findet man:

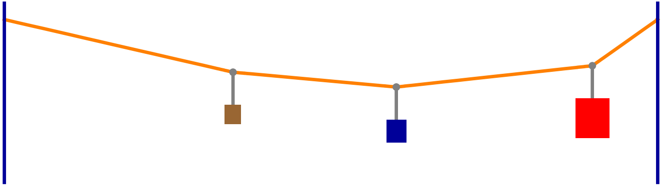


Für die Auslenkung u gilt

$$u' \,(\text{gleich rechts von } x_i) - u' \,(\text{gleich links von } x_i) = c\; m_i.$$

Die Wäscheleine

Wenn man an die Stellen x_1, x_2, x_3 Gewichte mit Massen m_1, m_2, m_3 auf die Leine hängt, findet man:

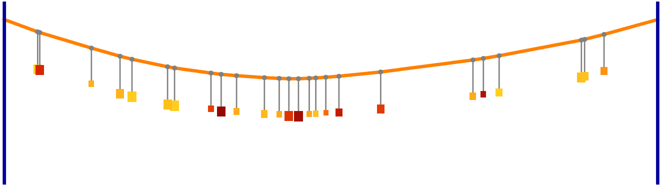


Für die Auslenkung u gilt für genügend kleines $h > 0$

$$u'(x_i + h) - u'(x_i - h) = c\, m_i.$$

Die Wäscheleine

Wenn man an die Stellen $x_1, \ldots, x_{25}$ Gewichte mit Massen $m_1, \ldots, m_{25}$ auf die Leine hängt, findet man:

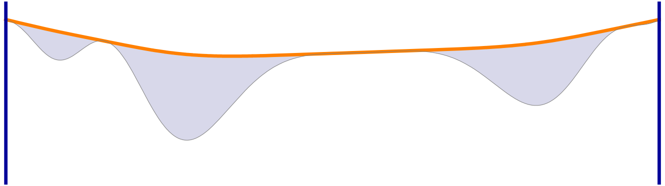


Für die Auslenkung u gilt für genügend kleines $h > 0$

$$u'(x_i + h) - u'(x_i - h) = c\, m_i.$$

Die Wäscheleine

Wenn man an die Stellen x Wäsche mit Massendichte $f(x)$ auf die Leine hängt, findet man:

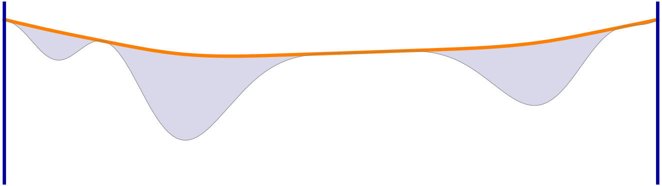


Für die Auslenkung u gilt für „infinitesimal“ kleines h

$$u'(x+h) - u'(x-h) = c\ 2h\ f(x).$$

Die Wäscheleine

Wenn man an die Stellen x Wäsche mit Massendichte $f(x)$ auf die Leine hängt, findet man:

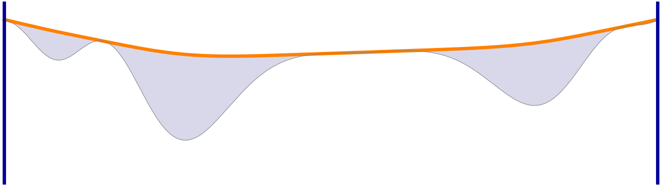


Für die Auslenkung u gilt für „infinitesimal“ kleines h

$$\frac{u'(x+h) - u'(x-h)}{2h} = c\ f(x).$$

Die Wäscheleine

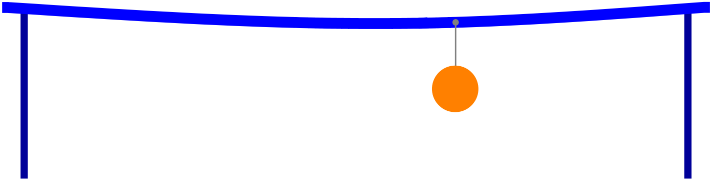
Wenn man an die Stellen x Wäsche mit Massendichte $f(x)$ auf die Leine hängt, findet man:



Für die Auslenkung u gilt

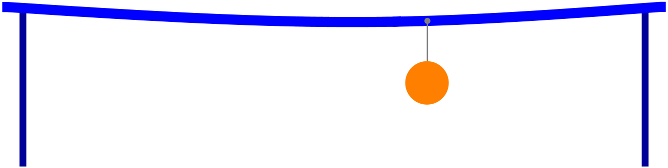
$$u''(x) = c\ f(x).$$

Der Balken



<u>*Der Balken*</u>

Wenn man an die Stellen x etwas mit Massendichte $f(x)$ auf den Balken hängt, findet man:



Für die Auslenkung U gilt

$$-U''''(x) = c\ f(x).$$

Zusätzlich gefedert

Wenn man die Leine mit Federn an der Decke befestigt, wird die Differentialgleichung wie folgt

$$u''(x) = c\ f(x) + \lambda\ u(x).$$

Wenn man den Balken mit Federn an der Decke befestigt, wird die Differentialgleichung wie folgt

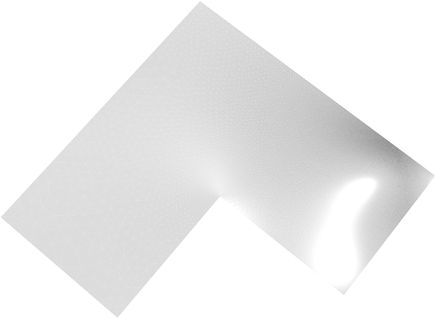
$$-U''''(x) = c\ f(x) + \lambda\ U(x).$$

Hier ist $\lambda > 0$ die Federkonstante. Zusätzliche Bedingungen sind

$$\begin{array}{lll} u(x) = 0 & \text{für} & x \text{ am Rande;} \\ U(x) = 0 & \text{und} & U''(x) = 0 \text{ für } x \text{ am Rande.} \end{array}$$

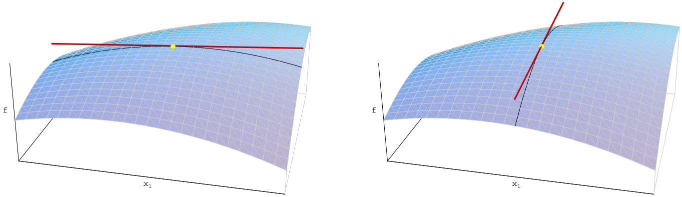
Webseite.

Die Platte



Ableitungen bei 2 Variablen

- Eine Platte ist zweidimensional. Das heißt, dass die Auslenkung u eine Funktion zweier Variablen ist, nennen wir sie x und y.
- Diese Funktion kann man sowohl nach x als auch nach y ableiten. Mit Leibniz-Notation: $\frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$ und $\frac{\partial}{\partial y}u(x, y)$.
- $\frac{\partial}{\partial x}u(x, y)$ gibt den Winkel der Tangente in x-Richtung; $\frac{\partial}{\partial y}u(x, y)$ gibt den Winkel der Tangente in y-Richtung.



Plattengleichung

Die Differentialgleichung einer Platte ist:

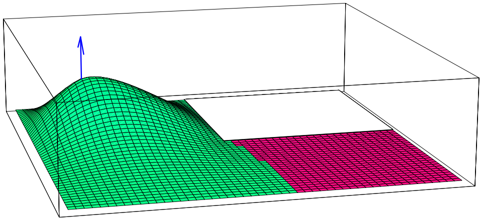
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)+2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = \\ = c\ f(x,y).$$

Zusätzliche Bedingungen sind zum Beispiel am Rand der Platte:

$$u(x,y)=0 \text{ und } \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)=0.$$

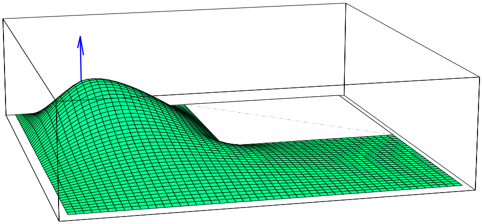
Plattengleichung

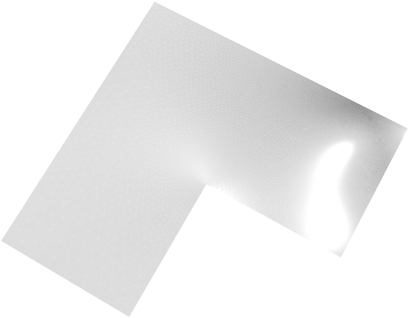
Wenn die Platte eine einspringende Ecke hat, gibt es nicht nur eine, sondern 2 Lösungen.

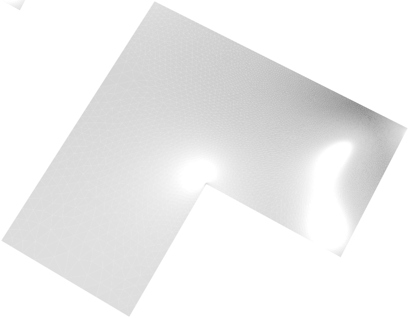


Flach an der Ecke.

Deformiert an der Ecke.







Webseite