

Skript mit Aufgaben für

# Partielle Differentialgleichungen



*... für online Zeiten*

G. Sweers

**Sommersemester 2021**

## **Vorwort**

Diese Vorlesung wird höchstwahrscheinlich im online-Format stattfinden. Dies bedeutet, dass die Studierenden sich für einen größeren Teil selbstständig mit dem Stoff auseinandersetzen müssen. Um die Beispiele und Aufgaben klar zu markieren, sind die farblich markiert.

Das Skript ist dem Skript aus 2019 sehr ähnlich mit Ausnahme der zusätzlichen Aufgaben.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Ähnliches und Anderes</b>	<b>1</b>
1.1 Lösungen bei GDGL und bei PDGL . . . . .	1
1.2 Randbedingungen . . . . .	5
<b>2 Wiederholung und Neuanfang</b>	<b>11</b>
2.1 Differentialgleichungen und klassische Lösungen . . . . .	11
2.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	12
2.2.1 Stetigkeit . . . . .	12
2.2.2 Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen . . . . .	13
2.2.3 Vollständigkeit bei $C(\bar{\Omega})$ . . . . .	14
2.3 Intermezzo zu glatten Rändern . . . . .	17
2.4 Integration in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	20
2.5 Integration über einen Rand . . . . .	21
2.5.1 Kurvenlänge . . . . .	21
2.5.2 Flächeninhalt einer Mannigfaltigkeit . . . . .	21
2.5.3 Randintegrale . . . . .	23
2.6 Partielle Integration in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	23
2.7 Integrale und Transformationen . . . . .	25
<b>3 Lösungen bei partiellen Differentialgleichungen</b>	<b>29</b>
3.1 Lineare und nicht-lineare Differentialgleichungen . . . . .	29

3.2	Klassische Lösungen . . . . .	30
3.3	Nicht-klassische Lösungen . . . . .	30
3.3.1	Schwache Ableitungen und Lebesgue . . . . .	30
3.3.2	Sobolev-Räume . . . . .	32
3.3.3	Schwache und distributionelle Lösungen . . . . .	34
3.4	Kriterien von Hadamard . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Modelle und erste Ergebnisse</b>	<b>39</b>
4.1	Transportgleichung . . . . .	39
4.2	Wärmeleitungsgleichung . . . . .	41
4.2.1	Einfache Ergebnisse für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkte Gebiete . . . . .	42
4.3	Die Laplace Gleichung . . . . .	43
4.3.1	Ein Ergebnis für harmonische Funktionen . . . . .	44
4.4	Die schwingende Saite . . . . .	47
4.5	Die Wellengleichung . . . . .	48
4.6	Die Membran . . . . .	49
4.7	Stationäre Saiten und Balken . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Erster Ordnung: Transportgleichungen</b>	<b>53</b>
5.1	Lineare und semilineare Transportgleichungen . . . . .	53
5.1.1	Picard-Lindelöf . . . . .	53
5.1.2	Transportgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	54
5.1.3	Allgemeine (semi)lineare Transportgleichungen . . . . .	56
5.2	Quasilineare Transportgleichungen . . . . .	59
5.2.1	Stoßwellen . . . . .	61
5.2.2	Verdünnungswellen . . . . .	65
5.2.3	Physikalische Begründung . . . . .	66
5.3	Übersicht . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Klassifizierung zweiter Ordnung</b>	<b>71</b>
6.1	Einfachen Fälle als Begründung . . . . .	71
6.1.1	Das Symbol . . . . .	71

6.1.2	Zerlegung des Symbols in Linearterme . . . . .	72
6.2	Standardbeispiele zu diesen Fällen . . . . .	74
6.2.1	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y^2$ . . . . .	74
6.2.2	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y^2$ . . . . .	77
6.2.3	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y$ . . . . .	80
6.2.4	Intermezzo zum Lemma von Abel . . . . .	81
6.2.5	Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y$ . . . . .	82
6.2.6	Welche Randbedingungen passen? . . . . .	83
6.3	Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	84
6.3.1	In zwei Dimensionen . . . . .	84
6.3.2	In höheren Dimensionen . . . . .	85
6.3.3	Bei variablen Koeffizienten . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Die 1d Wellengleichung</b>	<b>89</b>
7.1	Die Wellengleichung in Raumdimension 1 . . . . .	89
7.2	Die 1d-Wellengleichung auf einem Intervall . . . . .	93
<b>8</b>	<b>Intermezzo zu Distributionen</b>	<b>97</b>
8.1	Testfunktionen . . . . .	97
8.2	Konvergenz für Testfunktionen . . . . .	98
8.3	Distributionen . . . . .	100
8.4	Distributionen und Differentialgleichungen . . . . .	102
<b>9</b>	<b>Die Wellengleichung in mehr Dimensionen</b>	<b>107</b>
9.1	Kirchhoff für Raumdimension 3 . . . . .	107
9.2	Ergebnisse für beliebige Dimensionen . . . . .	112
9.3	Poisson für Raumdimension 2 . . . . .	115
9.4	Raumdimensionen 4 und höher . . . . .	117
9.5	Gebiete mit Rand . . . . .	119

<b>10 Die Wärmeleitungsgleichung I</b>	<b>121</b>
10.1 Diffusionskern . . . . .	121
10.2 Das Anfangswertproblem in mehr Dimensionen . . . . .	126
10.3 Wärmeleitungsgleichung mit rechter Seite . . . . .	126
10.4 Mittelwert und Maximum . . . . .	128
10.5 Beweis von Theorem 10.8 . . . . .	130
10.6 Maximumprinzip und Eindeutigkeit . . . . .	132
<b>11 Die Wärmeleitungsgleichung II</b>	<b>135</b>
11.1 Eindeutigkeit unter einer Wachstumsbedingung . . . . .	135
11.2 Eindeutigkeit mit Hilfe der Energiefunktion . . . . .	136
11.3 Regularität . . . . .	139
11.4 Technisches Intermezzo . . . . .	140
11.5 Existenz auf beschränkten Gebieten . . . . .	141
11.6 Zwei Gegenbeispiele . . . . .	145
<b>12 Die Laplace- und Poisson-Gleichungen</b>	<b>149</b>
12.1 Fundamentallösung . . . . .	149
12.2 Randwertprobleme . . . . .	154
12.2.1 Die Methode von Perron . . . . .	155
12.2.2 Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz . . . . .	156
12.2.3 Durch Variationsrechnung . . . . .	159
12.2.4 Ein Beispiel . . . . .	160
<b>13 Ordnung und Existenz bei Laplace</b>	<b>163</b>
13.1 Greensche Funktionen auf Halbraum und Kugel . . . . .	163
13.2 Greensche Funktionen auf beliebigen Gebieten . . . . .	165
13.3 Tricks für Greensche Funktionen auf speziellen Gebieten . . . . .	168
13.4 Konforme Abbildungen in 2 Dimensionen . . . . .	169
13.5 Folgen der Greenschen Funktion auf der Kugel . . . . .	173
13.5.1 Das starke Maximum-Prinzip . . . . .	173
13.5.2 Harmonisch auf Kugeln . . . . .	175

<b>14 Existenz nach Perron</b>	<b>179</b>
14.1 Das Theorem von Perron . . . . .	179
14.2 Minimum und Infimum bei superharmonisch . . . . .	180
14.3 Beweis mit Barrieren am Rand . . . . .	182
<b>15 Laplace und Regularität</b>	<b>185</b>
15.1 Bemerkungen zur Regularität . . . . .	185
15.2 Regularität und Fundamentallösung . . . . .	186
15.3 Regularität und Rand . . . . .	187
15.4 Lösungen und Abschätzungen . . . . .	190
<b>16 Semilineare Laplace-Gleichungen</b>	<b>193</b>
16.1 Ein erweitertes Maximum-Prinzip . . . . .	193
16.2 Existenz bei einer einfachen Perturbation . . . . .	195
16.3 Schwach harmonisch ist harmonisch . . . . .	197
16.4 Existenz zwischen Ober- und Unterlösung . . . . .	199
16.5 Variationelle Methoden . . . . .	202
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>205</b>



## Ähnliches und Anderes

### 1.1 Lösungen bei GDGL und bei PDGL

Wenn man ein Seil zwischen zwei gleichhohe Stellen spannt, und man lässt auf das Seil vertikale Kräfte wirken, dann bekommt man das folgende Randwertproblem:

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) = f(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ u(a) = h = u(b). \end{cases} \quad (1.1)$$

Mit Hilfe der Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen kann man eine Lösung finden durch eine Greensche Funktion. Das wollen wir nicht wiederholen. Wir möchten schon bemerken, dass man durch Skalierung und „Verschiebung“<sup>1</sup> statt (1.1) ohne Verlust der Allgemeinheit

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) = f(x) & \text{für } x \in (0, 1), \\ u(0) = 0 = u(1) \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Man setzt dazu  $\tilde{x} = \frac{x-a}{b-a}$ ,  $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(a + (b-a)\tilde{x}) - h$  und  $\tilde{f}(\tilde{x}) = (b-a)^2 f(a + (b-a)\tilde{x})$ .

betrachten kann. Auch ohne Greensche Funktion kann man oft gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung als Systeme erster Ordnung schreiben. Manchmal kann man gewöhnliche Differentialgleichungen, insbesondere lineare, als Iteration von Differentialgleichungen erster Ordnung betrachten. Man kann nicht nur  $u_{xx}$  als  $(u_x)_x$  betrachten, aber zum Beispiel auch

$$-u_{xx} + u_x + u = f$$

als zwei wiederholte DGL erster Ordnung, wenn man diese umschreibt nach

$$-\left(\partial_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\partial_x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)u = f.$$

Hier ist  $\partial_x$  das Ableiten nach  $x$ . Wenn nur  $x \in \mathbb{R}$  als Variable erscheint, dann hat man die folgenden Schreibweisen für die Ableitung  $u'(x) = \partial_x u(x) = \frac{\partial}{\partial x} u(x) = u_x(x)$ . Bei partiellen Ableitungen bleiben  $\partial_{x_1} u(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) = \partial_1 u(x_1, x_2) = u_{x_1}(x_1, x_2)$ , und Ähnliches für die Ableitung nach  $x_2$ .

*Kann man auch partielle Differentialgleichungen*

zerlegen in aufeinanderfolgende Gleichungen erster Ordnung?

Betrachtet man kein eingespanntes Seil sondern ein Membran, dann hat man zwei Raumdimensionen und ein passendes einfaches Modell wäre

$$\begin{cases} -(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0. & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

wobei mit  $\partial\Omega$  der Rand von  $\Omega$  gemeint ist und mit  $\Omega$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^2$ .

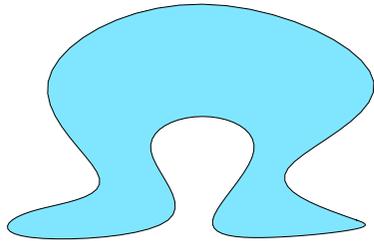


Abbildung 1.1: Ein Gebiet  $\Omega$  muss nicht, aber kann so aussehen.

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man auch hier skalieren, jedoch bleibt die Differentialgleichung so nur erhalten, wenn man verschiebt oder skaliert. Dann bleibt aber auch die Form des Gebietes erhalten. Das bedeutet:

- Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man bei partiellen Differentialgleichungen nicht ohne weiteres auf einer Standardmenge transformieren.

Versucht man die Differentialgleichung in (1.2) in Gleichungen erster Ordnung zu zerlegen, dann findet man

$$\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 = (\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$$

and obwohl hier das komplexe  $i$  steht, ist das eine Zerlegung die weiterhilft, aber nur, wenn man Funktionentheorie gehört hat. Würde man dies jedoch in höheren Dimensionen versuchen, findet man erstmals zum Beispiel

$$\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2 = \left(\partial_{x_1} + i\sqrt{\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2}\right) \left(\partial_{x_1} - i\sqrt{\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2}\right).$$

Das letztere ist jedoch keine Differentialgleichung mehr, sondern eine Pseudodifferentialgleichung und man sollte sich erstmal überlegen, wie man  $\sqrt{\partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2}$  definieren sollte.

**Aufgabe 1.1** 1. Zeigen Sie, dass es für jedes Paar  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{C}$  gibt derart, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Wir nennen diese beiden Differentialoperatoren gleich, wenn für alle  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}\right) u(x, y) = \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}\right) u(x, y). \end{aligned}$$

Wenn  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gilt, folgt dann  $a, b \in \mathbb{R}$ ?

2. Vergleichen Sie die Zahl der Konstanten in

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} + b \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y} + d \frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \beta \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \delta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Welche Darstellung ist allgemeiner?

- Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man eine partielle Differentialgleichung zweiter oder höherer Ordnung nicht ohne weiteres auf ein Gleichungssystem erster Ordnung bringen.

Wir verwendeten gerade  $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$  und  $\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ . Weil die Summe der zweiten Ableitungen ein sehr häufig vorkommender Differentialoperator ist, hat er ein eigenes Symbol bekommen.

**Definition 1.1** Für  $n$  Dimensionen schreibt man

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2.$$

Man nennt  $\Delta$  den Laplace-Operator nach dem französischen Mathematiker Pierre-Simon Laplace<sup>2</sup>.

**Bemerkung 1.1.1** Man erinnere sich vielleicht noch an zwei andere Differentialoperatoren, den Gradienten und die Divergenz. Für eine Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sind diese wie folgt definiert:

1. Der Gradient  $\nabla$  wird definiert auf Funktionen  $g \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$  durch

$$\nabla g(x) = \left( \frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g(x)}{\partial x_n} \right)$$

und liefert eine Vektorwertige Funktion  $\nabla g \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .

<sup>2</sup>Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749–1827) war ein Schüler von Jean-Baptiste le Rond d'Alembert. Beide haben sich mit partiellen Differentialgleichungen befasst.

2. Die Divergenz  $\nabla \cdot$  wird definiert auf Vektorfunktionen  $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , also  $F = (F_1, \dots, F_n)$  mit  $F_i \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ , durch

$$(\nabla \cdot F)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_k}$$

und liefert eine Funktion  $\nabla \cdot F \in C^0(\Omega; \mathbb{R})$ .

Es folgt für  $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ , dass  $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$ .

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen braucht man Randbedingungen, um zu einer eindeutigen Lösung zu finden. Differentialgleichungen, gewöhnliche und partielle, werden motiviert durch Modelle aus der Natur, Technik, Wirtschaft etc. und will man eine Voraussage treffen, braucht es eine eindeutige Lösung.

**Beispiel 1.2** Sei  $\Omega = B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  die 2-dimensionale Einheitskreisscheibe. Dann ist

$$u(x_1, x_2) = \frac{1 - |x|^2}{4} = \frac{1}{4}(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (1.3)$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0. & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

Wir werden noch zeigen, dass dieses Problem auch nur diese Lösung hat. Eine Skizze zu der Funktion in (1.3) findet man in Abbildung 1.2 links.

In diesem Beispiel gibt es eine Lösung und, wenn man Vertrauen hat in den vorletzten Satz, anscheinend auch nur diese Lösung. Was jedoch ist eine Lösung? Die Funktion in (1.3) liegt in  $C^\infty(B_1(0))$  und für solche Funktionen  $u$  kann man  $-\Delta u$  berechnen, sogar  $C^2(\overline{B_1(0)})$  reicht, und die Gleichungen in (1.4) gelten punktweise.

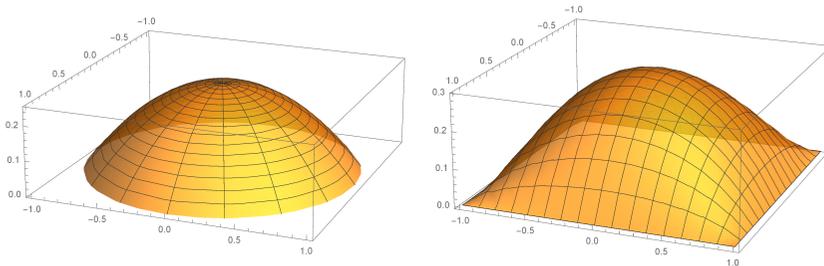


Abbildung 1.2: Skizzen der Lösungen aus Beispielen 1.2 und 1.3. Die Funktion rechts wurde approximiert.

**Beispiel 1.3** Betrachten wir das Randwertproblem auf  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2; |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$ :

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = 1 & \text{für } x \in Q, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x \in \partial Q. \end{cases}$$

Das Gebiet  $Q$  ist ein Quadrat und eine explizite Lösung ist nicht so einfach anzugeben, wenn überhaupt. Trotzdem kann man zeigen, dass es genau eine Lösung gibt. Eine Skizze zu der Lösung findet man in Abbildung 1.2 rechts.

Die Existenz einer Lösung ist hier noch etwas heikel. Man sieht leicht, dass eine Lösung nicht zweimal stetig differenzierbar sein kann auf dem abgeschlossenen Quadrat. Denn,

wenn  $u$  da zweimal stetig differenzierbar wäre, dann folgt aus  $u(x_1, 1) = 0$  für alle  $x_1 \in (-1, 1)$ , dass  $\partial_{x_1}^2 u(x_1, 1) = 0$  und ebenso aus  $u(1, x_2) = 0$  für alle  $x_2 \in (-1, 1)$ , dass  $\partial_{x_2}^2 u(1, x_1) = 0$ . Zweimal stetig-differenzierbar liefert dann  $\Delta u(1, 1) = 0$  und das wäre ein Widerspruch zu der Differentialgleichung. Lösungen muss man hier suchen als Funktionen, die zum Beispiel zweimal differenzierbar sind im Inneren, also auf  $\Omega$ , und nur stetig auf der abgeschlossenen Menge  $\overline{\Omega}$ .

Obwohl im letzten Beispiel ein sehr einfaches Gebiet  $\Omega$  betrachtet wird und die rechte Seite der Gleichung nur eine Konstante zeigt, gibt es anscheinend keine zweimal auf  $\overline{\Omega}$  stetig-differenzierbare Lösung.

- Bei partiellen Differentialgleichungen soll man genau definieren, welche Funktionen man eine Lösung nennt.

Die Vielzahl an möglichen Gebieten und die vielen Kombinationen der partiellen Ableitungen geben noch weniger Hoffnung auf explizite Lösungsformeln als bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

- Bei partiellen Differentialgleichungen soll man sich konzentrieren auf qualitative Aspekte wie Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

Wenn bei einem Randwertproblem die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung geklärt ist, wäre der nächste Schritt, weitere Eigenschaften der Lösung herzuleiten, gegebenenfalls durch Approximierung der Lösung eventuell numerisch. Das letztere ist kein Teil dieser Vorlesung.

## 1.2 Randbedingungen

Bei der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$-u''(x) + u(x) = f(x)$$

hat man mehrere sinnvolle Möglichkeiten, durch Zusatzbedingungen die Eindeutigkeit einer Lösung zu bekommen:

### 1. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{für } x > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

hat genau eine Lösung, nämlich

$$u(x) = - \int_0^x \sinh(x-y) f(y) dy.$$

### 2. Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) & \text{für } x > 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

hat auch genau eine Lösung, nämlich

$$u(x) = \sinh(1-x) \int_0^x \frac{\sinh(y)}{\sinh(1)} f(y) dy + \sinh(x) \int_x^1 \frac{\sinh(1-y)}{\sinh(1)} f(y) dy.$$

Auch bei *inhomogenen* Randbedingungen wie  $u(0) = 5$  statt  $u(0) = 0$  findet man immer noch eindeutige Lösungen. Man addiere in dem Fall  $5 \cosh(x)$  zu der Lösung von (1.5), beziehungsweise  $5 \frac{\sinh(1-x)}{\sinh(1)}$  zu der Lösung von (1.6).

*Welche Randbedingungen passen bei partiellen Differentialgleichungen?*

Dazu betrachten wir einige Beispiele. Zuerst nochmals das Beispiel 1.2, wobei wir nun jedoch einen Punkt auf dem Rand weglassen.

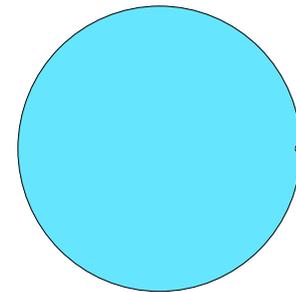


Abbildung 1.3:  $B_1(0)$  in  $\mathbb{R}^2$

**Beispiel 1.4** Für das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{für } x \in B_1(0), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_1(0) \setminus \{(1,0)\}, \end{cases} \quad (1.7)$$

findet man Lösungen

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4} (1 - x_1^2 - x_2^2) + c \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}.$$

Die Konstante  $c$  kann man in  $\mathbb{R}$  beliebig wählen, und man findet unendlich viele Lösungen für (1.7).

**Aufgabe 1.2** Es gilt tatsächlich, dass

$$\Delta \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2} = 0 \text{ für } (x_1, x_2) \in \overline{B_1(0)} \setminus \{(1, 0)\}.$$

Zeigen Sie dies.

Also wenn man die Randbedingung an einer Stelle weglässt, hat man wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht mehr die Eindeutigkeit. Man könnte vermuten, dass man generisch bei einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung auch auf alle Randstellen die Funktionswerte vorschreiben soll, um genau eine Lösung zu finden.

Kann man vielleicht die Randbedingung  $u(1, 0) = 0$  durch  $\partial_{x_1} u(1, 0) = 0$  ersetzen?

Die Bedingung  $\partial_{x_1} u(1, 0) = 0$  verlangt, dass  $u$  und diese Ableitung definiert sind. Wenn  $u$  (1.7) erfüllt und stetig auf  $\overline{B_1(0)}$  sein sollte, dann kann man zeigen, dass nur die Funktion  $u(x) = \frac{1}{4}(1 - |x|^2)$  in Betracht kommt und  $\partial_{x_1} u(-1, 0) = \frac{1}{2}$  gilt.

Sind Lösungen immer stetig bis auf dem Rand?

**Aufgabe 1.3** Sei  $\text{Arg} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow (-\pi, \pi)$  das Argument und setze

$$u(x, y) = \text{Arg}(1 + x + iy).$$

1. Begründen Sie, dass

$$u \in C^\infty(\overline{B_1(0)} \setminus \{(-1, 0)\}).$$

Die Funktion ist beschränkt, jedoch nicht stetig fortsetzbar auf  $B_1(0)$ .

2. Ergänzen Sie das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = \dots & \text{für } x^2 + y^2 < 1, \\ u(\cos \varphi, \sin \varphi) = \dots & \text{für } \varphi \in (-\pi, \pi), \\ \lim_{x \downarrow -1} u(x, 0) = \dots \end{cases}$$

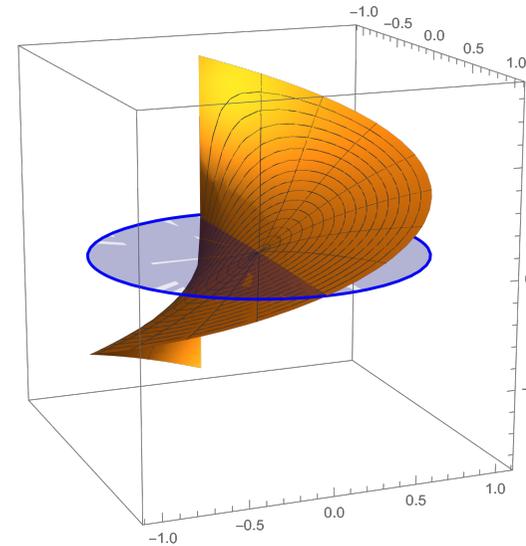


Abbildung 1.4: Die Funktion aus Aufgabe 1.3

Kann man vielleicht die Stetigkeit weglassen und die Randbedingung  $\partial_{x_1} u(0, 0) = 0$  durch das schwächere  $\lim_{x_1 \uparrow 1} \partial_{x_1} u(x_1, 0) = 0$  ersetzen?

**Beispiel 1.5** Die letzte Bedingung reicht leider gar nicht für Eindeutigkeit und das sieht man mit der Funktion aus dem letzten Beispiel: Setze

$$v(x_1, x_2) := \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2}$$

Diese Funktion ist stetig auf  $\overline{B_1(0)} \setminus 0$ , aber nicht beschränkt bei  $(1, 0)$ . Es gilt  $\Delta v = 0$  in  $B_1(0)$  und die Randbedingung in (1.7).

Definiere den Differentialoperator

$$L : C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$$

durch

$$(Lu)(x_1, x_2) = x_1 \partial_{x_2} u(x_1, x_2) - x_2 \partial_{x_1} u(x_1, x_2).$$

Diesen Differentialoperator kann man auch verwenden für Funktionen, die nicht auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definiert sind, wenn man sich beschränkt auf die Stellen, wo die betreffende Funktion differenzierbar ist. Wir verwenden diesen Operator  $L$  für Funktionen, die differenzierbar sind auf  $\overline{B_1(0)} \setminus \{(1, 0)\}$ .

Man kann zeigen, dass nicht nur auch

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(1 - x_1^2 - x_2^2) + cv(x_1, x_2)$$

für beliebige  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung von (1.7) ist, sondern, dass sogar

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(1 - x_1^2 - x_2^2) + \sum_{k=0}^{4711} c_k (L^k v)(x_1, x_2).$$

für beliebige  $c_i \in \mathbb{R}$  das Randwertproblem erfüllen. Außerdem kann man zeigen, dass  $\{L^k v\}_{k=0}^{4711}$  ein unabhängiges System bildet. Da für die ungeraden Elemente  $L^k v$ , also für  $k \in 2\mathbb{N} + 1$ , gilt, dass  $\lim_{x_1 \downarrow -1} \partial_{x_1} L^k v(x_1, 0) = 0$ , ist das Ersetzen von  $u(1, 0) = 0$  durch  $\lim_{x_1 \downarrow -1} \partial_{x_1} u(x_1, 0) = 0$  nicht ausreichend, um Eindeutigkeit zu erreichen.

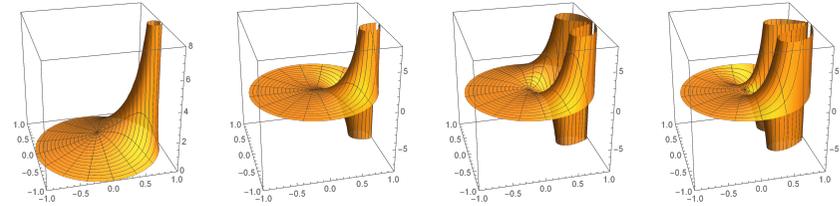


Abbildung 1.5: Die ersten 4 Funktionen aus der Reihe  $v, Lv, L^2v, L^3v, \dots$ , die bei  $(1, 0)$  jeweils höhere Singularitäten aufweisen.

**Aufgabe 1.4** Sei  $\Psi \in C([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  mit  $\Psi(-\pi) = \Psi(\pi)$  gegeben durch die konvergente Reihe

$$\Psi(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\varphi}.$$

Zeigen Sie, dass  $u : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k r^{|k|} e^{ik\varphi}$$

1. konvergiert für  $r \in [0, 1]$ , und das gilt  $u \in C^2(B_1(0))$ ;
2. eine Lösung ist von

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = 0 & \text{für } x^2 + y^2 < 1, \\ u(\cos \varphi, \sin \varphi) = \Psi(\varphi) & \text{für } \varphi \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

**Beispiel 1.6** Als nächstes Randwertproblem betrachten wir auf

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < \pi \text{ und } 0 < x_2 < \pi\}$$

das Randwertproblem:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x \in Q, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x \in \partial Q. \end{cases} \quad (1.8)$$

Offensichtlich ist  $u(x_1, x_2) = 0$  eine Lösung. Wir finden jedoch auch, dass

$$u(x_1, x_2) = c \sin(x_1) \sin(x_2) \quad (1.9)$$

mit jeder beliebigen Konstante  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung ist, obwohl auf dem ganzen Rand  $u = 0$  vorgeschrieben ist. Der Unterschied mit vorhin ist ein Minus-Zeichen zwischen beiden Ableitungen.

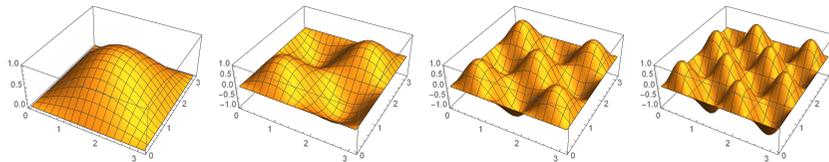


Abbildung 1.6: Links die Funktion aus (1.9) als auch noch drei andere Lösungen von (1.8). Raten Sie welche!

### Beispiel 1.7 *Wiederum*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 < x_1 < \pi \text{ und } 0 < x_2 < \pi\},$$

jedoch jetzt betrachten wir andere Randbedingungen, nämlich

das Randwertproblem:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } (x_1, x_2) \in Q, \\ \text{links:} & u(0, x_2) = 0 & \text{für } x_2 \in [0, \pi], \\ \text{rechts:} & u(\pi, x_2) = 0 & \text{für } x_2 \in [0, \pi], \\ \text{unten:} & u(x_1, 0) = 0 & \text{für } x_1 \in [0, \pi] \\ \text{unten:} & \left( \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, x_2) \right)_{|x_2=0} = 0 & \text{für } x_1 \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Oben stellen wir keine Randbedingung. Unten gibt es hier zwei unabhängige Randbedingungen. Wir werden später zeigen, dass dieses Problem nur  $u = 0$  als Lösung hat, jedenfalls nachdem wir Lösungen vernünftig definiert haben.

- *Anscheinend sind bei partiellen Differentialgleichungen die Randbedingungen, die Eindeutigkeit garantieren, abhängig von einer Klassifizierung der betreffenden Differentialgleichung.*

Übrigens erscheint die Differentialgleichung aus den letzten beiden Beispielen bei einer schwingenden Saite. Dass man sich erstmal die partiellen Differentialgleichungen anschaut, die eine Anwendung haben, ist nicht nur, weil man nur an Anwendungen interessiert sein soll. Der eigentliche Grund für eine solche Einschränkung ist die Tatsache, dass jeder Typ seine Eigenarten hat. Man kann beliebig wilde Kombinationen von partiellen Ableitungen aufschreiben und versuchen dazu etwas zu sagen. Die Theorie von „Allem“ gibt es aber nicht.

Wir beenden dieses Kapitel mit einer Bemerkung von Jac-

ques-Louis Lions<sup>3</sup>, der Alan Turing<sup>4</sup> wie folgt zitiert haben soll:

*PDE's are made by God, the boundary conditions by the Devil!*

---

<sup>3</sup>Jacques-Louis Lions, 1928-2001, französischer Mathematiker mit wesentlichen Beiträgen zu Randbedingungen für partielle Differentialgleichungen

<sup>4</sup>Alan Mathison Turing, 1912-1954, englischer Mathematiker, der auf vielen Gebieten der Mathematik gearbeitet hat.



# Partielle Differentialgleichungen

# Woche 2

## Wiederholung und Neuanfang

### 2.1 Differentialgleichungen und klassische Lösungen

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine Funktion, nennen wir sie  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , der Form

$$F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x), \dots, \nabla^m u(x)) = 0 \text{ mit } x \in \Omega. \quad (2.1)$$

Hier ist  $\Omega$  ein *Gebiet*, das heißt, eine offene zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ , und

$$\nabla^k u = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} u \right\}_{i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}}.$$

Für  $k = 1$  bekommt man den Gradienten und für  $k = 2$  schreibt man

$$\nabla^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} u \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} u & \dots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} u \end{pmatrix}.$$

Man bemerke, dass  $\nabla^2$  nicht dasselbe ist wie  $\nabla \cdot \nabla$ . Die höchste Ableitung, die in (2.1) erscheint, nennt man die *Ordnung der Differentialgleichung*.

Oft hat eine Variable eine besondere Rolle, nämlich diejenige, die in dem Modell die Zeit darstellen soll, und diese wird üblicherweise mit  $t$  notiert. Für die Ableitung verwendet man neben  $\frac{\partial}{\partial t}$  auch  $\partial_t$ . Auch verwendet man manchmal den Multiindex<sup>1</sup> und schreibt  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$ ,  $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$  oder  $\partial_x^\alpha$ .

Die Frage, ob und wenn ja, welche Lösungen eine solche Differentialgleichung hat, lässt sich meistens nur sinnvoll beantworten, wenn passende Rand- oder Anfangswerte gegeben werden. Ein Theorem wie das von Picard-Lindelöf für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen,

<sup>1</sup>Wir haben hier die *Multiindex*-Notation verwendet:  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  bedeutet  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  mit  $\alpha_i \in \mathbb{N}$  und man setzt

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Man schreibt außerdem  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .

gibt es nicht allgemein für partielle Differentialgleichungen. In einer Vorlesung zu partiellen Differentialgleichungen wird man dann auch nicht versuchen, die Theorie für alles zu bringen, sondern man wird sich mit den Typen, die in den Anwendungen auftauchen, beschäftigen. Wir werden dann auch, bevor wir näher auf die verschiedenen Typen eingehen, im nächsten Kapitel erst einige dieser Anwendungen vorstellen.

Bevor wir mit einigen Modellen anfangen, sollte man etwas zum Begriff „Lösung“ sagen.

**Definition 2.1** Man nennt eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine klassische Lösung von der Differentialgleichung  $m$ -ter Ordnung in (2.1), wenn folgendes gilt:

- $u \in C^m(\Omega)$ , das heißt alle Ableitungen bis Ordnung  $m$  existieren und sind stetig auf  $\Omega$ , und
- $u$  erfüllt die Gleichung (2.1) für alle  $x \in \Omega$ .

**Bemerkung 2.1.1** Soll die Lösung zusätzlich Randbedingungen erfüllen, dann reicht die Menge  $C^m(\Omega)$  nicht. Um Randwerte zu betrachten wird Stetigkeit oder sogar Differenzierbarkeit auf  $\bar{\Omega}$ , also inklusive des Randes, notwendig sein. Mehr dazu findet man in dem nächsten Abschnitt.

**Aufgabe 2.1** Wenn  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  radialsymmetrisch ist, also  $u(x) = \tilde{u}(|x|)$ , dann gilt

$$\Delta u(x) = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r) \right)_{r=|x|}.$$

Wir definieren  $\tilde{u} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\tilde{u}(r) = \begin{cases} a + \gamma(1 - r^2) & \text{für } r \leq 1, \\ a r^{-1} & \text{für } r > 1. \end{cases}$$

1. Für welche Konstanten  $a$  und  $\gamma$  ist  $\tilde{u}$  eine Lösung von

$$-r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r) \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } r \in (0, 1] \\ 0 & \text{für } r \in (1, \infty) \end{cases} ?$$

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung kann man als System schreiben. Da wird dann eine Lösung definiert, wenn  $\tilde{u}, \tilde{u}' \in C^1(\mathbb{R}^+ \setminus I)$ , bei der  $I$  eine Menge isolierter Punkte ist, an der die DGL nicht unbedingt erfüllt sein muss.

2. Ist  $u(x) = \tilde{u}(|x|)$  für diese  $a$  und  $\gamma$  eine klassische Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}} & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0, \end{cases} ?$$

Hier ist  $\mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}$  definiert als 1, wenn die Bedingung  $x \leq 1$  erfüllt ist, und sonst als 0.

## 2.2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

### 2.2.1 Stetigkeit

Wie war das noch mit gleichmäßig und gleichgradig?

- Eine Funktion  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig in  $x \in A$ , wenn: Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta_{\varepsilon, x} > 0$  derart, dass für alle  $y \in A$  mit  $|x - y| < \delta_{\varepsilon, x}$  gilt  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .
- Eine Funktion  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig auf  $A$ , wenn sie stetig ist in jedem  $x \in A$ .

- Eine Funktion  $u : A \rightarrow \mathbb{R}$  heißt gleichmäßig stetig auf  $A$ , wenn:

Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta_\varepsilon > 0$  derart, dass

für alle  $x, y \in A$  mit  $|x - y| < \delta_\varepsilon$  gilt  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Wenn  $A$  kompakt ist, dann ist jede stetige Funktion auf  $A$  gleichmäßig stetig. Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Beschränkt bedeutet: es gibt  $M \in \mathbb{R}^+$  mit  $A \subset \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq M\}$ .

- Sei  $A$  kompakt. Dann nennt man eine Familie von Funktionen  $\mathcal{F} = \{f_i : A \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$  gleichgradig stetig, wenn

Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta_\varepsilon > 0$  derart, dass

für alle  $f_i \in \mathcal{F}$  und für alle  $x, y \in A$  mit  $|x - y| < \delta_\varepsilon$  gilt  $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$ .

## 2.2.2 Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen

Wir wiederholen die Definitionen von  $C^m(\Omega)$  und die einiger verwandter Funktionenräume.

**Definition 2.2** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ .  $C^m(\Omega)$  ist der Vektorraum aller Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $m$ -mal differenzierbar sind und alle zugehörigen Ableitungen, das heißt alle Ableitungen von Ordnung kleiner gleich  $m$ , sind stetig.

**Bemerkung 2.2.1** Man definiert  $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$ .

Wenn  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$   $m$ -mal differenzierbar ist, sagt man auch  $u \in C^m(\Omega)$ . Nur wenn man explizit zeigen möchte, dass man Funktionen mit Werten in  $\mathbb{R}^k$  hat, wird  $C^m(\Omega; \mathbb{R}^k)$  geschrieben.

Auch begegnet man  $C^m(\bar{\Omega})$ . Die Definitionen dieser Räume sind etwas weniger geradeaus.

**Definition 2.3** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ .

1. Man definiert  $C^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$  als den Vektorraum aller stetigen Funktionen  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ .
2. Für  $m \geq 1$  wird  $C^m(\bar{\Omega})$  iterativ definiert als der Vektorraum aller stetigen Funktionen  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit:

- $u|_\Omega \in C^m(\Omega)$ , ( $u|_\Omega$  ist die Einschränkung von  $u$  auf  $\Omega$ ) und
- es gibt  $g_1, \dots, g_n \in C^{m-1}(\bar{\Omega})$  mit  $g_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$  für  $x \in \Omega$ .

**Bemerkung 2.3.1** Durch diese Definition haben wir das Problem vom Differenzieren am Rande vermieden. Im Nachhinein, wenn  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  gilt, schreiben wir wieder  $\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) := g_i(x)$  auf  $\bar{\Omega}$ . Ähnliches machen wir mit höheren Ableitungen.

Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt ist, ist  $\bar{\Omega}$  kompakt und für  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  existiert  $\sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ . Für beschränkte Gebiete  $\Omega$  und  $u \in C^m(\bar{\Omega})$  ist  $\|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})}$  durch

$$\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \sum_{k=0}^m \sup_{x \in \Omega} |\nabla^k u(x)|, \quad (2.2)$$

also wohldefiniert. Für  $|\cdot|$  nimmt man die euklidische Norm in  $\mathbb{R}^{n^k}$ . Weil diese hier jedoch jeweils nur endlich viele Komponenten hat, kann man äquivalente Normen finden:

$$\max_{1 \leq i \leq \ell} |\xi_i| \leq \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_\ell^2} \leq \sqrt{\ell} \max_{1 \leq i \leq \ell} |\xi_i| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^\ell.$$

So wird  $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$  ein normierter Vektorraum.

**Bemerkung 2.3.2** Wenn klar ist, welches Gebiet gemeint ist, schreibt man auch

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \|u\|_\infty.$$

Übrigens ist  $\|\cdot\|_\infty$  auch eine Norm für den Raum  $L^\infty(\Omega)$  der beschränkten Funktionen auf  $\Omega$ .

**Bemerkung 2.3.3** Auf nicht abgeschlossenen oder unbeschränkten Gebieten gibt es unbeschränkte stetige Funktionen. So wie  $C^m(\Omega)$  hier definiert ist, kann man (2.2) also nicht als Norm für  $C^m(\Omega)$  verwenden. Das gleiche trifft zu für  $C^m(\bar{\Omega})$  mit  $\Omega$  unbeschränkt.

### 2.2.3 Vollständigkeit bei $C(\bar{\Omega})$

**Theorem 2.4 (Arzelà-Ascoli)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und sei  $\{f_n \in C(\bar{\Omega})\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine gleichmäßig beschränkte, gleichgradig stetige Folge von Funktionen. Dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

**Bemerkung 2.4.1** Die Folge  $\{f_n \in C(\bar{\Omega})\}_{n \in \mathbb{N}}$  heißt gleichmäßig beschränkt, wenn es  $M \in \mathbb{R}^+$  gibt mit

$$|f_n(x)| \leq M \text{ für alle } x \in \Omega \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

**Proposition 2.5** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $m \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$  ein Banachraum.

**Bemerkung 2.5.1** Ein normierter Vektorraum heißt Banachraum, wenn jede Cauchy-Folge<sup>2</sup> konvergent im Raum ist.

**Beweis.** Wir betrachten vorerst den Fall  $m = 0$ . Sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(C^0(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^0(\bar{\Omega})})$ . Dann gilt:

1. Der Grenzwert  $\tilde{u}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x)$  existiert für jedes  $x \in \bar{\Omega}$ , denn  $\{u_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}$  ist vollständig.
2. Gleichmäßige Konvergenz: Sei  $N_\varepsilon > 0$  derart, dass  $\|u_k - u_\ell\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $k, \ell > N_\varepsilon$ . Für jedes  $x$  gibt es  $N_{x,\varepsilon}$  derart, dass  $|u_\ell(x) - \tilde{u}(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$  für  $\ell > N_{x,\varepsilon}$ . Man nehme nun  $\ell_x = \max(N_{x,\varepsilon}, N_\varepsilon) + 1$  und finde

$$|u_k(x) - \tilde{u}(x)| \leq |u_k(x) - u_{\ell_x}(x)| + |u_{\ell_x}(x) - \tilde{u}(x)| < \varepsilon.$$

Weil dies für beliebiges  $x$  gilt, folgt  $k \geq N_\varepsilon$  impliziert  $\|u_k - \tilde{u}\|_\infty < \varepsilon$ . Also konvergiert  $\{u_k\}$  nicht nur punktweise, sondern sogar gleichmäßig nach  $\tilde{u}$ .

3. Der Limes  $\tilde{u}$  ist stetig: Sei  $\varepsilon > 0$ , nehme  $k$  genügend groß, so dass  $\|\tilde{u} - u_k\|_\infty < \frac{1}{3}\varepsilon$  und nehme  $\delta_{\varepsilon,k} > 0$  derart, dass

<sup>2</sup>Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum.  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$  ist eine Cauchy-Folge, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : k, \ell > m \implies \|u_k - u_\ell\| < \varepsilon.$$

$|x - y| < \delta_{\varepsilon, k}$  impliziert  $|u_k(x) - u_k(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Es folgt

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq |\tilde{u}(x) - u_k(x)| + |u_k(x) - u_k(y)| + |u_k(y) - \tilde{u}(y)| < \varepsilon.$$

Es gibt also  $\tilde{u} \in C^0(\bar{\Omega})$  derart, dass  $\|u_k - \tilde{u}\|_{\infty} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Die Aussage für  $m = 0$  ist bewiesen.

Sei nun  $m \geq 1$  und  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $(C^m(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})})$ . Aus dem ersten Teil dieses Beweises wissen wir, dass es für jede Ableitung  $(\frac{\partial}{\partial x})^{\alpha}$  mit  $|\alpha| \leq m$  eine stetige Funktion  $g_{\alpha} \in C^0(\bar{\Omega})$  gibt mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} u_k - g_{\alpha} \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0.$$

Sei nun  $a \in \Omega$  und nehme  $h > 0$  derart, dass

$$[a - he_i, a + he_i] \subset \Omega.$$

Weil

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u_k - g_i \right\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0 \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - g_0\|_{C^0(\bar{\Omega})} = 0,$$

gilt, folgt gleichmäßig für  $t \in [-h, h]$ , dass

$$u_k(a + te_i) - u_k(a) \rightarrow g_0(a + te_i) - g_0(a)$$

und

$$u_k(a + te_i) - u_k(a) = \int_{[a, a+te_i]} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k(x) dx_i \rightarrow \int_{[a, a+te_i]} g_i(x) dx_i.$$

Also gilt

$$g_0(a + te_i) = g_0(a) + \int_{[a, a+te_i]} g_i(x) dx_i \text{ für } t \in [-h, h].$$

Man findet, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_0(a) = \left( \frac{\partial}{\partial t} g_0(a + te_i) \right)_{|t=0} = g_i(a).$$

Ähnliches gilt für jede Ableitung und die Kombination ergibt  $g_{\alpha} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} \tilde{u}$ , das heißt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - \tilde{u}\|_{C^m(\bar{\Omega})} = 0,$$

oder anders gesagt,  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine konvergente Folge in  $C^m(\bar{\Omega})$ . ■

**Bemerkung 2.5.2** Man begegnet auch  $C^{m, \gamma}(\bar{\Omega})$  mit  $m \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1]$ :

$$C^{m, \gamma}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^m(\bar{\Omega}); \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} u \right]_{\gamma} < \infty \text{ für } |\alpha| = m \right\},$$

wobei  $[\cdot]_{\gamma}$  eine Seminorm ist, definiert durch

$$[u]_{\gamma} = \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\gamma}}.$$

Man nennt  $C^{0, \gamma}(\bar{\Omega})$  mit  $\gamma \in (0, 1)$  die zum Exponenten  $\gamma$  Hölder<sup>3</sup>-stetige Funktionen.

<sup>3</sup>Otto Ludwig Hölder, Stuttgart 1859 - Leipzig 1937

Die Vektorräume  $C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$  werden Hölder-Räume genannt. Die Norm für diese Räume wird wie folgt definiert:

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \sup_{|\alpha|=m} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u \right]_\gamma.$$

Im Fall, dass  $m = 0$  und  $\gamma = 1$ , also  $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ , bekommt man die Lipschitz<sup>4</sup>-stetigen Funktionen auf  $\bar{\Omega}$ .

**Aufgabe 2.2** Die Funktion  $u \in C(\bar{B}_1(0))$ , definiert durch

$$u(x, y) = (1+x) \log((1+x)^2 + y^2) - 2y \arctan\left(\frac{y}{1+x}\right),$$

für  $(x, y) \in B_1(0)$ , erfüllt  $\Delta u(x, y) = 0$  in  $B_1(0)$ .

In welchen Räumen  $C^{k,\gamma}(\bar{B}_1(0))$  liegt sie?

Schlussendlich gibt es noch einige Funktionsmengen, die sich mit besonderem Verhalten am Rand beschäftigen.

**Definition 2.6** Man definiert  $C_0^m(\bar{\Omega})$  als die Teilmenge von  $C^m(\bar{\Omega})$  der Funktionen  $u$  mit  $\nabla^k u(x) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $k \leq m$ .

**Bemerkung 2.6.1** Sei  $\Omega$  beschränkt. Dann ist  $C_0^m(\bar{\Omega})$ , als eine abgeschlossene Teilmenge von  $C^m(\bar{\Omega})$ , bezüglich der  $\|\cdot\|_{C^m(\bar{\Omega})}$ -Norm ein Banachraum.

<sup>4</sup>Rudolf Otto Sigmund Lipschitz, Bönkein 1832 - Bonn 1905

**Definition 2.7** Man definiert  $C_0^\infty(\Omega)$  als die Teilmenge der Funktionen  $u \in C^\infty(\Omega)$  mit kompaktem Träger<sup>5</sup> innerhalb von  $\Omega$ .

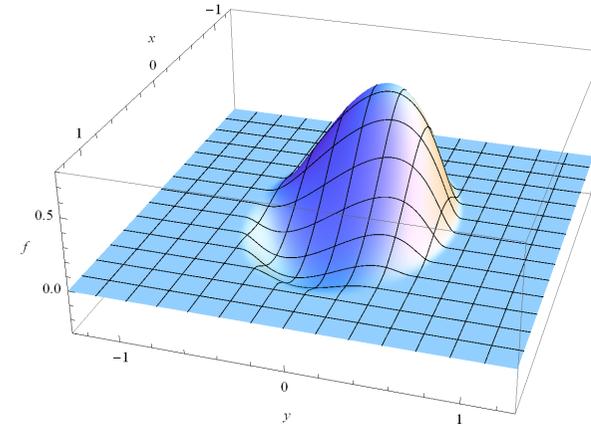


Abbildung 2.1: Darstellung der Funktion aus Beispiel 2.8.

**Beispiel 2.8** Man kann sich fragen, ob die Menge  $C_0^\infty(\Omega)$  nicht leer ist. Hier ist ein Beispiel einer solchen Funktion. Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x^2 + 2y^2 \geq 1, \\ (1+x^2+2x-3y) \exp\left(\frac{-1}{1-x^2-2y^2}\right) & \text{sonst,} \end{cases}$$

<sup>5</sup>Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $u \in C(A)$ . Der Träger von  $u$  ist die abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  definiert durch:

$$\text{support}(u) = \overline{\{x \in A; u(x) \neq 0\}}.$$

hat einen kompakten Träger, ist beliebig oft stetig differenzierbar und liegt also in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dass sie beliebig oft differenzierbar ist, findet man mit den Standardableitungsregeln, wenn  $x^2 + 2y^2 \neq 1$ . Weil  $\lim_{t \rightarrow -\infty} t^n e^t = 0$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , folgt  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = 0$  für  $x^2 + 2y^2 = 1$ . Durch Induktion findet man, dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) = 0 \text{ für } x^2 + 2y^2 = 1$$

und dass die Ableitungen  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f$  alle stetig sind.

Gelegentlich findet man auch  $C_c^m(\bar{\Omega})$  und  $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ . Mit  $C_c^m(\bar{\Omega})$  meint man die Teilmenge der Funktionen  $u \in C^m(\bar{\Omega})$ , beziehungsweise  $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ , mit kompaktem Träger.

## 2.3 Intermezzo zu glatten Rändern

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hat man neben dieser Differentialgleichung oft Anfangs- oder Randwerte, aber die sollen nur an einigen Punkten erfüllt sein. Bei partiellen Differentialgleichungen in  $n$  Dimensionen werden Anfangs- oder Randwertbedingungen typischerweise auf  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert. Häufig hat man zu tun mit Gebieten, die Ecken oder Kanten haben. Solche Gebiete sorgen für spezifische Probleme, die kaum in einer Anfängervorlesung angesprochen werden können.

**Beispiel 2.9** Wir definieren die Funktion  $u_\alpha$  für  $\alpha \in (0, 2\pi)$  mit Hilfe von Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$

$$u_\alpha(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right)$$

für  $r \in [0, 1]$  und  $\varphi \in [0, \alpha]$ . Der Differentialoperator  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  in Polarkoordinaten wird  $\Delta = \frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2$  und es folgt

$$\begin{aligned} (\Delta u_\alpha)(r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= \\ &= \left(\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2\right) r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = \\ &= \frac{1}{r} \partial_r \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) + \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \partial_\varphi^2 \cos\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = \\ &= \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) - \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 r^{\frac{\pi}{\alpha}-2} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) = 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} u_\alpha(\cos \varphi, \sin \varphi) &= \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right), \\ u_\alpha(x, 0) &= u_\alpha(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Wir haben eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u_\alpha = 0 & \text{in } \Omega_\alpha, \\ u_\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right) & \text{auf } \partial\Omega_\alpha. \end{cases}$$

Hier ist  $\Omega_\alpha = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; 0 < r < 1 \text{ und } 0 < \varphi < \alpha\}$  und  $\partial\Omega_\alpha$  der Rand des Gebietes.

Trotz der Tatsache, dass der Sinus eine unendlich oft differenzierbare Funktion ist, ist die Lösung nicht unbedingt differenzierbar. Die Differenzierbarkeit in 0 hängt ab von der Öffnung  $\alpha$ :

$$(\partial_r u_\alpha)(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = \frac{\pi}{\alpha} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1} \sin\left(\frac{\pi}{\alpha} \varphi\right)$$

und nur für  $\alpha \leq \pi$  existiert  $(\partial_v u_\alpha)(0)$  für  $v = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \end{pmatrix}$ .

Skizzen zu diesen Funktionen  $u_\alpha$  findet man in Abbildung 2.2.

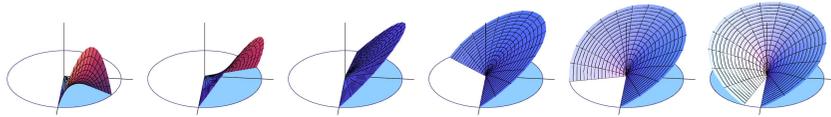


Abbildung 2.2: Funktionen  $u_\alpha$  mit  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ .

Das Beispiel zeigt, dass in den Ecken des Gebietes eine Lösung nicht unbedingt differenzierbar sein muss. Es bedeutet auch, dass man, um Ergebnisse genau formulieren zu können, die Regularität des Randes genau klassifizieren soll.

Für den Rand des Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  schreibt man  $\partial\Omega$ . Dieser Rand ist definiert durch

$$\partial\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } \begin{array}{l} B_\varepsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ und} \\ B_\varepsilon(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset \end{array} \right\}.$$

**Definition 2.10** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Man sagt  $\partial\Omega \in C^m$ , wenn es  $M \in \mathbb{N}^+$  gibt mit für  $1 \leq i \leq M$ :

- kartesische Koordinatensysteme  $\{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)}\}$ ,
- offene Blöcke  $B^{(i)} = (a_1^{(i)}, b_1^{(i)}) \times \dots \times (a_n^{(i)}, b_n^{(i)})$ ,
- Funktionen  $\psi^{(i)} \in C^m \left( [a_1^{(i)}, b_1^{(i)}] \times \dots \times [a_{n-1}^{(i)}, b_{n-1}^{(i)}] \right)$ ,

und diese sind derart, dass folgendes gilt:

1.  $\partial\Omega$  wird überdeckt, also  $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^M B^{(i)}$ , und

2.  $\Omega \cap B^{(i)} = \left\{ y \in B^{(i)}; y_n^{(i)} > \psi^{(i)} \left( y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)} \right) \right\}$ .

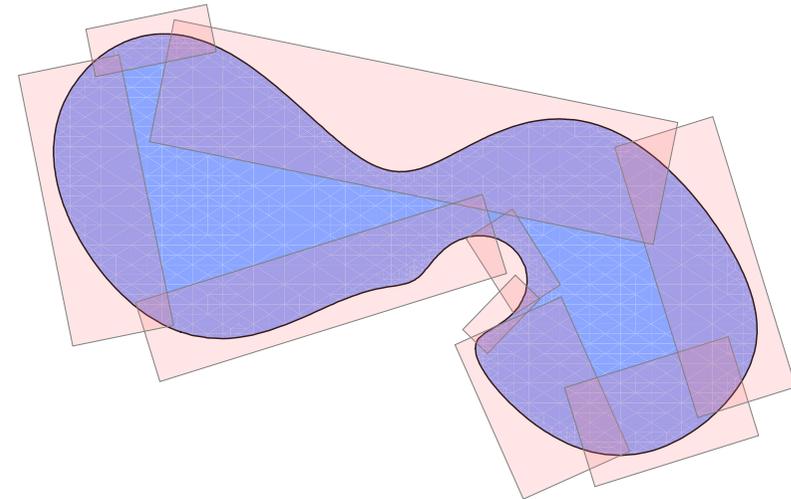


Abbildung 2.3: Mit Hilfe von lokalen Koordinaten, Blöcke  $B^{(i)}$  und Funktionen  $\psi^{(i)}$  wird die Regularität von  $\partial\Omega$  definiert.

**Bemerkung 2.10.1** Man kann diese Definition anpassen für  $\partial\Omega \in C^{m,\gamma}$ .

**Bemerkung 2.10.2** Wenn  $\Omega$  unbeschränkt ist, soll dies gelten mit lokal endlich vielen offenen Blöcken. Das heißt, es darf abzählbar unendlich viele Blöcke geben ( $M = \infty$ ), jedoch soll man auf jedem Kompaktum nur endlich viele verwenden müssen. Außerdem sollen die  $C^m$ -Normen der Funktionen  $\psi^{(i)}$  gleichmäßig beschränkt sein.

Die Blöcke können also rotiert sein bezüglich der Standardbasis. Man nimmt sie offen, damit diese Blöcke sich notwendigerweise überlappen müssen und sich keine Singularitäten

bei der Verknüpfung verstecken können. Aus der zweiten Bedingung folgt außerdem, dass das Gebiet  $\Omega$  mit  $\partial\Omega \in C^0$  lokal immer an einer Seite des Randes liegt. Ein typisches Bild findet man in Abbildung 2.3.

**Beispiel 2.11** Für einen (Hyper)Kubus  $\Omega = (0, 1)^n$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  gilt  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ .

**Beispiel 2.12** Für eine (Hyper)Kugel  $\Omega = B_1(0)$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 2$  gilt  $\partial\Omega \in C^\infty$ . Man braucht mindestens  $n + 1$  Blöcke  $B^{(i)}$ .

**Bemerkung 2.12.1** Nicht jedes Gebiet hat einen  $C^0$ -Rand. Siehe Abbildung 2.4.

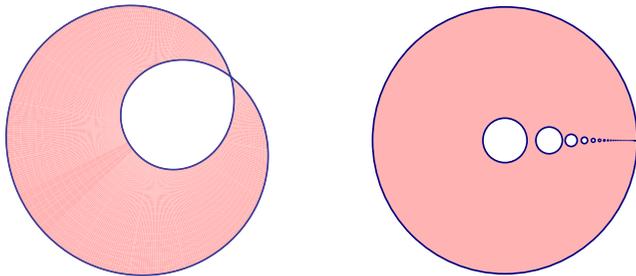


Abbildung 2.4: Zwei Gebiete, die nicht unsere  $C^0$ -Bedingung erfüllen. Beim „Doppelspitz“ links liegt  $\Omega$  nicht an einer Seite vom Rand. Rechts reichen nicht endlich viele Blöcke.

**Aufgabe 2.3** Welcher Rand is glatt? Bestimmen Sie für welche Koeffizienten  $\partial\Omega \in C^{k,\gamma}$  gilt.

1.  $\partial\Omega = \{(\sin(t) \cos(t), \sin(t)^2); t \in [0, \pi]\}$ .
2.  $\partial\Omega = \{(\sin(t) \cos(t), \sin(t)); t \in [0, \pi]\}$ .
3.  $\partial\Omega = \{(\sin(t)^2 \cos(t), \sin(t)^3); t \in [0, \pi]\}$ .

Hinweis: bei einer gilt  $\partial\Omega \in C^{1,\frac{1}{2}}$ .

Skizzen dieser Gebiete findet man in Abbildung 2.5.

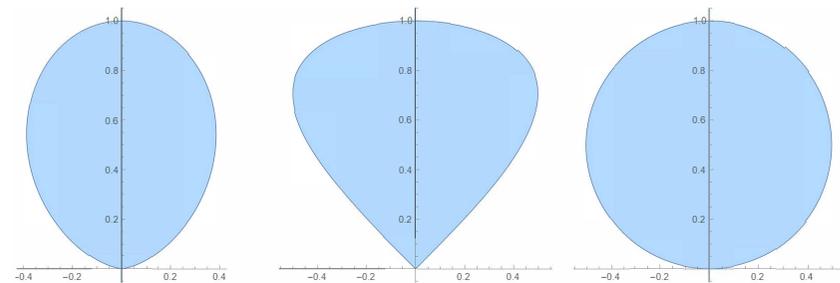


Abbildung 2.5: Die Gebiete aus Aufgabe 2.3, aber nicht in der richtigen Folge

Noch etwas müsste man festlegen. Wenn man eine Funktion hat, die nur auf dem Rand definiert ist, wann kann man eine solche Funktion differenzierbar nennen?

**Definition 2.13** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$  und sei  $m \leq k$ . Sei  $\{\psi^{(i)}\}$  eine Menge endlich vieler Funktionen wie in Definition 2.10. Dann nennt man  $u \in C^m(\partial\Omega)$ , wenn

$$\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}\right) \mapsto u\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}, \psi^{(i)}\left(y_1^{(i)}, \dots, y_{n-1}^{(i)}\right)\right) \in C^m,$$

für jedes dieser  $\psi^{(i)}$ .

**Bemerkung 2.13.1** Man kann zeigen, dass diese Definition nicht abhängt von den gewählten Parametrisierungen  $\{\psi^{(i)}\}$ .

**Bemerkung 2.13.2** Die Definition wird angepasst, wenn man u nur auf einen Teil des Randes  $\Gamma \subset \partial\Omega$  als  $C^m(\Gamma)$  beschreiben möchte.

## 2.4 Integration in $\mathbb{R}^n$

Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet ist und  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, dann sollte man seit der Vorlesung Analysis 2 wissen wie

$$\int_{\Omega} u(x) dx$$

definiert ist. Spätestens weiß man nach dem Satz von Fubini-Tonelli, dass man ein solches Integral vor dem Berechnen als wiederholtes Integral schreiben kann, jedenfalls, wenn man  $\Omega$  schön zerlegen kann. Schön heißt hier zum Beispiel, dass man die Menge wie folgt schreiben kann:

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \begin{aligned} &X_{1,u} < x_1 < X_{1,o}, \\ &X_{2,u}(x_1) < x_2 < X_{2,o}(x_1), \\ &X_{3,u}(x_1, x_2) < x_3 < X_{3,o}(x_1, x_2), \\ &\dots \\ &X_{n,u}(x_1, \dots, x_{n-1}) < x_n < X_{n,o}(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \right\},$$

für irgendwelche genügend nette Funktionen  $X_{i,u}, X_{i,o}$ .

Mit dem Satz von Fubini-Tonelli folgt

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \int_{X_{1,u}}^{X_{1,o}} \int_{X_{2,u}(x_1)}^{X_{2,o}(x_1)} \dots \int_{X_{n,u}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{X_{n,o}(x_1, \dots, x_{n-1})} u(x) dx_n \dots dx_1.$$

Ob man ein solches Integral tatsächlich explizit berechnen kann, ist jedoch wieder eine ganz andere Frage.

**Beispiel 2.14** Gefragt wird

$$\int_{x_1^2 + x_2^2 < 2} x_1^2 e^{-x_2} dx.$$

Das Gebiet kann man wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 2\} = \\ &\left\{ x \in \mathbb{R}^2; |x_1| < \sqrt{2}, |x_2| < \sqrt{2 - x_1^2} \right\}. \end{aligned}$$

Fubini-Tonelli ergibt

$$\begin{aligned} \int_{x_1^2 + x_2^2 < 2} x_1^2 e^{-x_2} dx &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x_1^2}}^{\sqrt{2-x_1^2}} x_1^2 e^{-x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x_1^2 \left[ -e^{-x_2} \right]_{-\sqrt{2-x_1^2}}^{\sqrt{2-x_1^2}} dx_1 \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x_1^2 \left( -e^{-\sqrt{2-x_1^2}} + e^{\sqrt{2-x_1^2}} \right) dx_1 \end{aligned}$$

und dann hört hier der Spaß vom expliziten Rechnen auf.

**Definition 2.15** Das Volumen von  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  wird definiert als

$$\text{Volumen}(\Omega) := \int_{\Omega} 1 dx.$$

In  $\mathbb{R}^2$  wird das Volumen meistens Flächeninhalt genannt.

**Aufgabe 2.4** • Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < y\sqrt{1-y^2} \right\}.$$

• Berechnen Sie das Volumen von

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < z \right\}.$$

## 2.5 Integration über einen Rand

In der Analysis Vorlesung lernt man

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

Eine ähnliche Formel gibt es für mehrdimensionale Integrale. Bevor wir da etwas zu sagen können, folgt eine kurze Beschreibung zu Integralen über Mannigfaltigkeiten.

### 2.5.1 Kurvenlänge

Die Länge einer Geraden zwischen  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{R}^n$  findet man mittels

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Wenn die Kurve  $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$  ist, kann man deren Länge berechnen durch eine Approximation mit

Polygonzügen:

$$\begin{aligned} \ell(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| k\left(a + \frac{i+1}{n}(b-a)\right) - k\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left\| k'\left(a + \frac{i+1}{n}(b-a)\right) \right\| \frac{b-a}{n} = \int_a^b |k'(t)| dt. \end{aligned}$$

Für eine Kurve, die parametrisiert wird durch  $x \mapsto (x, y(x))$ , findet man

$$\ell(k) = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

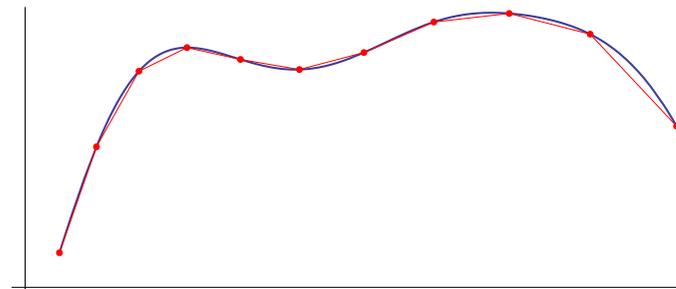


Abbildung 2.6: Bogenlänge wird approximiert mittels Polygonzug

### 2.5.2 Flächeninhalt einer Mannigfaltigkeit

Den  $(n-1)$ -dimensionalen Flächeninhalt von dem Teil der Hyperfläche in  $\mathbb{R}^n$ , der beschrieben wird durch

$$F = \{\theta_1 v_1 + \theta_2 v_2 + \theta_3 v_3 + \dots + \theta_{n-1} v_{n-1}; 0 \leq \theta_i \leq 1\}$$

mit  $v_i \in \mathbb{R}^n$ , kann man wie folgt finden. Man soll sich erinnern, dass das Volumen des Parallelepipedes  $P$  in  $\mathbb{R}^n$ , aufgespannt durch die Vektoren  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w\}$ , das heißt also

$$P = \{\theta_1 v_1 + \theta_2 v_2 + \dots + \theta_{n-1} v_{n-1} + \theta_n w; 0 \leq \theta_i \leq 1\},$$

durch die Determinante gegeben wird:

$$\text{Vol}(P) = |\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w)|.$$

Nehmen wir für  $w$  einen Normalenvektor bezüglich  $v_1, \dots, v_{n-1}$ , so haben wir

$$\text{Flächeninhalt}(F) = \frac{\text{Vol}(P)}{\|w\|}.$$

Im Fall, dass

$$\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\}$$

nehmen wir

$$w = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir finden direkt, dass  $w \perp v_i$ , und es folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(F) &= \frac{|\det(v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w)|}{\|w\|} = \\ &= \frac{1 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}{\sqrt{1 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}} = \sqrt{1 + z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

Wenn die  $(n-1)$ -dimensionale Oberfläche in  $\mathbb{R}^n$  parametrisiert wird durch

$$P : G \subset \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$$

mit

$$P(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, p(x_1, \dots, x_{n-1})) \quad (2.3)$$

und es gilt  $p \in C^1(\bar{\Omega})$ , dann kann man auch hier approximieren mittels einer Verteilung von  $G$  in Hyperquadern  $\{Q_i^\varepsilon\}_{i=1}^{m_\varepsilon}$  mit Eckpunkten  $x^{\varepsilon,i}$  und einer Linearisierung  $\ell_i^\varepsilon$  von  $p$  auf diesen Hyperquadern:

$$\begin{aligned} \text{Flächeninhalt}(p(\Omega)) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_i^{m_\varepsilon} \text{Flächeninhalt}(\ell_i^\varepsilon(Q_i^\varepsilon)) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_i^{m_\varepsilon} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}(x^{\varepsilon,i})\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial p}{\partial x_{n-1}}(x^{\varepsilon,i})\right)^2} \\ &= \int_G \sqrt{1 + |\nabla p(x)|^2} dx. \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.15.1** Für  $v_1, v_2, w \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$\det(v_1, v_2, w) = (v_1 \times v_2) \cdot w.$$

Wenn  $w = \nu$  ein Normalenvektor zu  $v_1, v_2$  ist, folgt

$$\frac{|\det(v_1, v_2, \nu)|}{\|\nu\|} = \frac{|(v_1 \times v_2) \cdot \nu|}{\|\nu\|} = \|v_1 \times v_2\|$$

und man findet

$$\text{Flächeninhalt}(\{\theta_1 v_1 + \theta_2 v_2; 0 \leq \theta_i \leq 1\}) = \|v_1 \times v_2\|. \quad (2.4)$$

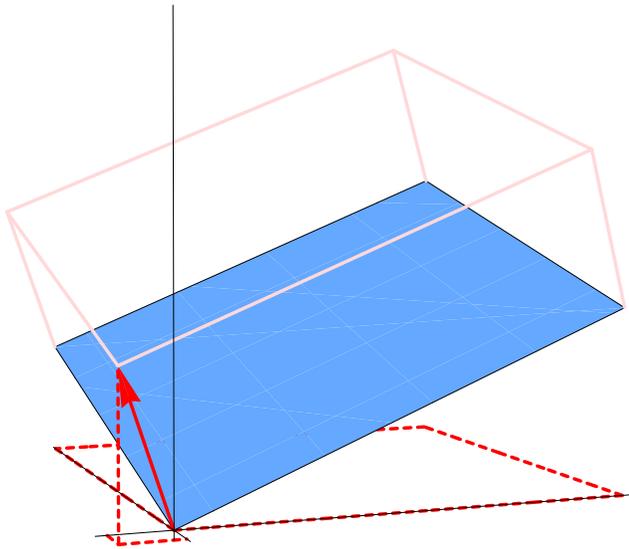


Abbildung 2.7: In drei Dimensionen die Fläche aus (2.4) und  $\nu = v_1 \times v_2$ .

### 2.5.3 Randintegrale

Für ein  $n$ -dimensionales Gebiet  $\Omega$ , bei dem man den Rand  $\partial\Omega$  in endlich viele Teile  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^k$  auseinandernehmen kann,

die einzeln, wie oben beschrieben, auf  $C^1$ -Art parametrisiert werden können, definiert man das Randintegral wie folgt:

**Definition 2.16** Sei  $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$  mit  $\Gamma_i^\circ \cap \Gamma_j^\circ = \emptyset$  und nehme an  $\Gamma_i = P^i(G_i)$  mit  $P^i \in C^1(\overline{G_i})$  wie in (2.3). Dann setzt man

$$\int_{\partial\Omega} g(x) d\sigma_x := \sum_{i=1}^k \int_{G_i} g(P^i(y^i)) \sqrt{1 + |\nabla p_i(y^i)|^2} dy^i. \quad (2.5)$$

Das rechte Integral in (2.5) ist ein  $(n-1)$ -dimensionales Integral und  $y^i = (y_1^i, \dots, y_{n-1}^i)$  sind die Koordinaten in einem zu  $G_i$  passenden lokalen kartesischen Koordinatensystem mit  $x = P^i(y^i)$ . Man sollte zeigen, dass die Definition dieses Randintegrals unabhängig ist von der gewählten Zerlegung des Randes und der Parametrisierung dieser Teile. Ein solcher Beweis führt hier zu weit und wir verweisen auf die Analysis 3 Vorlesung. Mehr allgemeine Parametrisierungen und die Anwendung beim Integrieren finden Sie in Definition 2.23.

**Aufgabe 2.5** Berechnen Sie den Flächeninhalt von

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z = 4 - 2(x^2 + y^2)\}.$$

## 2.6 Partielle Integration in $\mathbb{R}^n$

**Lemma 2.17** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  mit  $C^1$  Rand  $\partial\Omega$ . Seien  $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) \nu_i d\sigma_x - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} dx.$$

Hier ist  $\nu_i$  die  $i$ -te Komponente des auswendig zeigenden Einheitsnormalenvektors  $\nu$  an der Stelle  $x \in \partial\Omega$ .

**Beweis.** Dieser Beweis wird in zwei Dimensionen skizziert. In höheren Dimensionen funktioniert es ähnlich.

1) Wir nehmen an, dass wir die Integrale über  $\partial\Omega$  und  $\Omega$  mit Integralen über einen oder mehrere Polygonzüge beziehungsweise über das Innere dieser Polygonzüge approximieren dürfen.

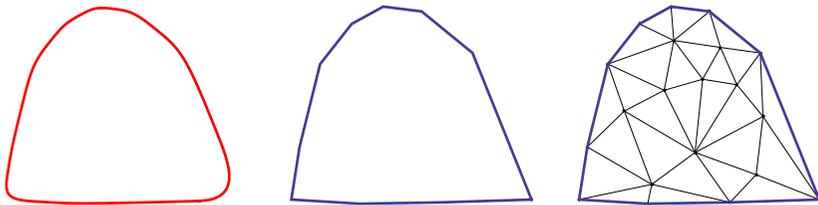


Abbildung 2.8: Approximieren und Zerlegen

2) Das Innere eines Polygonzugs kann man auffüllen mit Dreiecken. Dann reicht es, um die Aussage zu beweisen für Dreiecke, denn für  $\bar{\Omega} = \bigcup_{k=1}^m \bar{D}_k$ , mit  $D_k$  paarweise disjunkte offene Dreiecke, gilt

$$\int_{\Omega} h(x) dx = \sum_{k=1}^m \int_{D_k} h(x) dx \quad (2.6)$$

und

$$\int_{\partial\Omega} h(x) \nu_i d\sigma_x = \sum_{k=1}^m \int_{\partial D_k} h(x) \nu_i d\sigma_x. \quad (2.7)$$

Die Aussage in (2.6) folgt direkt; für die zweite muss man bemerken, dass alle inneren Randintegrale gegeneinander wegfallen durch das gegengesetzte Vorzeichen des äußeren Normalenvektors  $\nu$ .

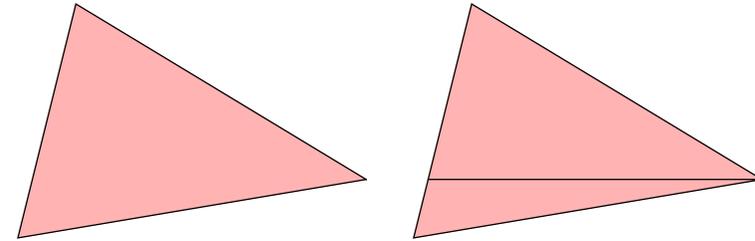


Abbildung 2.9: Eine triviale Zerlegung

3) Jedes Dreieck, das nicht eine Seite parallel an der  $i$ -Achse hat, kann man in zwei Dreiecke zerlegen, die beide eine Seite parallel an der  $i$ -Achse haben. Einfachheit halber nehmen wir an  $i = 1$ .

4) Sei  $D = \{(x, y); \ell_l(x_2) < x_1 < \ell_r(x_2) \text{ und } x_{2,u} < x_2 < x_{2,o}\}$  mit  $\ell_l$  und  $\ell_r$  zwei affine Abbildungen.

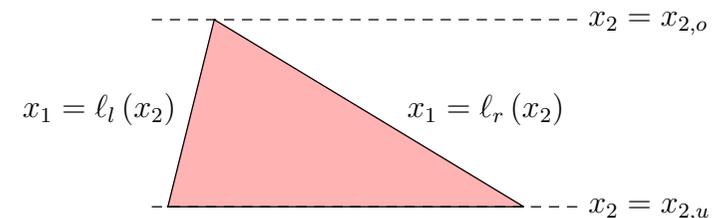


Abbildung 2.10: Ein Standard Dreieck

Mit Fubini-Tonelli finden wir

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} g(x) dx &= \int_{x_2=x_{2,u}}^{x_{2,o}} \left( \int_{x_1=\ell_l(x_2)}^{\ell_r(x_2)} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} g(x) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{x_2=x_{2,u}}^{x_{2,o}} \left( [f(x) g(x)]_{x_1=\ell_l(x_2)}^{x_1=\ell_r(x_2)} - \int_{x_1=\ell_l(x_2)}^{\ell_r(x_2)} f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{x_2=x_{2,u}}^{x_{2,o}} \left( f(\ell_r(x_2), x_2) g(\ell_r(x_2), x_2) \right. \\ &\quad \left. - f(\ell_l(x_2), x_2) g(\ell_l(x_2), x_2) \right) dx_2 \\ &\quad - \int_D f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx \\ &= \int_{\partial D} f(x) g(x) \nu_1 d\sigma_x - \int_D f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx. \end{aligned}$$

Man soll bemerken, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \text{links:} & \quad \text{''}\nu_1 d\sigma_x = -dx_2\text{''}, \\ \text{rechts:} & \quad \text{''}\nu_1 d\sigma_x = dx_2\text{''}, \\ \text{unten:} & \quad \text{''}\nu_1 d\sigma_x = 0\text{''.} \end{aligned}$$

■

**Theorem 2.18 (Gauß)** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  mit  $C^1$  Rand  $\partial\Omega$ . Seien  $F \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  und  $g \in C^1(\bar{\Omega})$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot F)(x) g(x) dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \nu g(x) d\sigma_x - \int_{\Omega} F(x) \cdot \nabla g(x) dx.$$

**Beweis.** Man wende Lemma 2.17 an mit  $f = F_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und addiere die Ergebnisse. ■

Weil  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ , oder genauer gesagt

$$\Delta = \text{div grad},$$

folgt aus Theorem 2.18, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u) w dx &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \nabla u) w dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu w dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

**Korollar 2.19 (Green)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit Rand  $\partial\Omega \in C^1$ . Seien  $u, w \in C^2(\bar{\Omega})$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} (\Delta u w - u \Delta w) dx = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} w - u \frac{\partial w}{\partial \nu} \right) d\sigma_x.$$

**Beweis.** Man verwende (2.8) für  $\Delta u w$  und für  $u \Delta w$ , und bemerke, dass  $\nabla u \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ . ■

**Aufgabe 2.6** Berechnen Sie

$$\int_{B_1(0)} \Delta \left( (1 - x^2 - y^2) e^{\sin(x^2+y^2)} \right) dx dy.$$

## 2.7 Integrale und Transformationen

Möchte man die Symmetrie eines Modells ausnutzen, dann kann es bequem sein, dass man die passenden Koordinaten verwendet. Zum Beispiel bei rotationssymmetrischen Problemen können Polar- und Kugelkoordinaten nützlich sein.

**Definition 2.20** 1. *Polarkoordinaten:*  $r > 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

2. *Zylinderkoordinaten:*  $r > 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = F(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ h \end{pmatrix}.$$

3. *Kugelkoordinaten in 3D:*  $r > 0$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $\theta \in [0, \pi]$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = F(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Möchte man ein Integral mit Hilfe dieser neuen Koordinaten berechnen, dann braucht man die folgende Transformationsregel:

**Theorem 2.21 (Transformationsatz)** Sei  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$  ein Diffeomorphismus und  $g$  eine integrierbare Funktion auf  $A$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} g(x) dx = \int_A (g \circ F)(y) |\det(\nabla F(y))| dy.$$

**Bemerkung 2.21.1** Hier gilt

$$\nabla F(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n(y)}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Man nennt  $|\det(\nabla F(y))|$  die zu der Transformation  $F$  gehörende *Jacobi-Determinante*.

Ein Beweis wird Ihnen in der Analysis 3 Vorlesung vorgeführt.

**Beispiel 2.22** Für  $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$  und

$$A = \{(r, \varphi, \theta); r \in (0, 1), \varphi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \pi)\}$$

finden wir

$$\begin{aligned} & \det(\nabla F(r, \varphi, \theta)) \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= -r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\int_{B_1(0)} g(x) dx = \int_{r=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} (g \circ F)(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr.$$

Auch für Mannigfaltigkeiten gibt es einen Transformationsatz.

**Definition 2.23** Sei  $M$  Teil einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ , die man mit der  $C^1$ -Funktion

$$F : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$$

eindeutig parametrisiert. Dann setzt man für  $g \in C(\bar{M})$ :

$$\begin{aligned} & \int_M g(x) d\sigma_m(x) \\ &:= \int_D (g \circ F)(y) \sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j} \right)} dy \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.23.1** 1.  $\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y)\right)_{i,j}$  ist eine  $m \times m$ -Matrix mit an der Stelle  $i, j$  das  $\mathbb{R}^n$ -Skalarprodukt von den Vektoren  $\frac{\partial F}{\partial y_i}(y)$  und  $\frac{\partial F}{\partial y_j}(y)$ . Im Fall, dass  $m = n$ , finden wir

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j} \right)} \\ &= \sqrt{\det \left( (\nabla F(y)) (\nabla F(y))^T \right)} \\ &= \sqrt{\det(\nabla F(y)) \det \left( (\nabla F(y))^T \right)} = |\det(\nabla F(y))| \end{aligned}$$

und es folgt das Ergebnis des Transformationssatzes.

- Das Ergebnis der Definition ist unabhängig von der Parametrisierung  $F$ . Das ist nicht selbstverständlich, sondern man sollte es beweisen.
- Für Hyperflächen stimmt dieses Integral überein mit dem standard  $m$ -dimensionalen Integral, wenn man ein passendes kartesisches Koordinatensystem nimmt.

**Beispiel 2.24** Die Einheitssphäre in  $\mathbb{R}^3$  können wir parametrisieren durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = F(\varphi, \theta) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\alpha = \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial \theta}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \det \left( \left( \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) \right)_{i,j} \right) &= \det \begin{pmatrix} \alpha \cdot \alpha & \alpha \cdot \beta \\ \beta \cdot \alpha & \beta \cdot \beta \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} (\sin \theta)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\sin \theta)^2. \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt finden wir

$$\int_M g(x) d\sigma_2(x) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \sqrt{(\sin \theta)^2} d\varphi d\theta = 4\pi.$$

**Beispiel 2.25** Für  $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$  kann man Koordinaten  $(r, \omega) \in [0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$  nehmen und man findet

$$\int_{B_R(0)} g(x) dx = \int_{r=0}^R \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} g(r\omega) r^{n-1} d\omega dr.$$

Ist  $g$  radialsymmetrisch, i.e.  $g(x) = \tilde{g}(|x|)$  dann findet man

$$\int_{B_R(0)} g(x) dx = s_n \int_0^R \tilde{g}(r) r^{n-1} dr$$

mit  $s_n = \text{Flächeninhalt}(\mathbb{S}^{n-1})$ .

**Beispiel 2.26** Für  $\Omega = B_R(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)} \subset \mathbb{R}^n$  und  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $v \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  findet man mit Gauß

$$\int_{\Omega} u(x) (\nabla \cdot v)(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \cdot \nu d\sigma_x - \int_{\Omega} (\nabla u)(x) \cdot v(x) dx.$$

Für das Randintegral gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \cdot \nu \, d\sigma_x \\ &= \int_{\partial B_R(0)} u(x) v(x) \cdot \frac{x}{|x|} \, d\sigma_x - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) v(x) \cdot \frac{x}{|x|} \, d\sigma_x \\ &= \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} (R^{n-1} u(R\omega) v(R\omega) - \varepsilon^{n-1} u(\varepsilon\omega) v(\varepsilon\omega)) \cdot \omega \, d\omega. \end{aligned}$$

Wenn  $|u(x) v(x)| \leq C |x|^\alpha$  auf  $B_1(0)$  und  $\alpha > 1 - n$ , dann findet man

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left| \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} \varepsilon^{n-1} u(\varepsilon\omega) v(\varepsilon\omega) \cdot \omega \, d\omega \right| \\ & \leq \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} \varepsilon^{n-1} C |\varepsilon\omega|^\alpha \, d\omega \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} s_n C \varepsilon^{\alpha+n-1} = 0. \end{aligned}$$

## Lösungen bei partiellen Differentialgleichungen

### 3.1 Lineare und nicht-lineare Differentialgleichungen

Wir nehmen an, dass die Differentialgleichungen in den folgenden Definitionen alle von Ordnung  $m$  sind.

**Definition 3.1** *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) = f(x) \quad (3.1)$$

mit  $a_\alpha$  und  $f$  gegeben und  $u$  gesucht, nennt man linear.

Diese Differentialgleichung heißt linear, weil der Differentialoperator

$$L = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$$

linear ist: Wenn  $Lu_1 = f_1$  und  $Lu_2 = f_2$ , dann gilt für beliebige  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , dass

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1f_1 + c_2f_2.$$

Die einfachste Änderung, die uns eine nicht-lineare Differentialgleichung liefert, ist die folgende:

**Definition 3.2** *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) = f(x, u) \quad (3.2)$$

mit  $a_\alpha$  und  $f$  gegeben und  $u$  gesucht, nennt man semilinear.

Es ist das Recht des Buchhalters, wenn er sagt, dass linear ja auch semilinear sei. Eine folgende Erweiterung ist:

**Definition 3.3** *Partielle Differentialgleichungen der Form*

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| = m}} a_\alpha(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1}u) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) \\ = f(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1}u) \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit  $a_\alpha$  und  $f$  gegeben und  $u$  gesucht, nennt man quasilinear.

Die restlichen partiellen Differentialgleichungen nennt man völlig nichtlinear.

## 3.2 Klassische Lösungen

Wenn man an Lösungen einer Differentialgleichung denkt, dann denkt man an Funktionen, die mit ihren Ableitungen punktweise die Gleichung erfüllen. Solche Lösungen nennt man klassisch. Es ist oft jedoch einfacher, statt punktweise, einen anderen Lösungstyp zu verwenden. Bevor wir solche nicht-klassischen Lösungen definieren, beschreiben wir die klassische Lösung.

**Definition 3.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und betrachte die partielle Differentialgleichung von Ordnung  $m$ :

$$f(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u) = 0 \quad (3.4)$$

Eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißt eine klassische Lösung von (3.4), wenn  $u \in C^m(\Omega)$  gilt und die Gleichung in (3.4) für alle  $x \in \Omega$  erfüllt ist.

**Bemerkung 3.4.1** Wenn wir zusätzlich auch eine Randbedingung festlegen wollen, dann reicht  $C^m(\Omega)$  nicht. Eine klassische Lösung vom Randwertproblem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} u + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

braucht  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ . Die Randbedingung kann man sogar angeben durch  $u \in C^2(\Omega) \cap C_0^0(\overline{\Omega})$ .

## 3.3 Nicht-klassische Lösungen

### 3.3.1 Schwache Ableitungen und Lebesgue

Für eine punktweise definierte Funktion ist die Definition einer partiellen Ableitung eindeutig. Gelegentlich wird man aber

eine Definition brauchen für die Ableitung einer Funktion, die nur als Äquivalenzklasse festgelegt ist. Wir erinnern an die  $L^p(\Omega)$ -Räume.

**Definition 3.5** Sei  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $L^p(\Omega)$  der Raum der Lebesgue-messbaren Funktionen  $f$ , für die gilt:  $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$  mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{1/p} & \text{für } p \in [1, \infty), \\ \text{ess sup } \{|f(x)|; x \in \Omega\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

**Bemerkung 3.5.1** Wenn man „Lebesgue-messbar“ nicht kennt, dann lese man „integrierbar“. Ohne Verständnis von Lebesgue-messbar ist es schwierig genau das essentielle Supremum zu definieren:

$$\text{ess sup } f := \inf_{x \in \Omega} \{m; \lambda \{f(x) > m\} = 0\}$$

mit  $\lambda$  das Lebesgue-Maß. Bei Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, die stetig sind mit Ausnahme endlich vieler Punkte gilt

$$\text{ess sup } f = \sup_{x \in \Omega} f.$$

**Beispiel 3.6** Betrachte die folgende Funktion mit (abzählbar) unendlich vielen Unstetigkeitsstellen:

$$u(x) = \begin{cases} n & \text{für } x \in \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^+\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

Man findet, dass

$$\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} u = 0 \quad \text{und} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} u = \infty.$$

Auch gilt, dass  $\|u\|_{L^1(0,1)} = 0$  und man kann  $u$  in  $L^1(0,1)$  nicht von 0 unterscheiden. Man sagt  $u = 0$  im  $L^1(0,1)$ -Sinne. Genauer findet man in der Vorlesung Analysis 3.

Man sagt  $u \in L^p_{\text{lokal}}(\Omega)$ , wenn für jedes Gebiet  $\Omega_1$  mit  $\overline{\Omega_1}$  kompakt und  $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$  gilt, dass  $u|_{\Omega_1} \in L^p(\Omega_1)$ . Dann ist  $u \in L^p_{\text{lokal}}(\Omega)$  zwar ein Vektorraum aber ohne Norm.

**Definition 3.7** Sei  $f$  eine Lebesgue-messbare Funktion. Man sagt  $\partial_{x_i} f$  existiert als schwache Ableitung in  $L^1_{\text{lokal}}(\Omega)$ , wenn es  $g \in L^1_{\text{lokal}}(\Omega)$  gibt mit

$$\int_{\Omega} (f(x) \partial_{x_i} \varphi(x) + g(x) \varphi(x)) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wenn  $f$  auf  $\Omega$  eine stetige klassische Ableitung nach  $x_i$  hat, dann folgt aus einer partiellen Integration, dass

$$\int_{\Omega} (f(x) \partial_{x_i} \varphi(x) + \partial_{x_i} f(x) \varphi(x)) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Also sind stetige klassische Ableitungen auch immer schwache Ableitungen. Und wenn auf eine offene Menge  $A \subset \Omega$  sowohl die klassische Ableitung als stetige Funktion, als auch die schwache Ableitung existieren, dann sind sie fast überall gleich auf  $A$ .

**Beispiel 3.8** Die Funktion  $f(x) = |x|$  hat  $g(x) = \text{sign}(x)$  als schwache Ableitung. Man definiert

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Sei  $\text{support}(\varphi) \subset [a, b]$  mit  $0 \in (a, b)$ . Dann gilt mit Hilfe der partiellen Integration, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (|x| \varphi'(x) + \text{sign}(x) \varphi(x)) dx \\ &= \int_a^0 (|x| \varphi'(x) + \text{sign}(x) \varphi(x)) dx \\ & \quad + \int_0^b (|x| \varphi'(x) + \text{sign}(x) \varphi(x)) dx \\ &= \int_a^0 (-x \varphi'(x) - \varphi(x)) dx + \int_0^b (x \varphi'(x) + \varphi(x)) dx \\ &= [-x \varphi(x)]_a^0 + [x \varphi(x)]_0^b = a \varphi(a) + b \varphi(b) = 0, \end{aligned}$$

weil  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .

**Beispiel 3.9** Die Funktion  $g(x) = \text{sign}(x)$  hat keine schwache Ableitung auf  $\mathbb{R}$ . Wenn  $h$  eine solche schwache Ableitung wäre, dann müsste sie außerhalb von 0 mit der klassischen Ableitung übereinstimmen im  $L^1$ -Sinne und dies bedeutet  $h(x) = g'(x) = 0$  fast überall. Es folgt für  $\varphi$  mit  $\text{support}(\varphi) \subset [a, b]$  und  $0 \in (a, b)$ , dass

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\mathbb{R}} h(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \text{sign}(x) \varphi'(x) dx = \\ &= - \int_a^0 \varphi'(x) dx + \int_0^b \varphi'(x) dx = 2\varphi(0), \end{aligned}$$

und dies ist ein Widerspruch, wenn man  $\varphi(0) \neq 0$  nimmt.

**Aufgabe 3.1** Welche Funktionen haben eine schwache Ableitung?

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .
2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = |x|^{-1/2}$ .

**Aufgabe 3.2** Hat die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = |x|^{-1/2}$  und  $n \geq 2$  schwache Ableitungen erster Ordnung? Ihre Antwort kann von  $n$  abhängen.

### 3.3.2 Sobolev-Räume

**Definition 3.10** Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in [1, \infty]$ . Man definiert den Sobolev<sup>1</sup>-Raum  $W^{k,p}(\Omega)$  als die Menge (der Äquivalenzklassen) der Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass  $u$  und deren schwache Ableitungen der Ordnung  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq k$  in  $L^p(\Omega)$  liegen.

**Bemerkung 3.10.1**  $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$  mit Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} u(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

ist ein vollständiger Banach-Raum.

**Bemerkung 3.10.2** Wie kann man herausfinden, ob eine Funktion  $u$  in  $W^{k,p}(\Omega)$  liegt? Wenn  $\Omega$  beschränkt ist und für diese Funktion gilt, dass  $u \in C^k(\Omega)$ , dann ist man fertig, weil

<sup>1</sup>Sergei Lwowitsch Sobolew, 1908-1989, war ein Russischer Mathematiker. Er arbeitete an Partiellen Differentialgleichungen, Funktionalanalysis, Numerischer Mathematik und ... Uranisotopenanreicherung.

alle Ableitungen von Ordnung kleiner gleich  $k$  stetig sind, und dann auch messbar, und sogar integrierbar, weil

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left( \int_{\Omega} 1 dx \right)^{1/p} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{Vol}(\Omega)^{1/p} \|v\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Wenn  $u \in C^k(\Omega \setminus \text{Nullmengen})$ , und Nullmengen in  $\mathbb{R}^n$  sind zum Beispiel alles von Dimension  $n-1$  oder niedriger, dann soll man schauen, dass die Ableitungen von Ordnung kleiner gleich  $k$  noch integrierbar sind als Funktion in  $L^p(\Omega)$ .

**Beispiel 3.11** Betrachte die Funktion  $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = |x|^{-1}$ .

In welchen Sobolev-Räumen  $W^{k,p}(B_1(0))$  liegt diese Funktion?

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und nur bei 0 macht sie „Probleme“. Für diejenigen, die Analysis gehört haben: „Weil ein Punkt eine Nullmenge ist, sind  $f$  und auch alle ihre Ableitungen messbar auf  $B_1(0)$ “. Es bleibt zu kontrollieren, ob die Integrale beschränkt sind. Weil für  $\sigma_n = \int_{\omega \in \mathbb{R}^n} \text{mit } |\omega|=1 d\omega$  gilt

$$\int_{B_1(0)} |f(x)|^p dx = \sigma_n \int_{r=0}^1 \left( \frac{1}{r} \right)^p r^{n-1} dr = \sigma_n \begin{cases} \left[ \frac{1}{n-p} r^{n-p} \right]_0^1 < \infty & \text{für } n > p, \\ [\log r]_0^1 = \infty & \text{für } n = p, \\ \left[ \frac{1}{n-p} r^{n-p} \right]_0^1 = \infty & \text{für } n < p, \end{cases}$$

folgt für  $f(x) = |x|^{-1}$ , dass

$$f \in L^p(B_1(0)) \iff p \in [1, n).$$

Weil man zeigen kann, dass es  $c_{n,k}, C_{n,k} \in \mathbb{R}^+$  gibt mit

$$c_{n,k} |x|^{-1-k} \leq |\nabla f(x)| \leq C_{n,k} |x|^{-1-k},$$

folgt für  $f(x) = |x|^{-1}$  auf ähnliche Art, dass

$$f \in W^{k,p}(B_1(0)) \iff p \in [1, \frac{n}{k+1}),$$

denn nur für  $(1+k)p < n$  gilt

$$\int_{r=0}^1 \left( \frac{1}{r^{1+k}} \right)^p r^{n-1} dr < \infty.$$

**Aufgabe 3.3** Betrachte die Funktion  $u(x) = -\log|x|$  und sei  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ .

1. Für welche  $p \in [1, \infty]$  gilt  $u \in L^p(B_1(0))$ ?
2. Berechnen Sie  $\nabla u(x)$  für  $|x| \neq 0$ .
3. Für welche  $p \in [1, \infty]$  gilt  $\nabla u \in L^p(B_1(0))$ ?

**Beispiel 3.12** Dass die Sache mit den schwachen Ableitungen nicht ganz trivial ist, zeigt die Cantor-Funktion. Diese monoton wachsende stetige Funktion  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  wird iterativ definiert, indem man am Anfang  $f_0(0) = 0$  und  $f_0(1) = 1$  setzt, und anschließend das dazwischenliegende Intervall drittelt, auf dem mittleren Teilintervall den Durchschnittswert der

Funktionswerte in beiden Intervallrandpunkten an der Funktion zuweist. Dieses Dritteln und Mittelwert Setzen, wird wiederholt. Also

$$f_1(x) = \begin{cases} f_0(0) = 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ f_0(1) = 1 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

und

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(0) = 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{4} & \text{für } x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}], \\ f_1(x) = \frac{1}{2} & \text{für } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{3}{4} & \text{für } x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}], \\ f_1(1) = 1 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

und so weiter. Für jedes  $x \in [0, 1]$  findet man eine Folge  $x_n \rightarrow x$  derart, dass  $f_n(x_n)$  definiert ist, und setzt  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$ . In Abbildung 3.1 findet man ein Bild dieser Funktion.

Es gilt, dass  $f'(x) = 0$  auf  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \cup \dots$ . Wenn wir die gesamte Länge dieser Intervalle berechnen, finden wir

$$\ell = \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{9} + 4 \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^k = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

und dies bedeutet, dass  $f$  fast überall differenzierbar ist auf  $[0, 1]$  mit klassischer Ableitung gleich 0. Also  $f' = 0$  in  $L^1(0, 1)$ . Um zu zeigen, dass trotzdem  $f$  keine schwache Ableitung hat, nehmen wir eine besondere Testfunktion  $\varphi \in C_0^\infty(0, 1)$ , nämlich

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \frac{1}{9}, \\ 1 & \text{für } x \in [\frac{2}{9}, \frac{7}{9}], \\ 0 & \text{für } x \geq \frac{8}{9}. \end{cases}$$

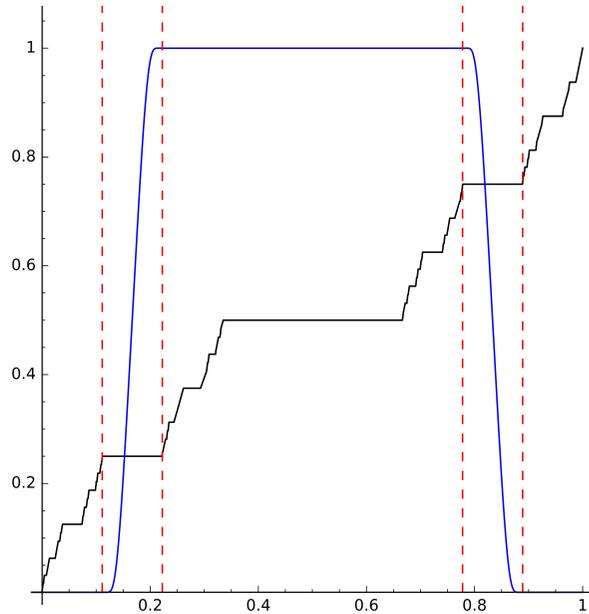


Abbildung 3.1: Die monotone Cantorfunktion und eine geschickt gewählte Testfunktion in blau.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \varphi'(x) dx &= \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{2}{9}} \frac{1}{4} \varphi'(x) dx + \int_{\frac{7}{9}}^{\frac{8}{9}} \frac{3}{4} \varphi'(x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4} \varphi(x) \right]_{\frac{1}{9}}^{\frac{2}{9}} + \left[ \frac{3}{4} \varphi(x) \right]_{\frac{7}{9}}^{\frac{8}{9}} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

während

$$-\int_0^1 f'(x) \varphi(x) dx = 0,$$

und dies ist ein Widerspruch.

### 3.3.3 Schwache und distributionelle Lösungen

Wie man bei gewöhnlichen Differentialgleichungen schon gesehen hat, kommt man mit klassischen Lösungen nicht immer aus. Man erinnere sich an das Reibungsproblem bei zum Beispiel einem bremsenden Fahrzeug. Man konnte da nur eine Lösung definieren, wenn man an einzelnen Stellen zuließ, dass die Differentialgleichung nicht erfüllt ist.

**Beispiel 3.13** Die Reibungskraft für zwei sich übereinander bewegende feste Körper ist annäherungsweise nur abhängig vom Vorzeichen der relativen Geschwindigkeit:

$$F(v) = \begin{cases} -c & \text{für } v > 0, \\ 0 & \text{für } v = 0, \\ c & \text{für } v < 0. \end{cases}$$

Sei  $v$  die Geschwindigkeit des Fahrzeugs und  $m$  die Masse, so gilt für die Beschleunigung  $v'$ :

$$mv' = F(v).$$

Es gibt keine klassische Lösung. Wenn man jedoch die Integralform der Gleichung betrachtet:

$$m(v(t) - v(0)) = \int_0^t F(v(s)) ds,$$

dann findet man die folgende Lösung, wenn  $v(0) > 0$ :

$$v(t) = \begin{cases} v(0) - \frac{c}{m}t & \text{für } t \in [0, t_1], \\ 0 & \text{für } t > t_1 := c^{-1}mv(0). \end{cases}$$

Für  $t = t_1$  ist  $v$  nicht differenzierbar und deswegen ist  $v$  keine klassische Lösung.

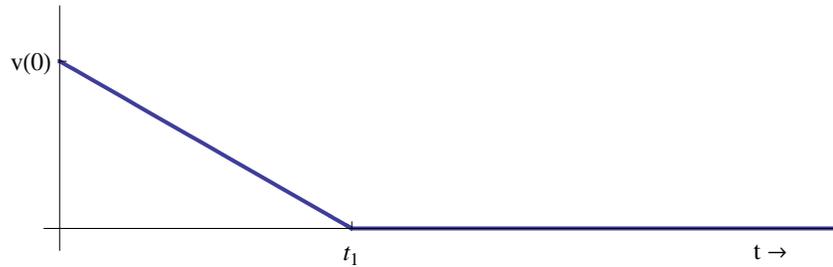


Abbildung 3.2: Skizze zu einer Geschwindigkeit  $t \mapsto v(t)$  aus Beispiel 3.13.

**Beispiel 3.14** Die Wellengleichung in einer Raumdimension ist die folgende:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0.$$

Für  $u(x, 0) = \sin(x)$  findet man zum Beispiel die Lösungen

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sin(x - ct), \\ u_2(x, t) &= \frac{1}{2} \sin(x - ct) + \frac{1}{2} \sin(x + ct). \end{aligned}$$

Durch direktes Differenzieren sieht man, dass die Differentialgleichung erfüllt ist. Sogar für jede  $C^2$ -Funktion  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bekommt man eine Lösung, die  $u(x, 0) = u_0(x)$  erfüllt, wie folgt

$$u(x, t) = u_0(x - ct). \quad (3.5)$$

Was passiert jedoch, wenn  $u_0$  nicht zweimal differenzierbar ist? Die Funktion in (3.5) kann nun keine klassische Lösung darstellen.

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hat man also gelegentlich den Lösungsbegriff erweitern müssen und das hat

man gemacht, indem man einzelne Stellen herausgenommen hat oder die Differentialgleichung ersetzt durch eine Integralgleichung. Bei partiellen Differentialgleichungen ist die Sache etwas schwieriger, denn in welche Richtung soll man integrieren? Wie soll man von einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung zu einem System erster Ordnung kommen?

Auch hier gibt es kein Lösungsmittel, das „alle Flecken rausbringt“ und wir müssen uns einschränken auf bestimmte Typen von partiellen Differentialgleichungen. Für (semi)lineare partielle Differentialgleichungen kann man, wenn die Koeffizienten  $a_\alpha$  genügend glatt sind, den Lösungsbegriff jedoch relativ leicht erweitern.

**Definition 3.15** Man nennt  $u \in C(\Omega)$  eine distributionelle Lösung der Gleichung (3.2), wenn

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leq m}} u(x) \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x) \varphi(x)) - f(x, u(x)) \varphi(x) \right) dx = 0 \quad (3.6)$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Bemerke, dass diese Definition nur Sinn macht, wenn  $a_\alpha$  genügend glatt ist,  $a_\alpha \in C^m(\Omega)$ . Wenn dies gilt, dann ist  $\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x) \varphi(x))$  und das Integral wohldefiniert. Es ist übrigens nicht notwendig, dass  $u \in C(\Omega)$ . Es reicht, wenn mit dieser Funktion das Integral definiert ist. Wenn jedoch  $u \in C^m(\Omega)$  gilt, findet man mittels partieller Integration die klassische Gleichung (3.2) im Integral zurück.

Es gibt auch den Begriff schwache Lösung. Dabei werden nicht alle partiellen Ableitungen zur Testfunktion  $\varphi$  gebracht, sondern nur die Hälfte.

**Definition 3.16** Man nennt  $u \in C^{\tilde{m}}(\Omega)$  eine schwache Lösung der Gleichung

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha|, |\beta| \leq \tilde{m}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \left( a_{\alpha, \beta}(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta u(x) \right) = f(x, u),$$

wenn

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|, |\beta| \leq \tilde{m}}} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta u(x) \right) a_{\alpha, \beta}(x) \left( \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \varphi(x) \right) - f(x, u(x)) \varphi(x) \right) dx = 0 \quad (3.7)$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

**Bemerkung 3.16.1** Die Spaltung zwischen den Ableitungen  $\alpha$  und  $\beta$  ist nicht eindeutig. Für einzelne Probleme soll man genau definieren, was mit einer schwachen Lösung gemeint ist.

**Aufgabe 3.4** Wir betrachten die Funktion  $u \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , definiert durch

$$u(x, t) = \max(0, 1 - |x - ct|).$$

1. Zeigen Sie, dass  $u$  eine distributionelle Lösung ist von

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times [0, \infty). \quad (3.8)$$

2. Existieren die schwachen Ableitungen erster Ordnung  $u_t$  und  $u_x$ ?

Woche 3, Lösungen bei partiellen Differentialgleichungen

3. Wenn man eine schwache Lösung von (3.8) definiert durch

$$\int_{\mathbb{R} \times [0, \infty)} (u_t \varphi_t - c^2 u_x \varphi_x) dx dt = 0$$

für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ , ist diese Funktion  $u$  eine schwache Lösung?

Um zu zeigen, dass klassische Lösungen auch schwache oder distributionelle Lösungen sind, brauchen wir eine Version des Hauptlemmas der Variationsrechnung:

**Lemma 3.17** Sei  $u \in C(\Omega)$ . Wenn

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

dann gilt  $u = 0$ .

**Beweis.** Wenn  $u \neq 0$ , dann gibt es  $x_0 \in \Omega$  mit  $u(x_0) \neq 0$ . Nehmen wir an, dass  $u(x_0) > 0$ , dann folgt aus der Stetigkeit von  $u$ , dass es eine Umgebung  $B_\varepsilon(x_0)$  gibt derart, dass  $u(x) \geq c := \frac{1}{2}u(x_0) > 0$  für  $x \in B_\varepsilon(x_0)$ . Nehmen wir  $\varphi \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x_0))$  mit  $\varphi \geq 0$  in  $B_\varepsilon(x_0)$  und  $\varphi \geq c_1 > 0$  in  $B_{\varepsilon/2}(x_0)$ , so folgt

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx > 0,$$

ein Widerspruch. ■

Dass es eine solche Funktion  $\varphi$  in dem letzten Beweis gibt, möge das Beispiel

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - \varepsilon^2}} & \text{für } \|x\| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (3.9)$$

deutlich machen. Man kann zeigen, dass auf dem Kreisrand  $\|x\| = \varepsilon$  diese Funktion nicht nur stetig ist sondern auch, dass da alle Ableitungen existieren. Man verwende dazu, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) e^{-t} = 0 \text{ für jedes Polynom } p.$$

So gilt  $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(B_{\varepsilon+t}(0))$  für alle  $t > 0$ .

**Aufgabe 3.5** Zeigen Sie die Behauptung

$$\lim_{\|x\| \uparrow 1} \nabla^k \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) = 0$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

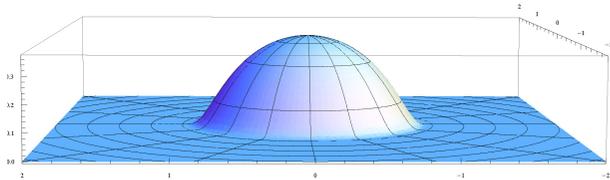


Abbildung 3.3: Skizze zu der Testfunktion  $\varphi_\varepsilon$  aus (3.9) mit  $\varepsilon = 1$ .

Das folgende Ergebnis zeigt die Verbindung zwischen klassischen und schwachen Lösungen.

**Proposition 3.18** Für semilineare Gleichungen gilt:

- Klassische Lösungen sind distributionelle Lösungen.
- Wenn  $u \in C^m(\Omega)$  eine distributionelle Lösung der Gleichung (3.2) ist, so ist  $u$  eine klassische Lösung.

**Bemerkung 3.18.1** Schwache Lösungen liegen zwischen distributionell und klassisch und ein ähnliches Ergebnis gilt.

**Beweis.** Durch partielle Integration findet man, wenn der auswärtige Normalenvektor  $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  auf  $\partial\Omega$  wohldefiniert ist und wenn die Ableitungen von  $f$  und  $g$  bezüglich  $x_i$  stetig sind, dass

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) \nu_i d\sigma_x - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \right) g(x) dx.$$

Wenn  $g(x) = 0$  oder  $f(x) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ , dann entfällt der mittlere Term und es folgt

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} g(x) dx = \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \right) g(x) dx. \quad (3.10)$$

So kann man (3.6), wenn  $u \in C^m(\Omega)$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  angenommen worden ist, auch schreiben als

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(x) - f(x, u) \right) \varphi(x) dx = 0. \quad (3.11)$$

Im Fall, dass  $\partial\Omega$  nicht genügend glatt ist um  $\vec{\nu}$  zu definieren, soll man bemerken, dass  $\varphi$  einen kompakten Träger  $K \subset \Omega$  hat. Man kann zeigen, dass es  $\Omega^*$  gibt mit

$$K \subset \Omega^*, \overline{\Omega^*} \subset \Omega \text{ und } \partial\Omega^* \in C^\infty.$$

Im Integral (3.11) kann man dann  $\Omega$  durch  $\Omega^*$  ersetzen und öfters (3.10) anwenden auf  $\Omega^*$ . Randintegrale auf  $\partial\Omega^*$  sind wohldefiniert. Weil der Träger von  $\varphi$  innerhalb von  $\Omega^*$  liegt, sind die Randintegrale identisch 0.

Das bedeutet, dass wenn  $u$  eine klassische Lösung ist, (3.11) äquivalent ist zu (3.6). Das bedeutet, dass  $u$  auch eine distributionelle Lösung ist. Umgekehrt, wenn  $u \in C^m(\Omega)$  eine distributionelle Lösung ist, dann gilt (3.11) und man findet mit Hilfe des obigen Lemmas, dass die Differentialgleichung für jedes  $x \in \Omega$  erfüllt ist. Das heißt, distributionelle Lösungen in  $C^m(\Omega)$  sind klassisch. ■

### 3.4 Kriterien von Hadamard



Abbildung 3.4: Jacques Hadamard

Eine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung braucht  $n$  unabhängige Bedingungen, um höchstens eine Lösung zu haben. War es bei einem Anfangswertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung noch relativ einfach Bedingungen anzugeben, wo es genau eine Lösung gibt, nämlich die

Bedingungen aus dem Satz von Picard-Lindelöf, war es bei Randwertproblemen schon schwieriger. Und bei Randwertproblemen war die Existenz bei linearen wiederum einfacher als bei nicht-linearen.

Für partielle Differentialgleichungen wird es sehr vom Typ abhängen, welche Art von Anfangs- oder Randwerten genau eine Lösung geben werden. Aber auch hier wird das Ziel sein, Bedingungen zu suchen derart, dass die Differentialgleichung mit festgelegten Anfangs- oder Randwerten die *Kriterien von Hadamard*<sup>2</sup> erfüllt:

- *Eindeutigkeit*: Das Problem hat höchstens eine Lösung.
- *Existenz*: Das Problem hat mindestens eine Lösung.
- *Robustheit*: Wenn man das Problem ein wenig ändert, ändert sich die Lösung auch nur wenig.

Die dritte Eigenschaft wird auch als *Stabilität* oder *stetige Abhängigkeit der Eingangsdaten* benannt.

Wenn ein Problem diese drei Eigenschaften hat, nennt man es *wohlgestellt*. Manchmal sagt man auch *wohldefiniert*.

<sup>2</sup>Jacques Salomon Hadamard, 1865 – 1963, Französischer Mathematiker, hat seine Spuren hinterlassen in vielen Teilgebieten der Mathematik.

## Modelle und erste Ergebnisse

Dieses Kapitel versucht eine Verbindung herzustellen zwischen physikalischen Voraussetzungen und mathematisch formulierten Problemstellungen. Solche Modellierungsvorgänge sind eine Kunst an sich und bewegen sich außerhalb der üblichen Mathematik, bei der man versucht, aus einigen Axiomen eine zweifelsfreie Theorie aufzubauen. Modellierung fängt an mit Beobachtungen, Experimenten und Vermutungen, wie der Zusammenhang zwischen Ursache und Ergebnis erklärt werden kann. Modellierung ist oft keine angewandte, sondern nur eine unreine Mathematik. Die Mathematik an sich kann auch nicht erklären, wieso ein solches Modell korrekt wäre. Wenn jedoch das hergeleitete, mathematisch formulierte Modell durch mathematische Schlussfolgerungen zu unerwarteten Ergebnissen oder sogar zu einem Widerspruch führen würde, müsste man sich ernsthaft Sorgen machen über die Richtigkeit des Modells. Wenn die Ergebnisse übereinstimmen mit den Erwartungen, dann kann man nur hoffen, dass das Modell richtig ist.

Neben der Vorstellung einiger Modelle, werden auch ein paar einfache mathematische Ergebnisse gebracht.

### 4.1 Transportgleichung

Man stelle sich vor, dass sich eine Flüssigkeit oder ein Gas unter dem Einfluss einer Strömung bewegt. Diese Strömung ist gegeben durch ein Vektorfeld, das die lokale Geschwindigkeit  $\vec{v}(x, t)$  der Teilchen beschreibt. Die Variable  $x \in \mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  beschreibt die Stelle und  $t$  die Zeit. Man möchte wissen, wie die Dichte  $\rho = \rho(x, y, t)$  ist. Sei  $\Omega(t)$  eine beschränkte Menge dieser Flüssigkeit. Wenn man einen Schritt  $\Delta t$  weiter in der Zeit ist, hat diese Menge sich etwas deformiert zu  $\Omega(t + \Delta t)$  unter Einfluss des Vektorfeldes. Siehe Abbildung 4.1.

Weil die Masse erhalten bleibt, gilt

$$\int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho(x, t + \Delta t) dx = \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx.$$

Diese Identität benutzt man wie folgt für die Ableitung der

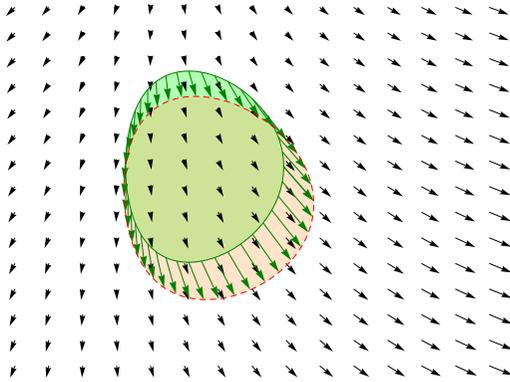


Abbildung 4.1: Von  $t$  zu  $t + \Delta t$  hat  $\Omega(t)$  sich bewegt nach  $\Omega(t + \Delta t)$ .

Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho(x, t + \Delta t) dx - \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx \right) \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)}{\Delta t} dx + \\ &\quad \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega(t+\Delta t) \setminus \Omega(t)} - \int_{\Omega(t) \setminus \Omega(t+\Delta t)} \right) \rho(x, t + \Delta t) dx. \end{aligned}$$

Es gilt für eine stetig differenzierbare Funktion  $\rho$ :

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{\Omega(t)} \frac{\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)}{\Delta t} dx = \int_{\Omega(t)} \partial_t \rho(x, t) dx \quad (4.1)$$

und für das Ein- und Ausströmen:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\Omega(t+\Delta t) \setminus \Omega(t)} - \int_{\Omega(t) \setminus \Omega(t+\Delta t)} \right) \rho(x, t + \Delta t) dx \\ = \int_{\partial\Omega(t)} \rho(x, t) \vec{v}(x, t) \cdot \vec{\nu} d\sigma_x. \end{aligned}$$

Hier ist  $\partial\Omega(t)$  der Rand von  $\Omega(t)$  und  $\vec{\nu}$  der auswärtige Normalenvektor. Wegen des Integralsatzes von Gauß (Theorem 2.18) gilt

$$\int_{\partial\Omega(t)} \rho(x, t) \vec{v}(x, t) \cdot \vec{\nu} d\sigma_x = \int_{\Omega(t)} \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) dx. \quad (4.2)$$

Aus (4.1) und (4.2) folgt

$$\int_{\Omega(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) \right) dx = 0. \quad (4.3)$$

Weil diese letzte Gleichung für jedes Teilgebiet  $\Omega(t)$  gilt, haben wir eine Differentialgleichung für die *Erhaltung der Masse* gefunden:

**Gesetz 1** Sei  $\rho$  die Dichte und  $\vec{v}$  die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit oder eines Gases. Dann gilt:

$$\partial_t \rho(x, t) + \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = 0. \quad (4.4)$$

Mit Gesetz ist hier ein physikalisches Gesetz<sup>1</sup> gemeint.

**Bemerkung 4.0.1** Wenn  $\vec{v}$  gegeben ist, ist (4.4) eine Differentialgleichung erster Ordnung für die unbekannte Dichte  $\rho$ . Man nennt eine solche Differentialgleichung eine Transportgleichung.

<sup>1</sup>Ein physikalisches Gesetz beruht auf Wahrnehmungen, Messungen und auch schon mal auf einer mathematischen Herleitung einer physikalischen Wahrnehmung. Man sollte Gesetz jedoch nicht mit dem mathematischen Begriff „Satz“ vergleichen.

## 4.2 Wärmeleitungsgleichung

In vielen Fällen wird  $\vec{v}$  in (4.4) bestimmt durch die Dichte  $\rho$ . Wenn es sich um eine Flüssigkeit in einem porösen Medium handelt, gilt das folgende:

**Gesetz 2 (Gesetz von Darcy)** Sei  $\rho$  die Dichte,  $\vec{v}$  die Strömungsgeschwindigkeit und  $P$  der Druck einer Flüssigkeit. Durch Messungen hat man den folgenden Zusammenhang gefunden:

$$\rho(x, t) \vec{v}(x, t) = -c \nabla P(x, t).$$

Die Konstante  $c$  wird durch das poröse Material und die Flüssigkeit bestimmt.

Wenn Druck und Dichte proportional sind,  $P = c_1 \rho$ , findet man mit (4.4) und  $c_2 = c_1 c$ , dass

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(x, t) &= -\nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) \\ &= c \nabla \cdot \nabla P(x, t) = c_2 \Delta \rho(x, t). \end{aligned}$$

Ähnliches gilt für die Wärmeleitung.

### Gesetz 3 (Wärmeleitungsgesetz oder Gesetz von Fourier)

Sei  $T$  die absolute Temperatur und  $\vec{v}$  die Strömungsgeschwindigkeit der Wärme, dann gilt

$$T(x, t) \vec{v}(x, t) = -\tilde{c} \nabla T(x, t).$$

Die Konstante  $\tilde{c}$  wird durch das Material bestimmt.

Für die Energiedichte gilt üblicherweise  $\rho = c_1 T$ . Auch hier folgt dann mit (4.4):

$$\partial_t T(x, t) = -\nabla \cdot (T(x, t) \vec{v}(x, t)) = c \nabla \cdot \nabla T(x, t) = c \Delta T(x, t).$$

### Bemerkung 4.0.2 Die Differentialgleichung

$$\partial_t T(x, t) - c \Delta T(x, t) = 0$$

heißt die Wärmeleitungsgleichung. Physikalisch gesehen ist  $c$  die Wärmekapazität. Durch Zeitskalierung, das heißt  $t$  durch  $\tilde{t} = ct$  ersetzen, kann man  $c = 1$  setzen.

Sorgt zusätzlich eine Wärmequelle  $f(x, t)$  im Innern für eine extra Zufuhr, dann bekommt man die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t T(x, t) - k \Delta T(x, t) = f(x, t). \quad (4.5)$$

Wenn wir die Wärmeverteilung in einem isolierten Körper  $\Omega$  betrachten, dann soll keine Wärme herein- oder hinausströmen. Das bedeutet, dass am Rande gilt

$$\nabla T(x, t) \cdot \vec{\nu} = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } t > 0. \quad (4.6)$$

- Die Randwertbedingung in (4.6) ist nach Neumann benannt worden. Man kann sie auch schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } t > 0.$$

- Wenn man die Temperatur  $T_1$  am Rande vorschreibt, heißt das eine Dirichlet Randwertbedingung:

$$T(x, t) = T_1 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } t > 0.$$

Das Rand-Anfangswertproblem für die Temperaturverteilung eines isolierten Körpers ist so das folgende Problem:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) - k \Delta T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x, 0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Die Wärmeleitungsgleichung ist verwandt mit der Gleichung für die Strömung durch ein poröses Medium. Weil der Druck da als Funktion der Dichte schneller als linear zunimmt, nämlich zum Beispiel als  $P = cu^m$  mit  $m > 1$ , wird die dazugehörige Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - k \Delta (u(x, t))^m = 0. \quad (4.8)$$

**Bemerkung 4.0.3** Man nennt (4.8) die Poröse-Medien-Gleichung.

Für  $m \neq 1$  ist diese Gleichung nicht-linear und das sorgt für erhebliche Schwierigkeiten. Diese Differentialgleichung werden wir in dieser Vorlesung dann auch nicht weiter anschauen.

#### Aufgabe 4.1 Der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u - c \nabla \cdot (|\nabla u|^{m-1} \nabla u) = 0$$

begegnet man öfter in der Literatur. Für welche  $c$ , wenn überhaupt, ist sie gleich zu (4.8)?

### 4.2.1 Einfache Ergebnisse für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkte Gebiete

**Lemma 4.1** Sei  $T \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$  eine Lösung von (4.7), so gilt

$$\int_{\Omega} T(x, t) dx = \int_{\Omega} T(x, 0) dx.$$

**Bemerkung 4.1.1** Dies ist ein Erhaltungssatz.  $\frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) = 0$  bedeutet, dass keine Wärme herausfließt und die gesamte gespeicherte Wärme erhalten bleibt.

**Beweis.** Betrachtet man

$$I(t) = \int_{\Omega} T(x, t) dx,$$

so folgt

$$\begin{aligned} I'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} T(x, t) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) dx \\ &= k \int_{\Omega} \Delta T(x, t) dx = k \int_{\partial\Omega} \nabla T(x, t) \cdot \nu d\sigma_x \\ &= k \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) d\sigma_x = 0 \end{aligned}$$

und  $I(t)$  ist konstant. ■

Statt zu isolieren, kann man auch das Problem betrachten, bei dem die Temperatur am Rand festgehalten wird, sagen wir auf  $T_1 = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) - k \Delta T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ T(x, 0) = T_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

**Lemma 4.2** Sei  $T \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$  eine Lösung von (4.7) oder (4.9), so gilt

$$\int_{\Omega} T^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} T^2(x, 0) dx.$$

**Beweis.** Betrachtet man

$$E(t) = \int_{\Omega} T^2(x, t) dx,$$

so folgt

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} T^2(x, t) dx \\
 &= 2 \int_{\Omega} T(x, t) \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) dx \\
 &= 2k \int_{\Omega} T(x, t) \Delta T(x, t) dx \\
 &= 2k \int_{\partial\Omega} T(x, t) \nabla T(x, t) \cdot \nu d\sigma_x \\
 &\quad - 2k \int_{\Omega} \nabla T(x, t) \cdot \nabla T(x, t) dx \\
 &= -2k \int_{\Omega} |\nabla T(x, t)|^2 dx \leq 0.
 \end{aligned}$$

Man bemerke, dass

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} T(x, t) \nabla T(x, t) \cdot \nu d\sigma_x &= \\
 \int_{\partial\Omega} T(x, t) \frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) d\sigma_x &= 0
 \end{aligned}$$

gilt sowohl für (4.7), als auch für (4.9). ■

**Aufgabe 4.2** Sei  $k > 0$  und betrachte die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x, t) - k \Delta T(x, t) + c T(x, t) = 0,$$

für  $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$  mit entweder

$$T(x, t) = 0 \text{ oder } \frac{\partial}{\partial \nu} T(x, t) = 0$$

auf  $\partial\Omega$  für  $t \geq 0$ . Für welches  $c \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{\Omega} T^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} T^2(x, 0) dx$$

für alle  $t > 0$ ?

**Korollar 4.3** Es gibt höchstens eine Lösung  $T \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+)$  für das Anfangs/Randwertproblem (4.7). Dies trifft auch zu für Problem (4.9).

**Beweis.** Wenn (4.7) (oder auch (4.9)) zwei verschiedene Lösungen  $T_1$  und  $T_2$  haben, betrachte man  $T = T_1 - T_2$ . Die Funktion  $T$  erfüllt das Anfangs/Randwertproblem mit  $T = 0$  am Anfang und am Rand. Aus Lemma 4.2 folgt

$$0 \leq \int_{\Omega} T^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} T^2(x, 0) dx = 0$$

und dann auch  $T(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$ . Das heißt  $T_1 = T_2$ . ■

## 4.3 Die Laplace Gleichung

Die Differentialgleichung

$$-k \Delta u(x) = f(x)$$

nennt man die *stationäre Wärmeleitungsgleichung* oder *Poisson Gleichung*. Für einen Potentialfluss hat man die Gleichung

$$\Delta u = 0. \tag{4.10}$$

Hier ist  $u$  das Potential und  $\vec{v} = \nabla u$  die Geschwindigkeit. Diese Gleichung beschreibt eine Strömung, bei der die Dichte/Wärme nicht zeitabhängig ist.

**Bemerkung 4.3.1** Die Differentialgleichung  $\Delta u = 0$  heißt die Laplace Gleichung. Eine Funktion  $u \in C^2(\Omega)$ , die  $\Delta u = 0$  auf  $\Omega$  erfüllt, nennt man harmonisch auf  $\Omega$ .

### 4.3.1 Ein Ergebnis für harmonische Funktionen

Aus der Vorlesung Funktionentheorie soll man sich an einige schöne Ergebnisse für harmonische Funktionen in 2 Dimensionen erinnern. Eine solche Eigenschaft von harmonischen Funktionen lässt sich auch in höheren Dimensionen zeigen:

**Proposition 4.4 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)** Wenn  $u \in C^2(\Omega)$  und  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , dann gilt für jede Kugel  $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < r\}$  mit  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ , dass

$$\int_{\partial B_r(x_0)} (u(x) - u(x_0)) d\sigma_x = 0. \quad (4.11)$$

**Bemerkung 4.4.1** Setzt man

$$\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma_x, \quad (4.12)$$

dann ist  $\omega_n$  der (Hyper)Flächeninhalt der Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius 1. Der Flächeninhalt der Kugeloberfläche einer Kugel mit Radius  $r$  ist dann gleich  $r^{n-1}\omega_n$ . Die

Gleichung (4.11) lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x &= \int_{\partial B_r(x_0)} u(x_0) d\sigma_x \\ &= u(x_0) \int_{\partial B_r(x_0)} 1 d\sigma_x = r^{n-1}\omega_n u(x_0), \end{aligned}$$

und das heißt

$$\frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x = u(x_0).$$

Anders gesagt,  $u(x_0)$  nimmt den Durchschnittswert auf dem Kugelrand  $\partial B_r(x_0)$  an.

**Bemerkung 4.4.2** Die Gleichung in (4.11) kann man auch wie folgt formulieren:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (4.13)$$

Wenn (4.13) gilt für alle  $r \leq R$ , so gilt auch

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy \quad (4.14)$$

für alle  $r \leq R$  und umgekehrt. Von (4.13) zu (4.14) kommt man durch Integrieren von  $\int_0^r r^{n-1} u(x) dr$  mit  $u$  aus (4.13).

**Aufgabe 4.3** Beweisen Sie, dass (4.13) für alle  $r \in (0, R]$  und (4.14) für alle  $r \in (0, R]$  äquivalent sind.

**Beweis von Proposition 4.4.** Wir werden den Satz beweisen für  $x_0 = 0$ . Für  $n \geq 3$  und  $x \neq 0$  gilt folgendes:

$$\begin{aligned}\Delta |x|^{2-n} &= \nabla \cdot \nabla |x|^{2-n} = (2-n) \nabla \cdot \frac{x}{|x|^n} \\ &= (2-n) \left( \frac{n}{|x|^n} - n \frac{x \cdot x}{|x|^{n+2}} \right) = 0.\end{aligned}$$

So finden wir mit partieller Integration einerseits

$$\begin{aligned}& \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \cdot \nabla u(x) \, dx \\ &= \int_{\partial(B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0))} \frac{\partial}{\partial \nu} (|x|^{2-n} - r^{2-n}) u(x) \, d\sigma_x \\ &\quad - \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta (|x|^{2-n} - r^{2-n}) u(x) \, dx \\ &= (2-n) \left( r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x) \, d\sigma_x - \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) \, d\sigma_x \right),\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}& \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \cdot \nabla u(x) \, dx \\ &= \int_{\partial(B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0))} (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \frac{\partial}{\partial \nu} u(x) \, d\sigma_x \\ &\quad - \int_{B_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} (|x|^{2-n} - r^{2-n}) \Delta u(x) \, dx \\ &= \int_{\partial B_r(0)} 0 \frac{\partial}{\partial \nu} u(x) \, d\sigma_x + (r^{2-n} - \varepsilon^{2-n}) \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \vec{\nu} \cdot \nabla u(x) \, d\sigma_x.\end{aligned}$$

Zusammen folgt

$$\begin{aligned}r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x) \, d\sigma_x - \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) \, d\sigma_x \\ = \frac{r^{2-n} - \varepsilon^{2-n}}{n-2} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) \, d\sigma_x.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Wir betrachten die einzelnen Terme aus (4.15).

Weil  $\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x)$  beschränkt ist, sagen wir der Betrag ist kleiner  $c_1$ , so findet man

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) \, d\sigma_x \right| \leq c_1 \omega_n \varepsilon^{n-1}.$$

Also gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{r^{2-n} - \varepsilon^{2-n}}{n-2} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(x) \, d\sigma_x = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon) = 0.$$

Auch gilt, weil  $u \in C^1(\overline{B_r(0)})$ , dass

$$\begin{aligned}\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (u(x) - u(0)) \, d\sigma_x \right| &\leq \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |u(x) - u(0)| \, d\sigma_x \\ &\leq c_2 \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x| \, d\sigma_x \leq c_2 \varepsilon \varepsilon^{n-1} \omega_n,\end{aligned}$$

und es folgt, dass

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x) \, d\sigma_x \\ = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(0) \, d\sigma_x + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) = \omega_n u(0).\end{aligned}$$

Mit (4.15) findet man nun für  $\varepsilon \downarrow 0$ , dass

$$r^{1-n} \int_{\partial B_r(0)} u(x) \, d\sigma_x = \omega_n u(0),$$

und somit das gewünschte Ergebnis für  $n \geq 2$ . Für  $n = 2$  ist das Ergebnis in der Vorlesung Funktionentheorie bewiesen. ■

**Aufgabe 4.4** Zeigen Sie Proposition 4.4 für  $n = 2$ . Hinweis: Ersetzen Sie die Funktion  $|x|^{2-n} - r^{2-n}$  durch  $-\ln(|x|) + \ln(r)$ .

Aus Proposition 4.4 folgt, dass, wenn man auf dem Rand  $\partial B_r(x_0)$  eine harmonische Funktion  $u$  vergrößert, beziehungsweise verkleinert, auch  $u(x_0)$  größer, beziehungsweise, kleiner wird. Man findet sogar das folgende starke Ergebnis:

**Korollar 4.5** Wenn  $u \in C^2(\Omega)$  harmonisch ist auf  $\Omega$  und ein Extremum innerhalb von  $\Omega$  hat, so ist  $u$  eine Konstante.

**Beweis.** Nehmen wir an,  $u$  hat ein Maximum in  $x_0 \in \Omega$ . Weil  $\Omega$  offen ist, gibt es  $r_0 > 0$  mit  $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$  und für jedes  $r \in (0, r_0)$  gilt

$$\begin{aligned} u(x_0) &= \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) \, d\sigma_x \\ &\leq \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x_0) \, d\sigma_x = u(x_0). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist streng und gibt einen Widerspruch, wenn  $u$  nicht identisch  $u(x_0)$  ist auf  $\partial B_r(x_0)$ . Es folgt also, dass  $u$  konstant ist auf  $B_{r_0}(x_0)$ . Man wiederholt diese Argumente für jedes  $x_1 \in B_{r_0}(x_0)$ ,  $x_2 \in B_{r_1}(x_1)$  usw.. Die Annahme, dass  $\Omega$  offen und zusammenhängend ist, erlaubt es uns ganz  $\Omega$  mit Kugeln zu überdecken. Auf jede Kugel in  $\Omega$  ist  $u$  konstant, also ist  $u$  auch konstant auf  $\Omega$ . ■

**Korollar 4.6** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Seien  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $u_r : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann hat das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_r & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.16)$$

für  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  höchstens eine Lösung.

**Beweis.** Wenn (4.16) zwei solche Lösungen hat, sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann erfüllt  $u = u_1 - u_2$  das Randwertproblem in (4.16) mit  $f = 0$  und  $u_r = 0$ . Wenn  $u_1 \neq u_2$ , dann hat  $u$  ein Extremum in  $\Omega$  ungleich 0. Korollar 4.5 sagt dann, dass  $u$  konstant ist. Weil  $u = 0$  auf dem Rand und weil  $u$  stetig ist auf  $\bar{\Omega}$ , folgt  $u = 0$  auf  $\bar{\Omega}$ . Dies widerspricht der Annahme, dass  $u_1$  und  $u_2$  verschieden sind. ■

Man sieht, dass die Eindeutigkeit einer Lösung hier relativ einfach ist. Das Zeigen der Existenz einer Lösung ist meistens wesentlich schwerer. Dass man eine explizit Lösung angeben kann, ist eine noch größere Seltenheit.

**Aufgabe 4.5** Sei  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + xy + 3y^2 < 1\}$ .

1. Berechnen Sie die einzige Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.17)$$

Hinweis: Berechnen Sie  $\Delta(1 - (x^2 + xy + 3y^2))$ .

2. Für welche anderen Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  können sie so eine Lösung von (4.17) finden?

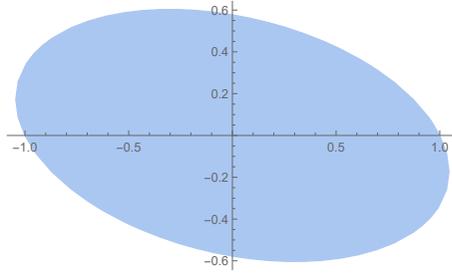


Abbildung 4.2: Das Gebiet aus Aufgabe 4.5

## 4.4 Die schwingende Saite

Nehmen wir zur Modellierung an, dass diese Saite aus einer Reihe kleiner Massen besteht, die elastisch verbunden sind. Wir nehmen außerdem an, dass die Spannung  $S$  in der Saite konstant ist. Sei  $u(x, t)$  die vertikale Auslenkung an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$ . Betrachten wir den Teil zwischen  $x_1 - \frac{1}{2}\Delta x$  und  $x_1 + \frac{1}{2}\Delta x$ , dann wirken die folgenden Kräfte auf diesen Teil:

$$\vec{F}_{\text{links}} = \frac{-S}{\sqrt{1+u_x(x_1-\frac{1}{2}\Delta x, t)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x_1 - \frac{1}{2}\Delta x, t) \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_{\text{rechts}} = \frac{S}{\sqrt{1+u_x(x_1+\frac{1}{2}\Delta x, t)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, t) \end{pmatrix}.$$

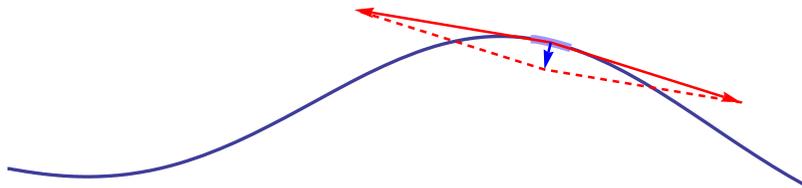


Abbildung 4.3: Kräfte bei einer schwingenden Saite

Wir betrachten nur die vertikalen Kräfte. Addiert man diese beiden Komponenten, so findet man

$$\left( \vec{F}_{\text{rechts}} + \vec{F}_{\text{links}} \right)_2 = \left( \frac{u_x(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, t)}{\sqrt{1+u_x(x_1 + \frac{1}{2}\Delta x, t)^2}} - \frac{u_x(x_1 - \frac{1}{2}\Delta x, t)}{\sqrt{1+u_x(x_1 - \frac{1}{2}\Delta x, t)^2}} \right). \quad (4.18)$$

Entwickelt man mit Taylor nach  $\Delta x$ , so folgt mit für die gesamte vertikale Komponente in (4.18), dass

$$\left( \vec{F}_{\text{rechts}} + \vec{F}_{\text{links}} \right)_2 = S \frac{u_{xx}(x_1, t)}{(1 + u_x(x_1, t)^2)^{3/2}} \Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2). \quad (4.19)$$

Aus dem zweiten Gesetz von Newton<sup>2</sup>,

$$F = \partial_t(mv) \quad (4.20)$$

mit  $v$  die vertikale Geschwindigkeit und  $m$  die Masse, folgt für den Teil der Saite zwischen  $x_1 - \frac{1}{2}\Delta x$  und  $x_1 + \frac{1}{2}\Delta x$  mit Dichte  $\rho$ , dass

$$mv = \int_{x_1 - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_1 + \frac{1}{2}\Delta x} \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} \rho \partial_t u(x, t) dx. \quad (4.21)$$

<sup>2</sup>LEX II. MUTATIONEM MOTUS PROPORTIONALEM ESSE VI MOTRICI IMPRESSAE, ET FIERI SECUNDUM LINEAM RECTAM QUA VIS ILLA IMPRIMITUR.

Gesetz II. Die Änderung einer Bewegungsgröße ist der eingepprägten Bewegungskraft proportional und sie folgt der Geraden, entlang welcher diese Kraft eingepprägt wird.

Also folgt für  $F = (\vec{F}_{\text{rechts}} + \vec{F}_{\text{links}})_2$  dann aus (4.19-4.21):

$$\begin{aligned} & \partial_t \left( \int_{x_1 - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_1 + \frac{1}{2}\Delta x} \sqrt{1 + u_x(x, t)^2} \rho \partial_t u(x, t) dx \right) \\ &= S \Delta x \frac{u_{xx}(x_1, t)}{(1 + u_x(x_1, t)^2)^{3/2}} + \mathcal{O}((\Delta x)^2). \end{aligned}$$

Dividiert man durch  $\Delta x$  und nimmt den Grenzwert für  $\Delta x \downarrow 0$ , dann folgt

$$\partial_t \left( \sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2} \rho \partial_t u(x_1, t) \right) = S \frac{u_{xx}(x_1, t)}{(1 + u_x(x_1, t)^2)^{3/2}}. \quad (4.22)$$

Angenommen, dass  $|u_x(x_1, t)| \ll 1$  und dass  $|u_{xt}(x_1, t)|$  beschränkt ist, approximiert man in (4.22) durch

$$1 + u_x(x_1, t)^2 \approx 1$$

und

$$\partial_t \sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2} = \frac{u_x(x_1, t) u_{xt}(x_1, t)}{\sqrt{1 + u_x(x_1, t)^2}} \approx 0.$$

Setzt man  $c^2 = S/\rho$ , dann wird (4.22) approximiert durch

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0. \quad (4.23)$$

**Bemerkung 4.6.1** Die Differentialgleichung in (4.23) heißt die eindimensionale Wellengleichung.

## 4.5 Die Wellengleichung

Wenn man eine kompressible Flüssigkeit oder Gas betrachtet, hat man erstens den Erhaltungssatz aus (4.4):

$$\partial_t \rho(x, t) + \nabla \cdot (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = 0. \quad (4.24)$$

Wir betrachten nun den Fall, bei dem der Druck  $p$  proportional zur Dichte  $\rho$  ist:

$$p(x, t) = c^2 \rho(x, t) \quad (4.25)$$

und verwenden wieder das zweite Gesetz von Newton:  $F = \frac{\partial}{\partial t}(mv)$  mit der Kraft  $F$  und dem Impuls  $mv$ . Die zugehörige Kräftegleichung für ein beliebiges Gebiet  $U \subset \Omega$ :

$$\begin{aligned} \text{„Impulsänderung von } U\text{“} &= \frac{\partial}{\partial t} (mv)_{\text{auf } U} \\ &= F_{\text{auf } U} = \text{„Gesamtdruck auf } \partial U\text{“,} \end{aligned}$$

wird

$$\partial_t \int_U \rho(x, t) \vec{v}(x, t) dx = - \int_{\partial U} p(x, t) \vec{v} d\sigma_x. \quad (4.26)$$

Mit wohldefiniertem auswärtigem Normalenvektor folgt aus dieser letzten Gleichung:

$$\int_U \partial_t (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) dx = - \int_U \nabla p(x, t) dx.$$

Weil  $U$  beliebig ist, gilt:

$$\partial_t (\rho(x, t) \vec{v}(x, t)) = -\nabla p(x, t). \quad (4.27)$$

Kombiniert man (4.27), (4.24) und (4.25), dann folgt

$$\Delta p = -\nabla \cdot \partial_t (\rho \vec{v}) = -\partial_t \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \partial_t \partial_t \rho = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 p.$$

**Bemerkung 4.6.2** Die Differentialgleichung

$$\partial_t^2 p(t, x) - c^2 \Delta p(t, x) = 0 \quad (4.28)$$

nennt man die Wellengleichung. Auch hier kann man durch Zeitskalierung  $c = 1$  setzen.

**Aufgabe 4.6** 1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x, t) = \sin(x) \cos(ct)$$

eine Lösung ist von

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+.$$

2. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x, t) = \frac{\sin(|x|)}{|x|} \cos(ct)$$

erweitert durch  $u(0, t) := \lim_{|x| \rightarrow 0} u(x, t) = \cos(ct)$  eine Lösung ist von

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ für } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+.$$

*Hinweis:* Für  $x \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$\Delta f(|x|) = \left( r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} f(r) \right)_{r=|x|}.$$

**Aufgabe 4.7** Ist die Funktion  $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ , definiert durch

$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{\sin(|x| - ct)}{|x|} & \text{für } ct < |x| < ct + \pi, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine distributionelle Lösung von

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \text{ für } (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+?$$

## 4.6 Die Membran

Ähnlich wie bei der Saite ist bei einer elastischen Membran die Kraft gleich der Spannung multipliziert mit der Krümmung. Nur ist nicht so ganz klar, welche Krümmung wir nehmen müssen, denn Funktionen  $(x, y) \mapsto u(x, y)$  können sich in zwei Richtungen „krümmen“. Ein etwas einfacherer Ansatz ist folgender. Statt das Kräftegleichgewicht darzustellen, betrachten wir die Energie. Wir nehmen an, dass bei einer eingespannten Membran die Energie proportional zum Flächeninhalt ist.

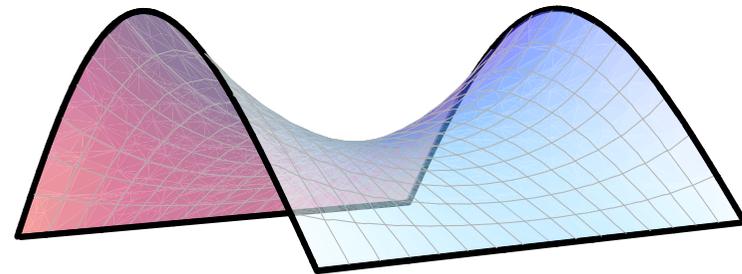


Abbildung 4.4: Ohne Kräfte von außen, hat eine eingespannte Membran oder Seifenblase die Form einer Oberfläche mit dem kleinsten Flächeninhalt.

Wenn wir die Membran parametrisieren durch

$$(x, y) \in \Omega \mapsto (x, y, u(x, y)) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

dann wird diese Energie als Funktional der Funktion  $u$  wie folgt:

$$E_{\text{elastisch}}(u) := \int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} d(x, y). \quad (4.29)$$

Lässt man außerdem Kräfte zu, die mit Dichte  $f(x, y)$  an der Stelle  $(x, y)$  vertikal eine Kraft ausüben, hat man zusätzlich einen Potentialterm durch Kraft mal Weg:

$$E_{\text{potentiell}}(u) := \int_{\Omega} f u \, d(x, y).$$

Die totale Energie ist

$$E_{\text{total}}(u) := \int_{\Omega} \left( \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - f u \right) d(x, y)$$

Das *Prinzip der kleinsten Wirkung*, auch *Hamiltonisches Prinzip*<sup>3</sup> genannt, wird angewendet. Dieses Prinzip sagt, dass die Funktion, die das passende physikalische Verhalten repräsentiert, dieses Funktional (Die Physiker würden sagen: diese Wirkung) minimiert. Mathematisch heißt das, dass das Funktional größer wird, wenn wir die Lösung  $u$  stören mit  $\varepsilon\phi$ :

$$E_{\text{total}}(u + \varepsilon\phi) \geq E_{\text{total}}(u) \quad \text{für alle } \varepsilon \in \mathbb{R} \text{ und } \phi \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Wenn die Funktion  $\varepsilon \mapsto E_{\text{total}}(u + \varepsilon\phi)$  differenzierbar ist, dann gilt

$$\left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} E_{\text{total}}(u + \varepsilon\phi) \right)_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{für alle } \phi \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (4.30)$$

Für  $u, \phi \in C^1(\bar{\Omega})$  ist (4.30) gleich

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\nabla u \cdot \nabla \phi}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} - f \phi \right) d(x, y) = 0.$$

<sup>3</sup>Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865)

Wenn außerdem gilt, dass  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , dann können wir für  $\phi \in C_0^1(\bar{\Omega})$  partiell integrieren und es folgt

$$\int_{\Omega} \left( -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) - f \right) \phi \, d(x, y) = 0.$$

Weil dieses Integral gleich 0 ist für alle solche  $\phi$ , findet man

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) = f. \quad (4.31)$$

Auch hier vereinfacht man für  $u_x^2 + u_y^2 \ll 1$  die Gleichung zu  $-\Delta u = f$ .

**Beispiel 4.7** Für konstante  $f \in [0, 2]$ ,  $\Omega = B_1(0)$  und  $h \geq 0$ , so dass  $f\sqrt{1+h^2} = 2$  gilt, kann man zeigen, dass

$$u(x, y) = \sqrt{1 + h^2 - x^2 - y^2} - h$$

die Differentialgleichung (4.31) löst. Für  $f > 2$  kann man zeigen, dass es keine Lösungen gibt! Es gibt auch Membrane, die sich nicht durch  $(x, y, u(x, y))$  parametrisieren lassen. Zum Beispiel kann man zeigen, dass

$$(\varphi, \theta) \mapsto \left( R \cos \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \theta + \sqrt{R^2 - 1} \right)$$

mit  $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \arcsin(1/R)]$  eine Oberfläche parametrisiert, die man auch als Lösung zulassen sollte. Diese Lösung lässt sich nicht als Funktion von  $(x, y)$  schreiben.

Die Skizzen in Abbildung 4.6 lassen sich nicht durch  $(x, y, u(x, y))$  parametrisieren. Stattdessen kann man

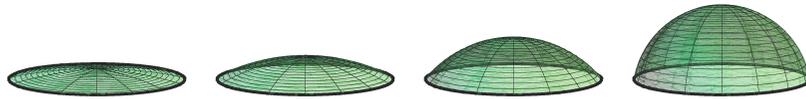


Abbildung 4.5: Einige Lösungen zu Beispiel 4.7 mit  $f$  gleich .4, .8, 1.2 und 1.4.



Abbildung 4.6: Einige Membrane, die sich nicht durch  $(x, y, u(x, y))$  parametrisieren lassen;  $f$  ist gleich 1.4, 1.2, .8 und .6. Wie man erwarten sollte: Kugeloberflächen.

$(r(\varphi, \theta) \cos \varphi \sin \theta, r(\varphi, \theta) \sin \varphi \sin \theta, r(\varphi, \theta) \cos \theta)$  versuchen. Man kann das Funktional nach  $r, \varphi$  und  $\theta$  umschreiben und kann sogar zeigen, dass die Bilder in Abbildung 4.6 Lösungen einer Differentialgleichung wie in (4.31) erfüllen. Diese Lösungen sind jedoch keine Minima. Sie sind zwar stationäre Punkte für dieses Funktional, sind jedoch kein Minimum, sondern ein Sattelpunkt.

Seifenblasen versuchen ihren Flächeninhalt zu minimieren und haben darum die in (4.29) genannte Energie. Sie haben aber nicht die oben genannte potentielle Energie. Sie minimieren (4.29) unter der Nebenbedingung, dass ihr Volumen konstant ist.

## 4.7 Stationäre Saiten und Balken

Die Energie einer aufgespannten Saite zwischen  $(0, 0)$  und  $(\ell, 0)$  ist proportional zu der Zunahme der Länge durch die Auslenkung:

$$E_{\text{elastisch},S}(u) = s \int_0^\ell \left( \sqrt{1 + u_x^2} - 1 \right) dx \approx \int_0^\ell \frac{1}{2} s u_x^2 dx.$$

Wenn man statt einer Saite einen Balken betrachtet, der an beiden Enden in die vertikale Richtung zurückgehalten wird, wird die elastische Energie durch das Quadrat der Krümmung verursacht:

$$E_{\text{elastisch},B}(u) = \frac{1}{2} \sigma \int_0^\ell \frac{u_{xx}^2}{(1 + u_x^2)^3} dx \approx \int_0^\ell \frac{1}{2} \sigma u_{xx}^2 dx$$

für kleine Auslenkungen. Hat man zusätzlich eine Kraft mit Dichte  $f$ , welche die Saite oder den Balken lokal seitwärts biegt, findet man

$$E_{\text{total},S}(u) = \int_0^\ell \left( \frac{1}{2} s u_x^2 - f u \right) dx, \quad (4.32)$$

$$E_{\text{total},B}(u) = \int_0^\ell \left( \frac{1}{2} \sigma u_{xx}^2 - f u \right) dx. \quad (4.33)$$

Testen mit  $\varphi$  unter Anwendung des Hamiltonischen Prinzips und durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned} \text{für } S: & \quad -s u_{xx} = f, \\ \text{für } B: & \quad \sigma u_{xxxx} = f. \end{aligned}$$

Für die Saite findet man die Randbedingungen

$$u(0) = 0 \text{ und } u(\ell) = 0.$$

Für den Balken gibt es mehrere physikalisch vernünftige Randbedingungen.

**Aufgabe 4.8** *Wir nehmen an, dass  $f \in C[0, \ell]$  und dass für  $u$  und die Testfunktionen  $\varphi$  gilt:  $u, \varphi \in C^2[0, \ell] \cap C_0[0, \ell]$ .*

1. Zeigen Sie, dass  $u$  das Minimum bei (4.32) gibt, wenn

$$\int_0^\ell (s u_x \varphi_x - f \varphi) dx = 0 \quad (4.34)$$

für alle geschickte Funktionen  $\varphi$ .

2. Zeigen Sie, dass wenn (4.34) gilt, so folgt  $-s u_{xx} = f$ .

**Bemerkung 4.7.1** *Wenn wir das zeitabhängige Problem betrachten und die Kraftdichte durch die vertikale Beschleunigung verursacht wird, finden wir die linearisierte Gleichung eines schwingenden Balkens:*

$$u_{tt}(x, t) - \sigma u_{xxxx}(x, t) = 0. \quad (4.35)$$

## Erster Ordnung: Transportgleichungen

### 5.1 Lineare und semilineare Transportgleichungen

#### 5.1.1 Picard-Lindelöf

Transportgleichungen kann man zurückführen auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Wir wiederholen eines der wichtigsten Ergebnisse für das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (5.1)$$

Hier ist  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben und man sucht ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , mit  $0 \in I$ , und eine Funktion  $x \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ . Für  $f$  nimmt man an, sie erfüllt die Lipschitz-Bedingung:

**Definition 5.1** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  erfüllt die Lipschitz-Bedingung, wenn

1.  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  stetig ist, und

2. es  $L \in \mathbb{R}^+$  gibt derart, dass  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Eine einfache Version des Hauptsatzes zu gewöhnlichen Differentialgleichungen ist wie folgt:

**Theorem 5.2 (Picard-Lindelöf)** Wenn  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Lipschitz-Bedingung erfüllt, dann

1. hat das Anfangswertproblem (5.1) eine Lösung  $t \mapsto x(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ , und
2. wenn  $x(\cdot)$  und  $y(\cdot)$  Lösungen der Differentialgleichung in (5.1) sind, dann gilt

$$|x(t) - y(t)| \leq e^{L|t|} |x(0) - y(0)| \text{ für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

**Bemerkung 5.2.1** Die Ungleichung in (5.2) liefert die Eindeutigkeit bei dem Anfangswertproblem und auch, dass kleine Störungen beim Anfangswert auch nur kleine Änderungen, jedenfalls in beschränkter Zeit, in den Lösungen verursachen. Hadamard würde sich freuen.

**Bemerkung 5.2.2** Bei vielen Funktionen ist die zweite Bedingung in Definition 5.1 nicht global erfüllt, sondern nur lokal: Für  $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  mit  $x_0 \in K^\circ$  gibt es  $L_K \in \mathbb{R}^+$  derart, dass

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_K |x - y| \text{ für alle } (t, x), (t, y) \in K.$$

Es gibt dann eine angepasste Version von Theorem 5.2, die besagt, dass die Ergebnisse nur gelten, bis der Rand  $\partial K$  durch  $(t, x(t))$  erreicht wird.

Wenn die Funktion  $f$  nicht von  $t$  abhängt, heißt die gewöhnliche Differentialgleichung *autonom*. Sie hat dann also die Form

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Wenn  $t \mapsto x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung von (5.1) ist, dann nennt man  $\{x(t); t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$  manchmal die Lösungskurve.

**Korollar 5.3** Bei autonomen Differentialgleichungen mit  $f$  Lipschitz schneiden unterschiedliche Lösungskurven sich nicht.

**Beweis.** Wenn  $x_a(\cdot)$  und  $x_b(\cdot)$  beide die Differentialgleichung in (5.1) erfüllen und sich schneiden, dann gibt es  $t_a, t_b \in \mathbb{R}$  mit

$$x_a(t_a) = x_b(t_b) =: x_0.$$

Weil  $t \mapsto x_b(t + t_b)$  und  $t \mapsto x_a(t + t_a)$  das gleiche Anfangswertproblem löst, nämlich

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.3)$$

folgt  $x_b(t + t_b) = x_a(t + t_a)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Lösungskurven sind dann entweder identisch oder sie schneiden sich nicht. ■

## 5.1.2 Transportgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine sehr einfache Differentialgleichung aus dieser Klasse ist

$$\vec{v} \cdot \nabla u(x) = f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.4)$$

Hier sind  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben und  $u$  ist gesucht. Wir betrachten eine Kurve

$$x(t) = x_0 + t \vec{v}.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x(t)) = \vec{v} \cdot \nabla u(x(t))$$

und wenn wir uns auf eine solche Kurve beschränken, kann man (5.4) leicht lösen. Für  $U(t) := u(x(t))$  und  $F(t) := f(x(t))$  wird die Differentialgleichung

$$U'(t) = F(t).$$

Also hat man

$$U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^t F(s) ds.$$

Zurückgeführt auf (5.4) folgt

$$u(x_0 + t \vec{v}) = u(x_0) + \int_0^t f(x_0 + s \vec{v}) ds \quad (5.5)$$

und diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung auf der Geraden durch  $x_0$  in der Richtung  $\vec{v}$ . Kennt man  $u(x)$  auf einer  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$ , die mit jeder Geraden  $\{x_0 + t \vec{v}; t \in \mathbb{R}\}$  höchstens einen Punkt gemeinsam

hat, dann hat man eine Lösung der Differentialgleichung auf  $\Omega = \{x_0 + t \vec{v}; x_0 \in M \text{ und } t \in \mathbb{R}\}$ .

Etwas haben wir nicht beachtet. Wenn  $x \in M \mapsto u(x)|_M$  nicht differenzierbar ist, kann man auch nicht erwarten, dass  $\nabla u$  für  $u$  in (5.5) definiert ist. Im schwachen Sinne ist es trotzdem eine Lösung.

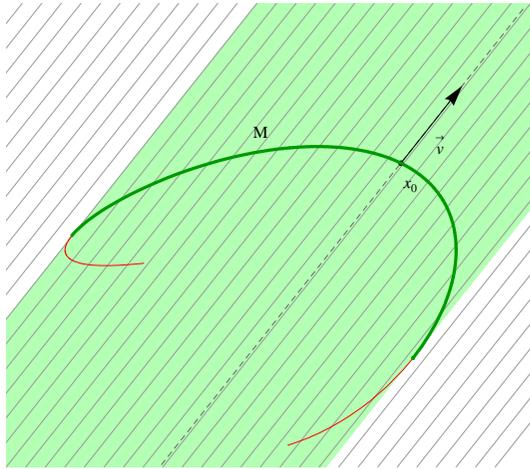


Abbildung 5.1: Die Werte, vorgeschrieben auf der grünen Kurve, geben eine Lösung auf dem hellgrünen Gebiet. Man kann  $u$  nicht beliebig vorschreiben auf der Fortsetzung (die rote Kurve).

**Beispiel 5.4** Wir suchen eine Lösung von

$$\begin{cases} u_x(x, y) + u_y(x, y) = 1, \\ u(x, 0) = x^2. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x, y) = 1.$$

*Schritt 1.* Wir suchen die charakteristischen Kurven durch  $\{(x_0, 0); x_0 \in \mathbb{R}\}$  und die sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Schritt 2.* Wir setzen  $U(t) = u(x(t), y(t))$  und finden die gewöhnliche Differentialgleichung

$$U'(t) = \partial_t(u(x(t), y(t))) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x(t), y(t)) = 1$$

mit der Anfangsbedingung  $U(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, 0) = x_0^2$ . Es folgt

$$U(t) = U(0) + t = x_0^2 + t.$$

*Schritt 3.* Transformieren zu den alten Koordinaten verwendet

$$\begin{aligned} u(x(t), y(t)) &= U(t) = x_0^2 + t \\ x(t) &= x_0 + t \text{ und } y(t) = t. \end{aligned}$$

Es folgt  $u(x_0 + t, t) = x_0^2 + t$  und man findet eine Lösung auf ganz  $\mathbb{R}^2$  für  $u$ , nämlich

$$u(x, y) = (x - y)^2 + y.$$

**Aufgabe 5.1** Geben Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} u_x + u_y = 1 & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(t, -t) = \sin(t) & \text{für } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Aufgabe 5.2** Gegeben ist die Differentialgleichung

$$u_x - u_y = 1 \text{ für } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

mit Randbedingungen auf dem Einheitskreis.

1. Geben Sie ein größtes Intervall in  $\mathbb{R}$  an, das Sie verwenden können von

$$u(\cos t, \sin t) = \sin(t)^2 \text{ für } t \in \mathbb{R},$$

um eine Lösung festzulegen.

2. Für welche  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ist die Lösung dann festgelegt?

### 5.1.3 Allgemeine (semi)lineare Transportgleichungen

Die Differentialgleichung, die gemeint ist, ist die folgende:

$$\vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n. \quad (5.6)$$

Hier ist  $\vec{v}$  und  $f$  gegeben und wir nehmen an, dass  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  und  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Zusätzlich soll eine Randwertbedingung erfüllt sein:

$$u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M \quad (5.7)$$

mit  $M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Das Problem (5.6)-(5.7) löst man in zwei Schritten.

- Man löse erstens  $x'(t) = \vec{v}(x(t))$ . Wenn  $x \mapsto v(x)$  die Lipschitz-Bedingung erfüllt, gibt es für jedes  $x_0 \in M$  genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} x'(t) = \vec{v}(x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Dies folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Die Lösung  $t \mapsto x(t; x_0)$  ist stetig differenzierbar.

Die Lösungen von (5.8) nennt man die *charakteristischen Kurven* für (5.6). Aus der Eindeutigkeit und der Tatsache, dass  $x'(t) = \vec{v}(x(t))$  autonom ist, folgt:

**Lemma 5.5** Sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ . Wenn sich zwei charakteristische Kurven  $t \mapsto x_a(t)$  und  $t \mapsto x_b(t)$  zu der (semi)linearen Transportgleichung (5.6) schneiden, sind sie „identisch“: es gibt  $T \in \mathbb{R}$  mit  $x_a(t) = x_b(t+T)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

- Sei  $t \mapsto x(t; x_0)$  eine Lösung von (5.8) und schreibe  $U(t) = u(x(t; x_0))$ . Definiere  $F(t, u) = f(x(t; x_0), u)$ . Wenn  $u$  (5.6) erfüllt, dann gilt

$$\begin{aligned} U'(t) &= x'(t; x_0) \cdot \nabla u(x(t; x_0)) \\ &= \vec{v}(x(t; x_0)) \cdot \nabla u(x(t; x_0)) \\ &= f(x(t; x_0), u(x(t; x_0))) = F(t, U(t)). \end{aligned}$$

Wenn  $(x, u) \mapsto f(x, u)$  die Lipschitz-Bedingung erfüllt, erfüllt  $(t, u) \mapsto F(t, u)$  die Lipschitz-Bedingung. Auch hier kann man den Satz von Picard-Lindelöf anwenden, um genau eine Lösung zu finden zu

$$\begin{cases} U'(t) = F(t, U(t)), \\ U(0) = u_0(x_0). \end{cases} \quad (5.9)$$

Schreibe für diese Lösung  $t \mapsto U(t; x_0)$ .

Für die Funktion  $u$ , die (5.6)-(5.7) lösen soll, findet man

$$u(x(t; x_0)) = U(t; x_0).$$

Es ist noch nicht klar, ob  $u$  so tatsächlich wohldefiniert ist in einer Umgebung von  $M$ . Die Funktion könnte mehrfach oder sogar überhaupt nicht definiert sein. Wir brauchen dafür die folgende Bedingung:

**Bedingung 5.6** Sei  $M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  ein Vektorfeld. Wir schreiben  $\vec{v}(x)$  für einen Normalenvektor an  $M$  in  $x \in M$ . Man sagt die Transversalitätsbedingung ist erfüllt, wenn

$$\vec{v}(x) \cdot \vec{v}(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in M. \quad (5.10)$$

**Proposition 5.7** Sei  $M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^n)$  derart, dass die Transversalitätsbedingung (5.10) erfüllt ist. Sei außerdem  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  und  $u_0 \in C^1(M)$ . Dann gibt es lokal genau eine Lösung  $x \mapsto u(x)$  von

$$\begin{cases} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases} \quad (5.11)$$

**Bemerkung 5.7.1** Die Lösungen lassen sich sogar definieren auf dem ganzen Gebiet, welches von diesen charakteristischen Kurven überdeckt wird. Bei diesen Kurven kann mehreres passieren: sie hauen ab nach  $\infty$ ; sie häufen sich in einem Punkt; sie kommen zurück zu der Mannigfaltigkeit und auch Kombinationen sind möglich. Genaueres erfahren Sie in einer Vorlesung *Dynamische Systeme*.

**Beweis.** Weil  $M$  eine  $(n-1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  ist, gibt es in der Nähe von  $x_M$  ein lokales Koordinatensystem für  $M$

$$\Psi : B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n.$$

Durch die Bedingung in (5.10) gibt

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \mapsto \Psi(y_1, \dots, y_{n-1}) + t v(\Psi(y_1, \dots, y_{n-1}))$$

ein lokales Koordinatensystem für  $\mathbb{R}^n$  in der Nähe von  $x_M$ . Nun betrachten wir

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, t) \mapsto x(t; \Psi(y_1, \dots, y_{n-1})). \quad (5.12)$$

Weil

$$\begin{aligned} \nabla_y x(t; \Psi(y_1, \dots, y_{n-1}))|_{(0, \dots, 0, 0)} &= \nabla_y \Psi(y_1, \dots, y_{n-1})|_{(0, \dots, 0)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} x(t; \Psi(y_1, \dots, y_{n-1}))|_{(0, \dots, 0, 0)} &= v(x_M), \end{aligned}$$

und diese Ableitungen stetig sind, ist auch (5.12) lokal ein wohldefiniertes Koordinatensystem. Anders gesagt, die Funktion  $u$  mit

$$u(x(t; \Psi(y))) := U(t; \Psi(y))$$

ist wohldefiniert. Wegen Lemma 5.5 und der Transversalitätsbedingung ist  $u$  sogar eindeutig definiert auf

$$\Omega = \{x(t; \Psi(y)); t \in [0, T_{\Psi(y)}] \text{ und } y \in M\}.$$

Hier ist  $T_{\Psi(y)} \in (0, \infty]$  entweder definiert durch das maximale Existenzintervall oder durch die Bedingung

$$x(T_{\Psi(y)}; \Psi(y)) \in M.$$

Die Konstruktion zeigt uns, dass die Differentialgleichung erfüllt ist und weil jeder Punkt in einer kleinen Umgebung eindeutig über eine charakteristische Kurve zurückzuführen ist auf ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung, ist diese klassische Lösung lokal eindeutig. ■

**Beispiel 5.8** Finde die Lösung von

$$\begin{cases} u_x(x, y) + y u_y(x, y) = u(x, y), \\ u(x, 1) = x + 1. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung kann man schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \cdot \nabla u(x, y) = u(x, y).$$

Die Transversalitätsbedingung ist erfüllt, weil

$$\vec{v}(x, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nicht in der Tangentialrichtung von  $\Gamma = \{(x, 1); x \in \mathbb{R}\}$  liegt.

Schritt 1: Wir suchen erst die charakteristischen Kurven, die durch  $\{(x_0, 1); x_0 \in \mathbb{R}\}$  gehen:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen sind

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Schritt 2: Wir suchen die Lösungen  $U(\cdot) = U(\cdot; x_0)$  von

$$\begin{cases} U'(t) = U(t), \\ U(0) = x_0 + 1, \end{cases}$$

und finden

$$U(t; x_0) = (x_0 + 1) e^t.$$

Schritt 3: Wir müssen noch zurückrechnen zu  $(x, y)$ -Koordinaten. Es gilt

$$t = \ln(y) \text{ und } x_0 = x - t = x - \ln(y)$$

und man findet für  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= U(t; x_0) = U(\ln(y); x - \ln(y)) \\ &= (x - \ln(y) + 1) y. \end{aligned}$$

Für  $y \leq 0$  ist die Lösung nicht bestimmt.

**Aufgabe 5.3** Geben Sie eine Lösung von

$$\begin{cases} xu_x + u_y = 1 & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \sin(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Aufgabe 5.4** Versuchen Sie, das folgende System so weit wie möglich zu lösen:

$$\begin{cases} xu_x + (1 + x^2)u_y = 1 & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2} & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Wenn Sie dies richtig lösen, begegnen Sie irgendwo der Funktion  $t \mapsto t + \frac{1}{2}x^2(1 - e^{-2t})$ . Weil diese Funktion monoton wachsend ist für alle  $x \in \mathbb{R}$ , existiert eine Inverse  $y \mapsto f(y; x)$ , die man jedoch nicht explizit berechnen kann, es sei denn, man verwendet die Funktion ProductLog, die in Mathematica definiert wird.

**Aufgabe 5.5** Wenn wir

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = f(x, y) & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x, 2 - x) = g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

betrachten, dann geben Sie bitte an, für welche  $(x, y) \in \mathbb{R}$  die Lösung als Funktion von  $f$  und  $g$  festgelegt ist.

## 5.2 Quasilineare Transportgleichungen

Gemeint sind Differentialgleichungen der Form

$$\vec{v}(x, u) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)).$$

Wenn versucht wird, hier diese Methode mit den charakteristischen Kurven anzuwenden, bemerkt man, dass diese Kurven abhängig sind von der Lösung  $u$ . Das bedeutet, dass man das Finden dieser Kurven nicht mehr trennen kann von dem Lösen entlang dieser Kurven. Trotzdem gibt es die Möglichkeit, beides gleichzeitig zu tun! Man betrachte das folgende System von  $n + 1$  Gleichungen

$$\begin{cases} x'(t) = \vec{v}(x(t), U(t)), \\ U'(t) = f(x(t), U(t)). \end{cases}$$

Hat man Anfangswertbedingungen  $u(x) = u_0(x)$  für  $x \in M$ , eine  $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, bekommt man für jedes  $x_0 \in M$  das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x'(t) = \vec{v}(x(t), U(t)), \\ U'(t) = f(x(t), U(t)), \\ x(0) = x_0 \text{ und } U(0) = u_0(x_0). \end{cases}$$

Wenn  $\vec{v}$  und  $f$  differenzierbar sind, kann man den Satz von Picard-Lindelöf anwenden, um eine eindeutige Lösung zu finden bei jedem  $x_0 \in M$ . Schreiben wir für die Lösung

$$t \mapsto \left( x(t; x_0, u_0), U(t; x_0, u_0) \right)$$

Wenn  $u(x)$  wohldefiniert ist durch

$$u(x(t; x_0, u_0)) := U(t; x_0, u_0),$$

das heißt, wenn es genau ein  $(t, x_0) \in \mathbb{R} \times M$  gibt mit  $x = x(t; x_0, u_0)$ , dann gilt

$$\begin{aligned} x'(t; x_0, u_0) \cdot \nabla u(x(t; x_0, u_0)) &= U'(t; x_0, u_0) \\ &= f(x(t; x_0, u_0), U(t; x_0, u_0)), \end{aligned}$$

und für solche  $x = x(t; x_0, u_0)$  folgt

$$v(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)).$$

Auch hier gilt ein ähnliches Ergebnis wie in Proposition 5.7:

**Proposition 5.9** Sei  $M$  eine  $(n - 1)$ -dimensionale  $C^2$ -Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R}^n), \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad u_0 \in C^1(M).$$

Wenn  $\vec{v}$  und  $u_0$  derart sind, dass

$$\vec{v}(x, u_0(x)) \cdot \vec{v}(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in M, \quad (5.13)$$

dann gibt es lokal genau eine Lösung  $x \mapsto u(x)$  von

$$\begin{cases} \vec{v}(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \quad \text{für } x \in M. \end{cases} \quad (5.14)$$

**Beweis.** Dieser ist ähnlich wie der für Proposition 5.7. ■

**Beispiel 5.10** Wir betrachten

$$\begin{cases} u(x, y) u_x(x, y) + u_y(x, y) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan x. \end{cases} \quad (5.15)$$

Um dieses System mit dem obigen Ansatz zu lösen, betrachtet man

$$\begin{cases} x'(t) = U(t) & \text{mit } x(0) = s, \\ y'(t) = 1 & \text{mit } y(0) = 0, \\ U'(t) = 0 & \text{mit } U(0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan s. \end{cases}$$

Es folgt, wenn wir nach  $t$  integrieren und anschließend die Anfangswerte einsetzen, dass

$$\begin{cases} U(t) = U(0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan s, \\ y(t) = y(0) + t = t, \\ x(t) = x(0) + \int_0^t U(\tau) d\tau = s + t \left( \frac{1}{2}\pi - \arctan s \right). \end{cases} \quad (5.16)$$

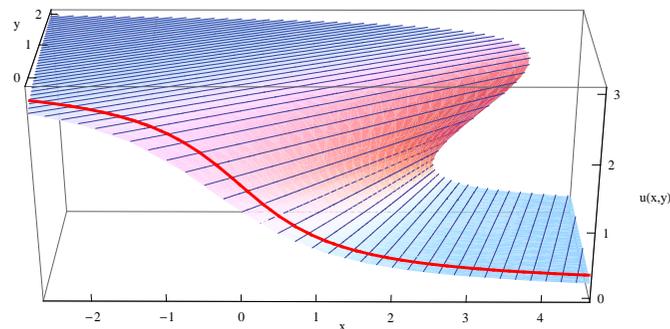


Abbildung 5.3: Skizzen der Kurven  $t \mapsto (x(t), y(t), U(t))$  aus (5.16) bei verschiedenen  $s$ . In rot ist die Bedingung  $u(x, 0) = \frac{1}{2}\pi - \arctan x$  dargestellt.

Wir finden:

$$\begin{aligned} U(t) &= u(x(t), y(t)) = u\left(s + t \left( \frac{1}{2}\pi - \arctan s \right), t\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi - \arctan s. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Wenn wir versuchen die Lösung in  $x$  und  $y$  darzustellen, dann folgt  $t = y$  und  $s$  sollen wir lösen aus

$$x = s + y \left( \frac{1}{2}\pi - \arctan s \right). \quad (5.18)$$

Das ist möglich, wenn  $y \leq 1$ , denn dann ist die Funktion  $s \mapsto s - y \arctan s$  monoton. Für  $y > 1$  ist diese Funktion nicht monoton und (5.18) ist dann nicht eindeutig lösbar in  $s$ . Das sieht man, wenn man die Abbildung 5.3 von oben betrachtet. Diese Ansicht findet man in Abbildung 5.4.

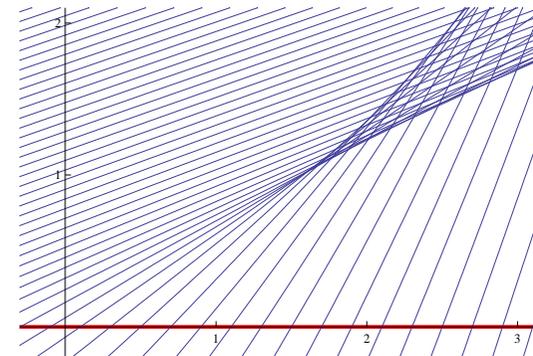


Abbildung 5.4: Die Kurven aus 5.16

**Aufgabe 5.6** Geben Sie die Funktion  $t \mapsto (x(t), y(t), U(t))$  an, die in parametrisierter Form (teils) eine Lösung von

$$\begin{cases} u(x, y)u_x(x, y) + u_y(x, y) = 1 & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = e^{-x^2} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

liefert.

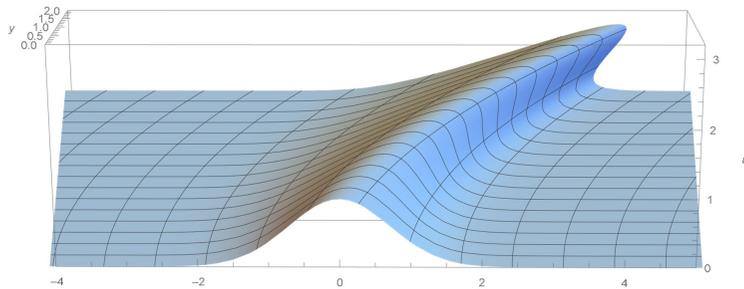


Abbildung 5.5: Bild der Parametrisierung bei Aufgabe 5.6

### 5.2.1 Stoßwellen

Bei quasilinearen Transportgleichungen gibt es also Probleme, weil charakteristische Kurven abhängen von der Lösung selber. Das bedeutet, dass die Differentialgleichung für die charakteristischen Kurven nicht autonom ist und die Lösungen zu den verschiedenen Anfangswerten sich schneiden können. Bei einer autonomen Differentialgleichung mit Lipschitz-Bedingung ist solches nicht möglich. In diesem Abschnitt werden wir erklären, wie man bei einem solchen Fall vorgeht. Wir werden uns beschränken auf zwei Dimensionen und sogar auf Anfangswertprobleme der Gestalt:

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.19)$$

Kommen wir zurück zu Beispiel 5.10. Die Differentialgleichung  $u u_x + u_y = 0$  nennt man die *nicht-viskose Burgersgleichung*<sup>1</sup>. Üblicherweise wird sie geschrieben als

$$u_t + \frac{1}{2} (u^2)_x = 0, \quad (5.20)$$

<sup>1</sup>Johannes Martinus Burgers (1895–1981), Technische Hogeschool Delft, 1940.

wobei  $t$  die Zeit- und  $x$  die Raumvariable ist. Sie wird als ein einfaches Modell für eine eindimensionale Strömung gesehen wie zum Beispiel für die Verkehrsdichte im Straßenverkehr. Im letzten Beispiel haben wir gesehen, dass sich dieses Modell an bestimmten Stellen nicht mehr eindeutig fortsetzen lässt. Man hat nun zwei Möglichkeiten: Entweder verwirft man dieses Modell als nicht tauglich oder man erweitert den Lösungsbegriff, das heißt, man lässt allgemeinere Lösungstypen zu.

Eine erste Möglichkeit, die man für (5.19) in Betracht zieht, ist wenn man statt (5.20) die *viskose Burgersgleichung* betrachtet:

$$u_t + \frac{1}{2} (u^2)_x = \varepsilon u_{xx}, \quad (5.21)$$

mit  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Diese Gleichung ist zweiter Ordnung und passt nicht in dieses Kapitel.

Eine zweite Möglichkeit wäre zum Beispiel distributionelle Lösungen zu betrachten. Wir passen die Definition von distributioneller Lösung an für beschränkte Funktionen und nehmen zusätzlich die Anfangswertbedingung mit hinein:

**Definition 5.11** Wir nennen  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$  eine *Integrallösung* von (5.19), wenn für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  gilt:

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} (u \varphi_t + F(u) \varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0. \quad (5.22)$$

Dieses Integral ist so gewählt, dass die Integralgleichung für klassische Lösungen erfüllt ist. Denn für  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  und  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$  gilt mit partieller Integration nach  $t$

beziehungsweise nach  $x$ , dass

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} u \varphi_t \, dx dt \\ = - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) \, dx - \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} u_t \varphi \, dx dt, \end{aligned}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} F(u) \varphi_x \, dx dt = - \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} F(u)_x \varphi \, dx dt,$$

und (5.19) liefert (5.22). Und umgekehrt, wenn

$$u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$$

ist und (5.22) erfüllt, dann folgt sowohl die Differentialgleichung im klassischen Sinne als auch die Anfangswertbedingung.

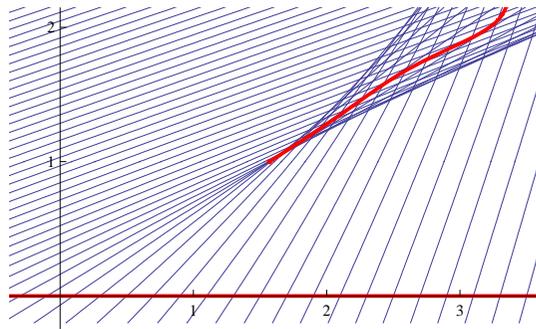


Abbildung 5.6: Welche Unstetigkeitskurve ist die richtige?

Die Frage ist nun, ob diese Definition auch reicht, um eine Lösung auszuwählen, die fast überall eindeutig definiert ist. Oder, anders gesagt, welchen charakteristischen Kurven

sollen wir in dem mehrfach belegten Gebiet folgen? Eine vernünftige Lösung scheint zu sein, dass wir annehmen, dass es eine trennende Kurve gibt. An dieser trennenden Kurve wird die Lösung einen Sprung haben.

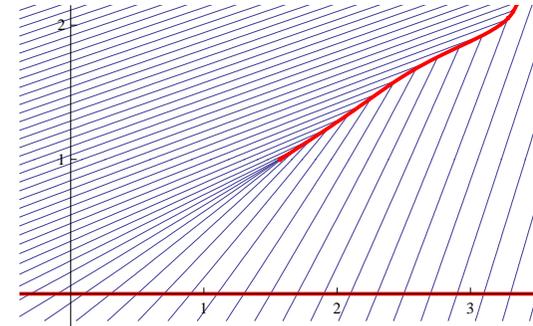


Abbildung 5.7: Vielleicht diese?

Nennen wir das Gebiet links von der Stoßwelle  $\Omega_\ell$  und rechts  $\Omega_r$ . Die Trennkurve nennen wir  $S$  und wir nehmen an, dass sie  $C^1$  ist. Links und rechts haben wir klassische Lösungen  $u_\ell$  und  $u_r$ . Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}} (u \varphi_t + F(u) \varphi_x) \, dx dt = \\ &= \iint_{\Omega_\ell} (u_\ell \varphi_t + F(u_\ell) \varphi_x) \, dx dt + \iint_{\Omega_r} (u_r \varphi_t + F(u_r) \varphi_x) \, dx dt \\ &= \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_\ell) \\ u_\ell \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell d\sigma + \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_r) \\ u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_r d\sigma \\ &= \int_S \varphi \begin{pmatrix} F(u_\ell) - F(u_r) \\ u_\ell - u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell d\sigma. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Weil dies für alle Testfunktionen  $\varphi$  gilt, folgt

$$\begin{pmatrix} F(u_\ell) - F(u_r) \\ u_\ell - u_r \end{pmatrix} \cdot \vec{\nu}_\ell = 0. \quad (5.24)$$

Wir kennen so die Richtung von  $S$ , denn senkrecht auf den Normalenvektor zeigt genau die Richtung der Trennkurve. Eine Parametrisierung von  $S$  findet man, weil  $u_\ell > u_r$ , also durch

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(0) &= S_0, \\ \vec{\gamma}'(\tau) &= \begin{pmatrix} F(u_\ell(\vec{\gamma}(\tau))) - F(u_r(\vec{\gamma}(\tau))) \\ u_\ell(\vec{\gamma}(\tau)) - u_r(\vec{\gamma}(\tau)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

wenn  $S_0$  der Anfang der Unstetigkeitskurve ist. Statt (5.25) kann man auch wie folgt parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x'(\tau) \\ t'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(u_\ell(\vec{\gamma}(\tau))) - F(u_r(\vec{\gamma}(\tau)))}{u_\ell(\vec{\gamma}(\tau)) - u_r(\vec{\gamma}(\tau))} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x(0) \\ t(0) \end{pmatrix} = S_0 \quad (5.26)$$

und man findet die Kurve  $(x(t), t)$  durch

$$x'(t) = \frac{F(u_\ell(x(t), t)) - F(u_r(x(t), t))}{u_\ell(x(t), t) - u_r(x(t), t)}.$$

Die Geschwindigkeit der Unstetigkeit an der Stelle  $S = x(t)$  ist  $v_S = x'(t)$ . Anders gesagt, es gilt:

**Bedingung 5.12 (Die Rankine-Hugoniot-Bedingung)** <sup>2 3</sup>

$$(u_\ell - u_r) v_S = (F(u_\ell) - F(u_r)). \quad (5.27)$$

<sup>2</sup>Pierre-Henri Hugoniot (1851–1887), Französischer Mathematiker und Artillerieoffizier.

<sup>3</sup>William John Macquorn Rankine (1820–1872), Schottischer Physi-

Diese Bedingung soll wie folgt gelesen werden. Das Teilgebiet, in dem die Unstetigkeitskurve liegen sollte, also das Gebiet, in dem mehrere charakteristische Kurven aufeinander treffen, wird sowohl durch charakteristische Kurven von rechts als auch durch charakteristische Kurven von links beschrieben (und sogar auch noch durch charakteristische Kurven dazwischen). Man definiert in diesem Teilgebiet  $u_\ell$  durch die charakteristischen Kurven von links und  $u_r$  durch die charakteristischen Kurven von rechts. Auf dem Teilgebiet ist nun sowohl  $u_\ell$  als  $u_r$  definiert und so auch die Bedingung in (5.27).

**Beispiel 5.13** *Wir kommen zurück zu Beispiel 5.10. Welche Unstetigkeitskurve erfüllt die Rankine-Hugoniot-Bedingung? Für das Randwertproblem (5.15) gilt  $F(u) = \frac{1}{2}u^2$  und es folgt*

$$v_S = \frac{\frac{1}{2}u_\ell^2 - \frac{1}{2}u_r^2}{u_\ell - u_r} = \frac{u_\ell + u_r}{2}.$$

ker, Bauingenieur und Dichter:

The Three Foot Rule

When I was bound apprentice and learnt to use my hands  
Folk never talked of measures that came from foreign lands  
Now I'm a British Workman, too old to go to school  
So whether the chisel or file I hold, I'll stick to my three-foot rule.

Some talk of millimetres and some of kilograms  
And some of decilitres to measure beer and drams  
But I'm a British Workman, too old to go to school  
So by pounds I'll eat, and by quarts I'll drink, and I'll work by my three-foot rule.

A party of astronomers went measuring the Earth  
And 40 million metres they took to be its girth  
Five hundred million inches though, go through from pole to pole  
So let's stick to inches, feet and yards and the good old three-foot rule.

The great Egyptian pyramid's a thousand yards about  
And when the masons finished it they raised a joyful shout  
The chap that planned that building, I'm bound he was no fool  
And now 'tis proved beyond a doubt he used a three-foot rule.

Here's health to every learned man that goes by common sense  
And would not plague the workman by any vain pretence  
But as for those philanthropists who'd send us back to school  
Oh! bless their eyes, if ever they tries to put down the three-foot rule.

J. M. RANKINE

Wir können zeigen, dass die Unstetigkeitskurve durch  $(x(t), t)$  mit  $x(t) = \frac{1}{2}\pi t$  parametrisiert wird. Denn an der Stelle  $(\frac{1}{2}\pi t, t)$  mit  $t > 1$  treffen sich die linke und die rechte charakteristische Kurve für

$$s_r = -s_\ell = \mu(t),$$

wobei  $\mu(t)$  die positive Lösung von  $\mu = t \arctan \mu$  sei. Es gilt, dass

$$x'(t) = \frac{u_\ell + u_r}{2} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\arctan s_\ell + \arctan s_r) = \frac{1}{2}\pi.$$

Die passenden Bilder stehen in Abbildung 5.8 und 5.9. Die Kurve  $\{(x(t), t); t \geq 1\}$  ist eine Stoßwelle.

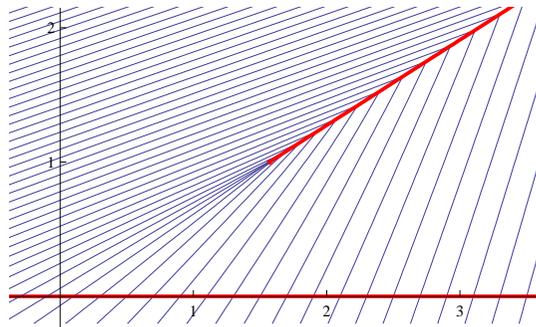


Abbildung 5.8: Die Unstetigkeitskurve, die die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt. Vergleichen Sie mit Abbildung 5.3

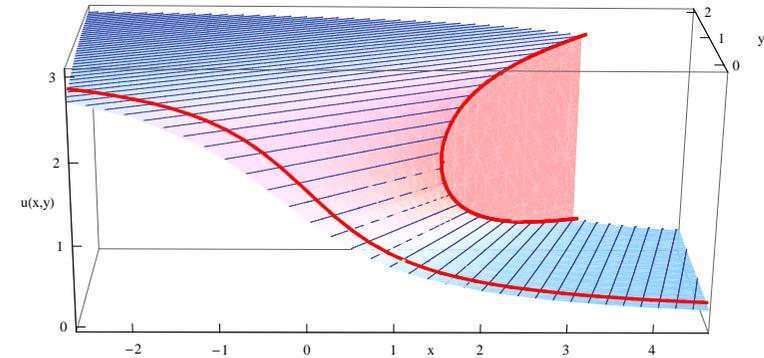


Abbildung 5.9: Skizze der Lösung, die die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt aus Abbildung 5.8

**Aufgabe 5.7** Wir betrachten das System aus Aufgabe 5.6 weiter:

$$\begin{cases} u(x, y)u_x(x, y) + u_y(x, y) = 1 & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = e^{-x^2} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

1. Wie muss man Definition 5.11 anpassen wegen 1 auf der rechten Seite?
2. Zeigen Sie, dass die Bedingung (5.23) erfüllt ist für alle Testfunktionen  $\varphi$  mit  $\iint_{\Omega} \varphi(x) dx = 0$ . Dies reicht für (5.24).
3. Zeigen Sie, dass die Stoßwelle anfängt in

$$(x_s, y_s) = \left(\frac{1}{4}e + \sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{2}e}\right).$$

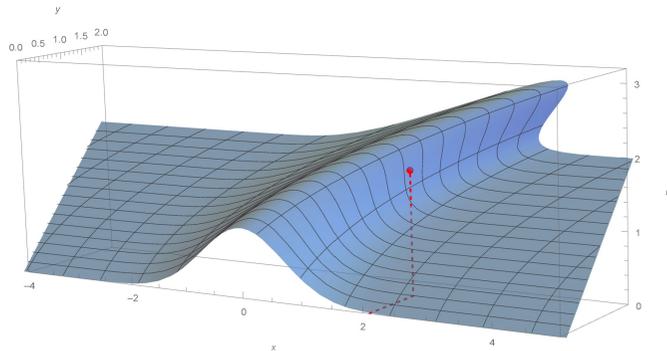


Abbildung 5.10: Die Funktion aus Aufgabe 5.6 mit der Stelle  $(x_s, y_s, u(x_s, y_s))$  aus Aufgabe 5.7

### 5.2.2 Verdünnungswellen

Lösungen, wie sie in Definition 5.11 definiert sind, erlauben es, Anfangswerte  $u_0$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$  zu nehmen. Betrachten wir das Problem

$$\begin{cases} u(x, t) u_x(x, t) + u_t(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (5.28)$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases} \quad (5.29)$$

Die Lösung mit Hilfe der charakteristischen Kurven findet man durch

$$\begin{cases} x'(t) = U(t) & \text{mit } x(0) = s, \\ T'(t) = 1 & \text{mit } T(0) = 0, \\ U'(t) = 0 & \text{mit } U(0) = u_0(s), \end{cases}$$

nämlich

$$\begin{cases} U(t) = u_0(s), \\ x(t) = s + t u_0(s), \\ T(t) = t. \end{cases} \quad (5.30)$$

Für  $s < 0$  finden wir  $x(t) = s$  und so folgt  $u(x, t) = 0$  für  $x < 0$  und  $t \geq 0$ . Für  $s \geq 0$  gilt  $x(t) = s + t$ , und es folgt  $u(x, t) = 1$  für  $x \geq t \geq 0$ . Also

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ und } t \geq 0 \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0 \end{cases}$$

Diese Methode gibt uns aber keine Lösung auf der Menge

$$\{(x, t); t > 0 \text{ und } x \in [0, t)\}.$$

Mathematisch gibt es viele Möglichkeiten, dieses Dreieck zu füllen. Wir geben mal drei an:

$$1) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < t \text{ und } t \geq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0, \end{cases} \quad (5.31)$$

$$2) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \frac{1}{2}t \text{ und } t \geq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}t \text{ und } t \geq 0, \end{cases} \quad (5.32)$$

$$3) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \text{ und } t \geq 0, \\ x/t & \text{für } x \in (0, t) \text{ und } t \geq 0, \\ 1 & \text{für } x \geq t \text{ und } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Keine dieser drei Funktionen ist eine klassische Lösung. Die erste hat ein Problem auf der Geraden  $x = t$ ; die zweite auf  $x = \frac{1}{2}t$ ; die dritte sowohl auf  $x = 0$  als auch auf  $x = t$ . Die Funktionen in 2) und 3) sind beide Integrallösungen. Welche würde physikalisch passen?

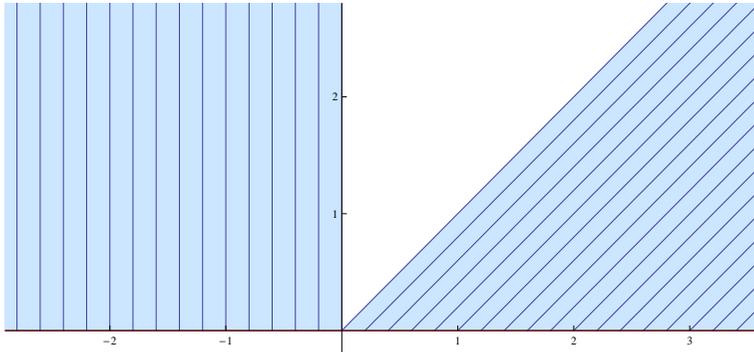


Abbildung 5.11: Wie füllt man das leere Dreieck?

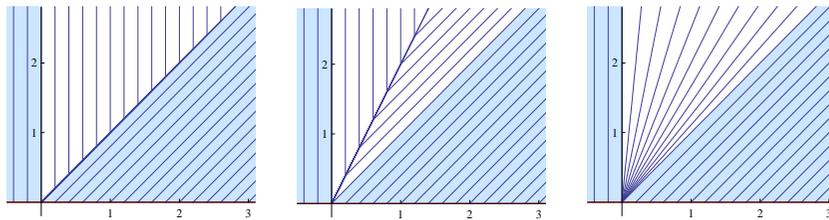


Abbildung 5.12: Einige Möglichkeiten: die in der Mitte und rechts wären mathematisch vertretbar; physikalisch sinnvoll ist wegen der Entropie-Bedingung nur die rechte Lösung.

**Definition 5.14** Sei  $u(x, t)$  eine Lösung von (5.28). Wenn die Anfangsbedingung  $u_0$  einen isolierten Sprung an der Stelle  $x_0$  hat mit

$$\ell := \lim_{x \uparrow x_0} u_0(x) < \lim_{x \downarrow x_0} u_0(x) =: r$$

und für ein  $\varepsilon > 0$  gilt

- $u_0$  fortgesetzt durch  $\ell$  in  $x_0$  liegt in  $C^1(x_0 - \varepsilon, x_0]$ ,
- $u_0$  fortgesetzt durch  $r$  in  $x_0$  liegt in  $C^1[x_0, x_0 + \varepsilon)$ ,

dann hat  $u(x, t)$  eine Verdünnungswelle, wenn gilt

$$u(x, t) = \frac{x - x_0}{t} \quad \text{für } \ell \leq \frac{x - x_0}{t} \leq r$$

für  $t \in [0, t_0)$  mit  $t_0 > 0$ .

### 5.2.3 Physikalische Begründung

In der Physik gibt es die sogenannte Entropie-Bedingung. Grob kann man diese Bedingung wie folgt beschreiben: Man meide Unstetigkeitskurven, wenn sie nicht notwendig sind. Wenn die Geschwindigkeit  $x'(t)$  einer charakteristischen Kurve  $(x(t), t)$  rechts von einer Unstetigkeit größer wäre als die Geschwindigkeit einer charakteristischen Kurve links von dieser Unstetigkeit, bräuchte man keine Unstetigkeit, sondern hätte es durch eine Funktion, wie in (5.33), lösen können. Wenn für

$$u_t + F(u)_x = 0$$

die Funktion  $F(u)_x$  eine Unstetigkeit in  $S$  hat, sagt man:

**Bedingung 5.15** Die Entropie-Bedingung ist erfüllt für eine Lösung von (5.19), wenn an einer Unstetigkeitsstelle  $S$  gilt

$$F'(u_\ell) > F'(u_r). \quad (5.34)$$

Wenn  $S = \{(\sigma(t), t); t \in (t_1, t_2)\}$ , dann ist mit (5.34) gemeint, dass

$$F'(\lim_{x \uparrow \sigma(t)} u(x, t)) > F'(\lim_{x \downarrow \sigma(t)} u(x, t)) \quad \text{für alle } t \in (t_1, t_2).$$

Die Geschwindigkeit der charakteristischen Kurve an der Stelle  $(x, t)$  ist übrigens  $F'(u(x, t))$ , denn wenn  $(x(\tau), t(\tau))$  eine charakteristische Kurve ist, gilt

$$\begin{pmatrix} x'(\tau) \\ t'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'(u(x(\tau), t(\tau))) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und es folgt  $t = \tau$  und  $x'(\tau) = F'(u(x(\tau), \tau))$ .

Für eine streng konvexe Funktion  $F$  ist  $F'$  eine streng wachsende Funktion und bedeutet (5.34)  $u_\ell > u_r$ . Man sieht nun auch sofort, dass diese Entropie-Bedingung für einen Unterschied sorgt bezüglich der „Zeit“-Richtung. Bei charakteristischen Kurven war es nicht wesentlich, in welche Richtung man entlanggeht; die Rankine-Hugoniot und die Entropie-Bedingung sind richtungsabhängig.

**Bemerkung 5.15.1** Die Funktion  $u$  ist eine physikalische relevante Lösung von (5.19), wenn folgendes gilt:

1.  $u$  ist konstant entlang charakteristischen Kurven mit Ausnahme von Unstetigkeitskurve(n)  $S$ , und
2. wenn es eine Unstetigkeitskurve  $S$  gibt, dann ist da die Rankine-Hugoniot Bedingung und die Entropie-Bedingung erfüllt.

Eine Lösung zu (5.28)-(5.29) mit Verdünnungswelle ist die dritte Möglichkeit (5.33). Eine Skizze findet man in Abbildung 5.13.

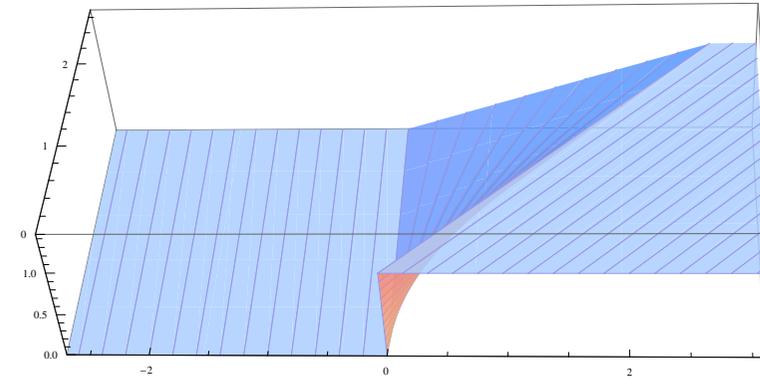


Abbildung 5.13: Eine physikalisch relevante Lösung zu (5.28)-(5.29).

## 5.3 Übersicht

Wir gehen davon aus, dass die Transversalitätsbedingung im Folgenden erfüllt ist. Übrigens, wenn man hier Lösen schreibt, bedeutet es, dass man den Satz von Picard-Lindelöf verwenden kann für das zugehörige Anfangswertproblem der gewöhnlichen Differentialgleichung. In konkreten Fällen kann man nur selten eine explizite Lösung finden.

### Linear und semilinear mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases}$$

1. Die charakteristischen Kurven sind  $t \mapsto x_0 + t\vec{v}$ .
2. Man löse  $U(t; x_0)$  aus

$$\begin{cases} U'(t) = f(x_0 + t\vec{v}, U(t)), \\ U(0) = u_0(x_0) \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$

3. Setze

$$u(x_0 + t\vec{v}) := U(t; x_0)$$

und transformiere nach Standardkoordinaten mittels  $x = x_0 + t\vec{v}$ .

**Linear und semilinear mit variablen Koeffizienten:**

$$\begin{cases} \vec{v}(x) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases}$$

1. Man löse die charakteristischen Kurven  $\vec{x}(t; x_0)$  aus

$$\begin{cases} \vec{x}'(t) = \vec{v}(\vec{x}(t)), \\ \vec{x}(0) = x_0 \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$

2. Man löse  $U(t; x_0)$  aus

$$\begin{cases} U'(t) = f(\vec{x}(t), U(t)), \\ U(0) = u_0(x_0) \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$

3. Setze

$$u(\vec{x}(t)) := U(t; x_0)$$

und transformiere nach Standardkoordinaten mittels  $x = \vec{x}(t)$ . Diese Transformation ist eindeutig; die Existenz ist nur lokal garantiert.

**Quasilinear:**

$$\begin{cases} \vec{v}(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = f(x, u(x)), \\ u(x) = u_0(x) \text{ für } x \in M. \end{cases}$$

1. & 2. Man löse gleichzeitig die charakteristischen Kurven  $\vec{x}(t; x_0, u_0)$  und die Funktionen  $U(t; x_0, u_0)$  entlang dieser Kurven aus

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ U(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \vec{v}(\vec{x}(t), U(t)) \\ f(\vec{x}(t), U(t)) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \vec{x}(0) \\ U(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0(x_0) \end{pmatrix} \text{ für } x_0 \in M. \end{cases}$$

3. Setze

$$u(\vec{x}(t)) := U(t; x_0, u_0)$$

und transformiere nach Standardkoordinaten mittels  $x = \vec{x}(t; x_0, u_0)$ . Für  $C^1$ -Funktionen  $\vec{v}$  und  $u_0$  existiert diese Transformation lokal und ist lokal eindeutig.

Man definiert physikalisch begründete Stoßwellen mithilfe des schwachen Lösungsbegriffs, wenn die Eindeutigkeit der Transformation fehlt. Bei unstetigen Anfangsbedingungen können auch Verdünnungswellen physikalisch Sinn machen.

**Aufgabe 5.8** Die Lösung von

$$\begin{cases} u(x, y)u_x(x, y) + u_y(x, y) = 0 & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x < 0 \text{ und für } x > 1, \\ u(x, 0) = 1 - x & \text{für } x \in [0, 1], \end{cases}$$

die sowohl die Rankine-Hugoniot-Bedingung erfüllt und außerdem eine Verdünnungswelle hat, sieht aus wie in Abbildung 5.14.

1. Berechnen Sie diese Lösung, indem Sie auf den verschiedenen Teilgebieten eine explizite Formel angeben.
2. Zeigen Sie, dass für diese Funktion gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx$$

für alle  $t \geq 0$ .

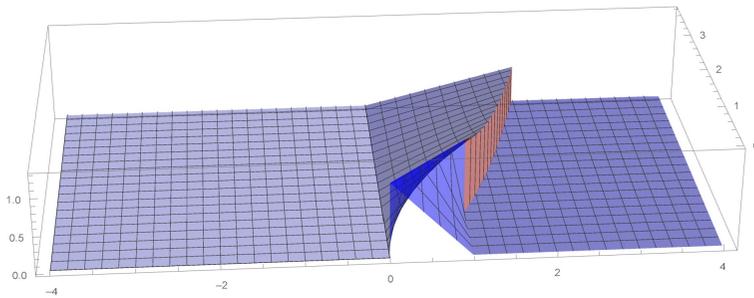


Abbildung 5.14: Skizze zu der Lösung aus Aufgabe 5.8

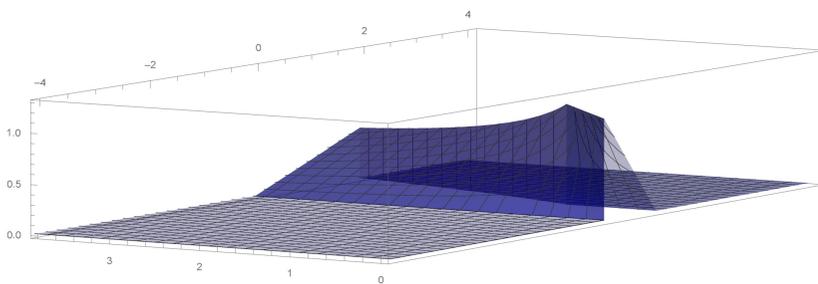


Abbildung 5.15: Die gleiche Lösung aus einem anderen Winkel



# Partielle Differentialgleichungen

# Woche 6

## Klassifizierung zweiter Ordnung

### 6.1 Einfachen Fälle als Begründung

#### 6.1.1 Das Symbol

Wir betrachten in diesem Abschnitt partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Dimensionen und mit konstanten Koeffizienten. Das heißt, diese Differentialgleichungen sind wie folgt:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = \varphi, \quad (6.1)$$

mit  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . Eine solche Differentialgleichung ist rein zweiter Ordnung, wenn  $d = e = f = 0$ :

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = \varphi \quad (6.2)$$

**Definition 6.1** Sei  $L(\partial_x, \partial_y)$  ein linearer partieller Differentialoperator. Dann nennt man  $L(\xi, \eta)$  das Symbol des Operators.

**Bemerkung 6.1.1** Man ersetzt  $\partial_x$  durch  $\xi$  und  $\partial_y$  durch  $\eta$ . Das Symbol ist ein Polynom in  $(\xi, \eta)$ .

**Bemerkung 6.1.2** Auch bei linearen partiellen Differentialoperatoren  $L(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$  in höheren Dimensionen und bei höherer Ordnung definiert man das Symbol durch  $L(\xi)$  mit  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Der Grad des Polynoms ist dann genau die Ordnung des Differentialoperators.

Für (6.1) beziehungsweise (6.2) hat man diese Symbole

$$\begin{aligned} L(\xi, \eta) &= a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f, \\ L_0(\xi, \eta) &= a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (6.1), (6.2) kann man schreiben als

$$\begin{aligned} L(\partial_x, \partial_y) u &= \varphi, \\ L_0(\partial_x, \partial_y) u &= \varphi. \end{aligned}$$

Wenn  $a \neq 0$  gilt, kann man ohne Verlust der Allgemeinheit  $a = 1$  setzen in (6.1). Auf den Fall, dass  $a = 0$ , kommen wir noch zurück.

### 6.1.2 Zerlegung des Symbols in Linearterme

Für  $a = 1$  versuchen wir das Symbol in Linearterme zu zerlegen:

$$L(\xi, \eta) = (\xi - \tau_1\eta + \sigma_1)(\xi - \tau_2\eta + \sigma_2),$$

$$L_0(\xi, \eta) = (\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta).$$

Die Idee, die dahintersteckt, ist, dass man dann vielleicht die Differentialgleichung als zwei Gleichungen erster Ordnung lösen kann:

$$L_0(\partial_x, \partial_y)u = (\partial_x - \tau_1\partial_y)(\partial_x - \tau_2\partial_y)u.$$

Wenn es eine solche Zerlegung gibt, dann sind  $\tau_1, \tau_2$  die Lösungen der algebraischen Gleichung<sup>1</sup>

$$\tau^2 + 2b\tau + c = 0. \quad (6.3)$$

Es gibt grundsätzlich drei Möglichkeiten:

**I.** wenn  $b^2 > c$  folgt  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$  und  $\tau_1 \neq \tau_2$ .

**II.** wenn  $b^2 = c$  folgt  $\tau_1 = \tau_2 \in \mathbb{R}$ .

**III.** wenn  $b^2 < c$  folgt  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  und  $\tau_1 = \overline{\tau_2}$ .

Dies sieht man sofort, indem man (6.3) löst:

$$\tau_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c} \text{ oder } \tau_{1,2} = -b \pm i\sqrt{c - b^2}.$$

Wir werden nun diese drei Fälle detaillierter anschauen.

<sup>1</sup>Man kann  $L_0(\xi, \eta)$  in ein Produkt von Lineartermen  $(\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta)$  zerlegen, wenn  $L_0(\xi, \eta) = 0$  für  $\xi = \tau_i\eta$ . Also findet man diese  $\tau_i$  als Nullstellen von  $\tau \mapsto L_0(\tau\eta, \eta) = (\tau^2 + 2b\tau + c)\eta^2$ .

**zu I.**  $L_0$ : Wenn  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$  und  $\tau_1 \neq \tau_2$  gilt, so folgt

$$(\xi - \tau_1\eta)(\xi - \tau_2\eta) = \xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2.$$

Man kann (6.2) (mit  $a = 1$ ) umschreiben als

$$\begin{cases} (\partial_x - \tau_2\partial_y)v = \varphi, \\ (\partial_x - \tau_1\partial_y)u = v, \end{cases} \quad (6.4)$$

ein System erster Ordnung. Dieses System kann man in zwei Schritten als zwei Transportgleichungen lösen mit zwei unabhängigen charakteristischen Richtungen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\tau_1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau_2 \end{pmatrix}.$$

$L$ : Wenn  $\tau_1 \neq \tau_2$ , dann kann man für (6.1)  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$  finden derart, dass

$$(\xi - \tau_1\eta + \sigma_1)(\xi - \tau_2\eta + \sigma_2) = \xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + \sigma_1\sigma_2.$$

Dann kann man (6.1) (mit  $a = 1$ ) umschreiben als

$$\begin{pmatrix} \partial_x - \tau_1\partial_y & 0 \\ 0 & \partial_x - \tau_2\partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ f - \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Dieses System lässt sich nicht mehr als zwei aufeinanderfolgenden Transportgleichungen lösen, aber man kann es trotzdem mit ähnlichen Methoden angehen.

Wir kommen nun zurück auf  $a = 0$ . Für  $a = 0$  hat man

$$0\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = (2b\xi + c\eta)\eta.$$

Für  $b \neq 0$  hat man eine Zerlegung mit zwei unabhängigen charakteristischen Richtungen wie vorher. Wenn  $b = 0$  gilt, wird  $L_0$  eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in  $y$ .

**zu II.**  $L_0$ : Wenn  $\tau_1 = \tau_2$ , dann funktioniert diese Aufspaltung nicht unbedingt. Für (6.2) findet man  $(\partial_x - \tau_1 \partial_y)^2 u = \varphi$  und dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

$L$ : Für (6.1) findet man

$$(\partial_x - \tau_1 \partial_y + \sigma_1)^2 u + (\lambda \partial_x - \mu \partial_y + \rho) u = \varphi.$$

Wenn  $\mu \neq \lambda \tau_1$  gilt, kann man diese letzte Differentialgleichung nicht als System erster Ordnung schreiben. Ein typisches Beispiel einer solchen Differentialgleichung ist

$$u_{xx} - u_y = \varphi.$$

**zu III.** Wenn die Wurzeln von (6.3) nicht reell sind, scheint es zuerst hoffnungslos, die Differentialgleichung für  $L_0$  oder  $L$  zu spalten, denn wie soll man mit komplexen Termen umgehen? Ein typisches Beispiel ist

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (6.6)$$

Das zugehörige Symbol ist  $L(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 = (\xi - i\eta)(\xi + i\eta)$ . Lässt man komplexe Zahlen zu, dann kann man (6.6) mit  $\varphi = 0$  auch schreiben als

$$(\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)u = 0$$

und man findet die folgenden Lösungen

$$u(x, y) = u_1(x + iy) + u_2(x - iy), \quad (6.7)$$

wobei  $u_1$  und  $u_2$  beliebige differenzierbare Funktionen sind. Für komplexe Funktionen macht dies Sinn<sup>2</sup>.

**Bemerkung 6.1.3** Man kann sogar reelle Lösungen finden, wenn man für  $u_1$  eine komplex-analytische Funktion nimmt mit reellen Koeffizienten und für  $u_2$  den anti-analytischen Partner. Analytisch heißt, dass die Funktion lokal als Potenzreihe zu schreiben ist: Es gibt  $R > 0$  derart, dass

$$u_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } |z - z_0| < R.$$

Wenn man  $a_n \in \mathbb{R}$  nimmt und  $u_2$  wie folgt definiert

$$u_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\overline{z - z_0})^n,$$

so hat  $u_2$  den gleichen Konvergenzradius wie  $u_1$ , ist eine anti-analytische Funktion (bedeutet 'analytisch' in  $x - iy$ ) und man findet, dass  $(x, y) \mapsto u_1(x + iy) + u_2(x - iy)$  reell ist.

<sup>2</sup>Eine Funktion, die (6.6) erfüllt, nennt man harmonisch. In einer Vorlesung Funktionentheorie lernt man, dass der Realteil einer analytischen Funktion harmonisch ist. Das gleiche gilt für den Realteil einer anti-analytischen Funktion. Eine Funktion  $f$  ist analytisch auf  $\Omega_{\mathbb{C}} = \{x + iy \in \mathbb{C}; (x, y) \in \Omega\}$ , wenn  $f$  komplex differenzierbar ist auf  $\Omega_{\mathbb{C}}$ . Eine Funktion  $f$  ist anti-analytisch, wenn  $\bar{f}$  komplex differenzierbar ist. Man findet auch so Lösungen wie in (6.7), nämlich durch

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) + \operatorname{Re}(g(x - iy)),$$

wobei  $f$  und  $g$  (komplex) differenzierbare Funktionen sind.

**Aufgabe 6.1** Wenn möglich zerlegen Sie das Symbol zu der Differentialgleichung und geben eine möglichst allgemeine Form einer Lösung.

1.  $u_{xx} - u = 0$  in  $\mathbb{R}$ ;
2.  $u_{xx} - 4u_{yy} = 0$  in  $\mathbb{R}^2$ ;
3.  $u_x + u_y + u_z = 0$  in  $\mathbb{R}^3$ ;
4.  $u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} = 0$  in  $\mathbb{R}^3$ .

## 6.2 Standardbeispiele zu diesen Fällen

Wir werden einige typische Gleichungen zu diesen unterschiedlichen Fällen betrachten.

### 6.2.1 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y^2$

Betrachten wir  $u_{xx} - u_{yy} = f$ . Diese Gleichung kann man auch schreiben als

$$(\partial_x + \partial_y)(\partial_x - \partial_y)u = f \quad (6.8)$$

und man könnte sie lösen, indem man nacheinander den charakteristischen Kurven in Richtung  $(1, -1)$  und in Richtung  $(1, 1)$  folgt. In dem neuen Koordinatensystem

$$x = s + t \text{ und } y = s - t$$

wird dies etwas leichter. Setzen wir  $U(s, t) = u(s + t, s - t)$  und  $F(s, t) = f(s + t, s - t)$ , so ändert sich die Differentialgleichung (6.8) über

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 - \partial_y^2)U\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \\ = \left(\frac{1}{4}U_{ss} + \frac{1}{2}U_{st} + \frac{1}{4}U_{tt}\right) - \left(\frac{1}{4}U_{ss} - \frac{1}{2}U_{st} + \frac{1}{4}U_{tt}\right) \end{aligned}$$

in

$$\partial_s \partial_t U = F. \quad (6.9)$$

Welche Art von Randwertbedingungen würde eindeutig eine Lösung bestimmen?

Betrachten wir den Fall  $\Omega = B_1(0)$ . Für (6.9) finden wir

$$\partial_t U(s, t) = \partial_t U(\psi(t), t) + \int_{\psi(t)}^s F(\sigma, t) d\sigma \quad (6.10)$$

und als nächstes

$$U(s, t) = U(s, \varphi(s)) + \int_{\varphi(s)}^t \partial_t U(\psi(\tau), \tau) d\tau + \int_{\varphi(s)}^t \int_{\psi(\tau)}^s F(\sigma, \tau) d\sigma d\tau. \quad (6.11)$$

Hier beschreibt  $t = \varphi(s)$  einen Randteil für  $t$  als Funktion von  $s$  und  $s = \psi(t)$  beschreibt einen Randteil für  $s$  als Funktion von  $t$ . Um die Integrale in (6.11) durch eine Bedingung am Rande festzulegen, hat man die Möglichkeit „rechts unten“ und „links oben“; ähnlich für (6.10) wird es „links unten“ oder „rechts oben“. Betrachten wir den Fall „unten“, dann hat man  $\varphi(s) = -\sqrt{\frac{1}{2} - s^2}$  und  $\psi(t) = -\sqrt{\frac{1}{2} - t^2}$ . Für ein Paar  $(x, y)$  werden die Integralkurven in Abbildung 6.1 skizziert.

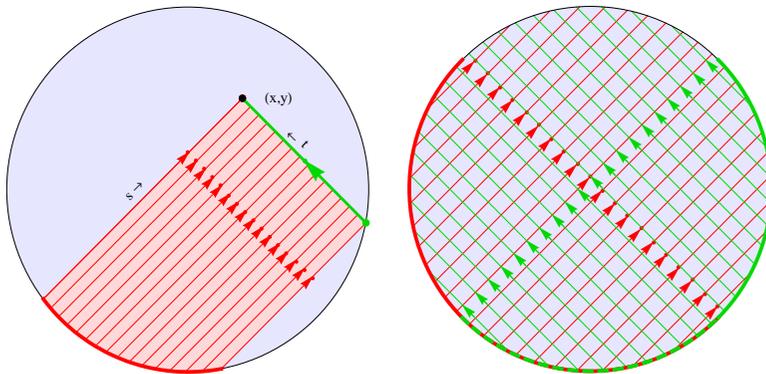


Abbildung 6.1: Links: Um in  $(x, y)$  den Wert  $u(x, y)$  zu bestimmen, braucht man zum Beispiel  $u_t$  auf dem roten Randteil und  $u$  im grünen Randpunkt. Rechts: Um  $u$  auf der ganzen Kreisscheibe festzulegen, passt es  $u_t$  auf dem roten Randteil und  $u$  auf dem grünen Randteil vorzugeben.

Schreiben wir  $\Gamma_{[\alpha, \beta]} = \{(\cos \varphi, \sin \varphi) ; \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$ . Wenn man  $u$  auf der ganzen Kreisscheibe festlegen will, braucht man

$$\partial_t U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]} \text{ und } U \text{ auf } \Gamma_{[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]}.$$

Aus Symmetriegründen, man vertausche  $s$  und  $t$ , passt auch

$$U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]} \text{ und } \partial_s U \text{ auf } \Gamma_{[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]}.$$

Auf einem Rand, auf dem  $U$  und  $\partial_\nu U$  bekannt sind und wobei  $\nu$  eine nicht-tangentiale Richtung hat, und wenn  $U \in C^1$  gilt, kennt man alle Richtungsableitungen. So kann man sich sogar davon überzeugen, dass auch folgendes passt:

$$U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{3}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]} \text{ und } \partial_\nu U \text{ auf } \Gamma_{[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi]}.$$

Wenn man sich dieses Beispiel genau anschaut, kann man folgendes Ergebnis bekommen:

**Proposition 6.2** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^2$  mit  $\partial\Omega \in C^1$ . Man setzt

$$\Gamma_R = \{x \in \partial\Omega; \text{ es gibt zwei aufwärts gerichtete charakteristische Kurven in } x\},$$

$$\Gamma_G = \{x \in \partial\Omega; \text{ es gibt nur eine aufwärts gerichtete charakteristische Kurve in } x\}.$$

Wenn die Randwerte es erlauben (stetig sind und mögliche Kompatibilitätsbedingungen erfüllen), kann man mit Hilfe der charakteristischen Kurven, eine (distributionelle) Lösung in  $C(\bar{\Omega})$  von

$$\begin{cases} u_{yy} - u_{xx} = f & \text{in } \Omega, \\ u = u_0 & \text{auf } \Gamma_R \cup \Gamma_G, \\ \partial_\nu u = v_0 & \text{auf } \Gamma_R, \end{cases}$$

konstruieren. Wenn die Randwerte zweimal differenzierbar sind und mögliche zusätzliche Kompatibilitätsbedingungen erfüllen, ist diese Funktion  $u$  sogar in  $C^2(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 6.2.1** Kompatibilitätsbedingungen müssen erfüllt sein, wenn  $\Gamma_R$  oder  $\Gamma_G$  nicht zusammenhängend sind oder tangential an charakteristischen Kurven verlaufen.

**Beweis.** Die Konstruktion einer Lösung entlang charakteristischer Kurven liefert die Existenz einer schwachen Lösung. Ist diese Lösung eindeutig? Ja, ein direkter Beweis ist sehr geometrisch. Er geht zurück auf  $U_{st} = F$ . Man sucht eine

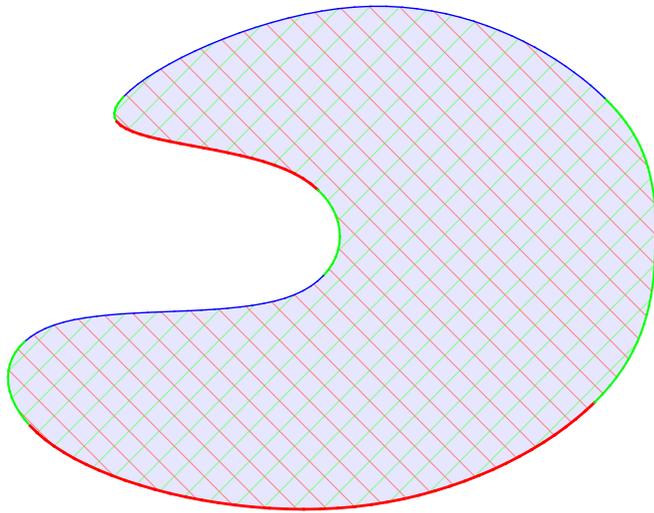


Abbildung 6.2: Auf dem roten Rand  $\Gamma_R$  gibt man  $u$  und  $\partial_\nu u$  an, auf dem grünen  $\Gamma_G$  nur  $u$  und auf dem blauen nichts, und man hat höchstens eine Lösung.

Zick-Zack-Kurve, entlang welcher  $s$  konstant oder  $t$  konstant ist und die auf dem roten Rand anfängt.

Und wieso liegt die Lösung in  $C^2(\bar{\Omega})$ , wenn die Randwerte es erlauben? Erstens soll  $u_0$  und  $v_0$  genügend glatt sein. Zweitens, wie man in Abbildung 6.2 sehen kann, ist  $\Gamma_R$  und auch  $\Gamma_G$  nicht unbedingt zusammenhängend. Um eine  $C^2(\bar{\Omega})$ -Lösung zu finden, soll jeder „Sprung“ von einer Komponente  $\Gamma_R \cup \Gamma_G$  zu  $\partial\Gamma_R$  und  $\partial\Gamma_G$  kompatibel sein. ■

Wir können noch einen Schritt weiter gehen:

**Proposition 6.3** Sei  $L, T \in \mathbb{R}^+$  und sei  $(0, L) \times (0, T)$  das

Gebiet in  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $f, u_\ell, u_r, u_0$  und  $v_0$  gegeben. Wenn

$$\begin{cases} u_{yy}(x, y) - u_{xx}(x, y) = f(x, y) & \text{für } (x, y) \in (0, L) \times (0, M), \\ u(0, y) = u_\ell(y) & \text{für } y \in (0, M), \\ u(L, y) = u_r(y) & \text{für } y \in (0, M), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in [0, L], \\ u_y(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in [0, L], \end{cases} \quad (6.12)$$

eine Lösung  $u \in C^2([0, L] \times [0, M])$  hat, dann kann man diese Lösung berechnen mit Hilfe der charakteristischen Kurven. Dieses Randwertproblem hat also höchstens eine klassische Lösung.

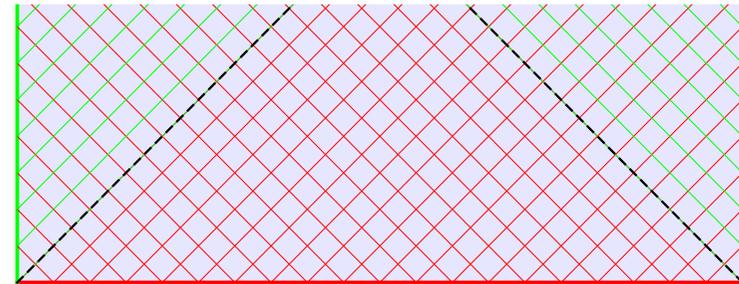


Abbildung 6.3: Unten zwei, links und rechts eine und oben keine. So kann man die passenden Randbedingungen für (6.12) beschreiben.

**Beweis.** Man soll bemerken, dass wenn  $u_0(x)$  gegeben ist und  $u(x, 0) = u_0(x)$  gilt, man auch  $u_x(x, 0)$  kennt, nämlich  $u_x(x, 0) = u'_0(x)$ . Weil auch  $u_y(x, 0) = v_0(x)$  auf  $[0, L] \times \{0\}$  gegeben ist, findet man auf  $[0, L] \times \{0\}$  alle Richtungsableitungen durch

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} u(x, 0) = \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} u_x(x, 0) \\ u_y(x, 0) \end{pmatrix}$$

und also auch  $U_t$  und  $U_s$ . Für die vertikalen Ränder braucht man nur  $U = u = u_{\ell/r}$ . Man findet da  $u_y$  und  $U_s$  oder  $U_t$  und so auch wieder alle Richtungsableitungen. Wenn  $M > L$ , dann kann man schrittweise hochklettern. ■

**Aufgabe 6.2** Zeigen Sie, dass man jede Differentialgleichung der Form  $u_{xx} + au_{xy} + bu_{yy} = f$  mit  $a^2 > 4b$  durch eine Koordinatentransformation  $u(x, y) = U(s, t)$  mit

$$s = c_0x + c_1y \text{ und } t = c_2x + c_3y$$

umformen kann in  $U_{ss} - U_{tt} = F$ .

### 6.2.2 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y^2$

Statt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  werden wir wechseln zu  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Betrachten wir also die partielle Differentialgleichung  $u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = f$ . Wir nehmen auch ein spezielles Gebiet, nämlich die Einheitskugel  $B_1(0)$  und ändern auch noch ein Vorzeichen. Das heißt, wir betrachten

$$-\Delta u = f \text{ auf } B_1(0). \quad (6.13)$$

Wir betrachten eine besondere Funktion:

**Definition 6.4** Die Greensche Funktion  $G : \overline{B_1(0)} \times \overline{B_1(0)} \rightarrow [0, \infty]$  für (6.13) wird definiert durch

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left( \log \left( \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right) - \log (\|x - y\|^2) \right). \quad (6.14)$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

**Lemma 6.5** Für die Funktion  $x \mapsto G(x, y)$  aus (6.14) gilt:

1. Symmetrie:  $G(x, y) = G(y, x)$  für alle  $x, y \in \overline{B_1(0)}$ ;
2. Sie ist unendlich oft differenzierbar für  $x \neq y$ , und  $x \mapsto G(x, y)$  ist harmonisch auf  $B_1(0) \setminus \{y\}$ , das heißt,  $\Delta_x G(x, y) = 0$  für alle  $x \in B_1(0) \setminus \{y\}$ ;
3. sie erfüllt  $G(x, y) = 0$  für  $\|x\| = 1$  und  $y \in B_1(0)$ .

Eine wichtige Eigenschaft von  $G$  sehen wir erst später:

$$-\Delta_x G(x, y) = \delta_y(x),$$

die Delta-Distribution an der Stelle  $y$ .

**Beweis.** Weil

$$\begin{aligned} & \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\ &= \langle x \|y\|, x \|y\| \rangle - 2 \left\langle x \|y\|, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle + \left\langle \frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ &= \|y\|^2 \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + 1 \end{aligned}$$

sieht man, dass  $G(x, y) = G(y, x)$ .

Man findet, dass  $G$  unendlich oft differenzierbar ist sowohl in  $x$  als auch in  $y$ , wenn  $x \notin \{y, \|y\|^{-2}y\}$ . Auf  $\overline{B_1(0)} \times \overline{B_1(0)}$  trifft dies zu, wenn  $x \neq y$ . Für  $x, y \in B_1(0)$  mit  $x \neq y$  gilt

$$\begin{aligned} \Delta_x \log (\|x - y\|^2) &= \nabla_x \cdot \nabla_x \log (\|x - y\|^2) \\ &= \nabla_x \cdot \frac{2(x - y)}{\|x - y\|^2} = 2 \frac{2}{\|x - y\|^2} - \frac{4(x - y) \cdot (x - y)}{\|x - y\|^4} = 0. \end{aligned}$$

Weil

$$\log \left( \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right) = \log \left( \left\| x - \frac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 \right) + \log (\|y\|^2),$$

ist auch die Funktion  $x \mapsto \log \left( \left\| x \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \right)$  harmonisch auf  $B_1(0)$ , diesmal sogar für alle  $y \in B_1(0)$ .

Für  $\|y\| = 1$  findet man  $G(x, y) = 0$  und dies gilt wegen der Symmetrie auch wenn  $\|x\| = 1$ . ■

Sei  $u$  eine Lösung von  $-\Delta u = f \in C(\overline{B_1(0)})$ . Dann gilt, mit  $\nu$  dem auswärtigen Normalenvektor und Gauß, dass

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} G(x, y) f(y) dy &= - \int_{B_1(0)} G(x, y) \Delta u(y) dy \\ &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x)} G(x, y) \Delta u(y) dy \\ &= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{\partial(B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x))} (G(x, y) \partial_\nu u(y) - \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y)) d\sigma_y + \right. \\ &\quad \left. + \int_{B_1(0) \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta G(x, y) u(y) dy \right) \\ &= \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (G(x, y) \partial_\nu u(y) - \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y)) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Für  $y \in \partial B_\varepsilon(x)$  gilt

$$G(x, y) = \mathcal{O}(\log \varepsilon)$$

und mit  $\nu_y = -\frac{y-x}{\|y-x\|}$  auf  $\partial B_\varepsilon(x)$ , dass

$$-\partial_{\nu_y} G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x-y)}{\|x-y\|^2} \cdot \nu_y + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \mathcal{O}(1).$$

Es folgt für  $\varepsilon \downarrow 0$ , weil  $\|\nabla u\|_\infty$  beschränkt ist, dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} G(x, y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y &= 2\pi\varepsilon \mathcal{O}(\log \varepsilon) \rightarrow 0, \\ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} -\partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y &= 2\pi\varepsilon \left( \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \mathcal{O}(1) \right) (u(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)) \rightarrow u(x). \end{aligned}$$

Zusammen wird es:

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{B_1(0)} G(x, y) \Delta u(y) dy \\ &\quad - \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u(y) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Diese Formel liefert uns eine Eigenschaft einer Lösung zu

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_1(0), \\ u = u_0 & \text{auf } \partial B_1(0). \end{cases} \quad (6.16)$$

Wir fassen dieses Ergebnis zusammen in:

**Proposition 6.6** Sei  $G$  die Funktion in (6.14) und seien  $f \in C(\overline{B_1(0)})$  und  $u_0 \in C(\partial B_1(0))$ . Wenn  $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$  eine Lösung ist von (6.16), dann gilt (6.15).

Die interessante Frage wäre, ob man, wenn  $u_0$  und  $f$  gegeben sind, eine Lösung  $u$  von (6.16) mit Hilfe von

$$u(x) = \int_{B_1(0)} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial B_1(0)} \partial_{\nu_y} G(x, y) u_0(y) d\sigma_y. \quad (6.17)$$

finden würde. Das ist tatsächlich so, aber eine solche Aussage braucht noch einen Beweis. Dann hätte man die Existenzfrage geklärt.

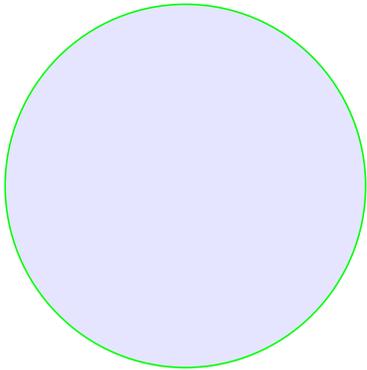


Abbildung 6.4: Rundherum  $u$  vorschreiben gibt eine eindeutige Lösung bei  $-\Delta u = f$ . Siehe Proposition 6.6.

Nehmen wir an, diese Existenz-Frage sei geklärt. Die nächste Frage nach Hadamard ist dann, ob (6.17) die einzige Lösung ist zu (6.16). Diese Frage lässt sich sofort beantworten:

**Proposition 6.7** Zu (6.16) gibt es höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\overline{B_1(0)})$ .

**Beweis.** Nehmen wir an, es gibt zwei Lösungen, die wir  $u_1$  und  $u_2$  nennen. Dann ist  $w = u_1 - u_2$  eine harmonische Funktion

und es gilt  $w = 0$  auf  $\partial B_1(0)$ . Wegen Korollar 4.5 hat  $w$  kein Extremum innerhalb von  $B_1(0)$ . Es folgt, dass  $w \leq 0$  auf  $B_1(0)$ . Ähnliches gilt für  $-w$ . Dann gilt also  $w = 0$  auf  $\overline{B_1(0)}$  und  $u_1$  und  $u_2$  wären identisch. ■

**Bemerkung 6.7.1** Diesen letzten Beweis kann man übrigens verwenden für beliebige Gebiete.

**Aufgabe 6.3** Die Funktion  $u(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(1 - x_1^2 - x_2^2)$  ist eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = 1 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{cases}$$

Ebenso ist  $u(x_1, x_2) = \frac{1}{10}x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = x_1 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 1, \end{cases}$$

und ist  $u(x_1, x_2) = \frac{1}{96}(3 + 7x_1^2 - x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2)$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = x_1^2 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{cases}$$

• Können Sie eine Lösung finden für das folgende Randwertproblem?

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{cases}$$

### 6.2.3 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 - \partial_y$

Diese Gleichung erscheint bei der Wärmeleitung. Weil  $y$  die Zeit darstellt, werden wir  $t$  statt  $y$  benutzen. Ein einfaches, physikalisches Problem wäre die Temperaturverteilung in einem Stab. Wir nehmen an, dieser Stab ist isoliert, außer an den beiden Enden. Als Anfangstemperatur nehmen wir 20 und beide Enden halten wir auf 0. Das Problem wird:

$$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2) u = 0 & \text{in } (0, \ell) \times (0, T), \\ u(x, 0) = 20 & \text{auf } (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{auf } (0, T). \end{cases}$$

Wenn man  $u(x, 0) = \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$  statt 20 hätte, findet man als Lösung

$$u(x, t) = e^{-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Man kontrolliert direkt, dass sowohl die Differentialgleichung als auch die Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt sind. Hat man  $u(x, 0) = \sum_{k=1}^{138} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$  folgt, weil die Differentialgleichung linear ist, als Lösung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{138} c_k e^{-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

Als nächstes wenden wir an, dass

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}x\right) \quad \text{für } 0 < x < \ell$$

und versuchen für die Lösung

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}x\right). \quad (6.18)$$

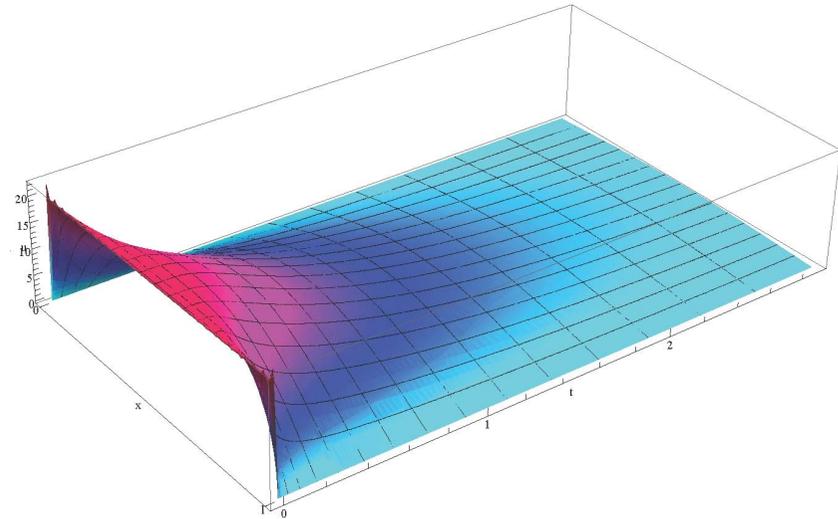


Abbildung 6.5: Eine Skizze der Funktion in (6.18)

Konvergiert die Reihe in (6.18)? Erfüllt sie die Differentialgleichung? Erfüllt sie die Rand- und Anfangsbedingungen? Die Antworten lauten: ja, ja und fast überall. Für die Beweise dieser Aussagen braucht man Kenntnisse von Fourierreihen.

Das Bild in Abbildung 6.5 gibt uns Hoffnung, dass man tatsächlich mit einer konvergenten Reihe zu tun hat. In Abbildung 6.6 finden Sie die Approximationen für  $\ell = 1$  und kleine  $t$  mit endlich vielen Termen an.

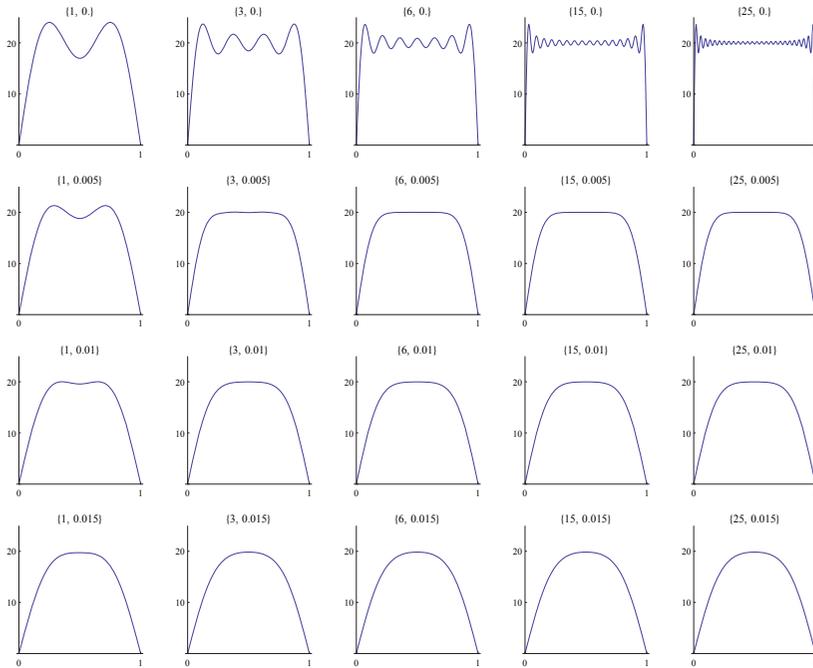


Abbildung 6.6: Skizzen einiger Funktionen die (6.18) approximieren, wo  $\infty$  ersetzt ist durch  $n$ , für  $n \in \{1, 3, 6, 15, 25\}$  und für fest gewählte  $t \in \{0, 0.005, 0.01, 0.015\}$ . Nach rechts ist  $n$  zunehmend; nach unten wird  $t$  größer.

Schreibt man

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \left( e^{-\ell^{-2}\pi^2 t} \right)^{(2k+1)^2} \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{\ell} x \right), \quad (6.19)$$

dann folgt  $e^{-\ell^{-2}\pi^2 t} < 1$  für  $t > 0$  und man zeigt, dass die Reihe

in (6.19) absolut konvergent ist. Innerhalb des Konvergenzradius ist das Ableiten nach  $z := e^{-\ell^{-2}\pi^2 t}$  wohldefiniert und mit Hilfe der Kettenregel existiert auch die Ableitung nach  $t$ . Ähnliches gilt für höhere Ableitungen und Ableitungen nach  $x$ . Weil man so den Limes in den Ableitungen und den Limes in der Summe vertauschen kann für  $t > 0$ , folgt aus

$$(\partial_t - \partial_x^2) e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell}\right)^2 t} \sin \left( \frac{(2k+1)\pi}{\ell} x \right) = 0,$$

dass die Differentialgleichung erfüllt ist für  $t > 0$ . Diese absolute Konvergenz liefert auch

$$u(0, t) = 0 = u(\ell, t) \text{ für } t > 0.$$

Die Stetigkeit von  $u$  bei  $t = 0$  ist nur erfüllt für  $x \in (0, \ell)$ . Um dies zu zeigen, kann man eine Version des Konvergenztests von Abel verwenden.

## 6.2.4 Intermezzo zum Lemma von Abel

**Lemma 6.8 (Abel)** Sei  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ . Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  für  $r \in [0, 1]$  und es gilt

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

**Beweis.** Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, hat  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  einen Konvergenzradius  $R \geq 1$ . Also  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  konvergiert für  $|r| < 1$ . Wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  derart, dass  $|\sum_{n=N}^{\infty} a_n| < \varepsilon$  für alle  $N > N_\varepsilon$ . Dann folgt für  $m > N > N_\varepsilon$ , dass

$$\left| \sum_{n=N}^m a_n \right| \leq \left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \right| < 2\varepsilon. \quad (6.20)$$

Außerdem gilt für  $m > N$ , dass

$$a_n r^n = a_n r^m + a_n \sum_{k=n}^{m-1} (r^{k+1} - r^k)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^m a_n r^n &= \sum_{n=N}^m a_n r^m + \sum_{n=N}^m a_n \sum_{k=n}^{m-1} (r^{k+1} - r^k) \\ &= \sum_{n=N}^m a_n r^m + \sum_{k=N}^{m-1} \sum_{n=N}^k a_n (r^{k+1} - r^k). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^m a_n r^n \right| &\leq \left| \sum_{n=N}^m a_n r^m \right| + \left| \sum_{k=N}^{m-1} \sum_{n=N}^k a_n (r^{k+1} - r^k) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=N}^m a_n \right| r^m + \sum_{k=N}^{m-1} \left| \sum_{n=N}^k a_n \right| |r^{k+1} - r^k| \\ &\leq 2\varepsilon r^m + \sum_{k=N}^{m-1} 2\varepsilon |r^{k+1} - r^k| = 2\varepsilon r^N \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

und ähnlich wie in (6.20) hat man

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} a_n r^n \right| \leq 4\varepsilon. \quad (6.21)$$

Die Konvergenz von  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n r^n$  ist also gleichmäßig bezüglich  $r \in [0, 1]$ .

Betrachte das Polynom  $p(r) = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} a_n r^n$ . Nehme  $\delta > 0$  derartig, dass  $|r - 1| < \delta$  impliziert

$$|p(1) - p(r)| < \varepsilon, \quad (6.22)$$

so folgt aus (6.20), (6.21) und (6.22), dass

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \right| < 7\varepsilon$$

und somit das Ergebnis im Lemma.  $\blacksquare$

### 6.2.5 Der Differentialoperator $L = \partial_x^2 + \partial_y$

Wenn wir versuchen auf ähnliche Art das folgende Problem zu lösen

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_x^2) u = 0 & \text{in } (0, \ell) \times (0, T), \\ u(x, 0) = 20 & \text{auf } (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{auf } (0, T), \end{cases}$$

erhält man die Formel

$$u(x, t) = 20 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-(\frac{(2k+1)\pi}{\ell})^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x\right). \quad (6.23)$$

Auch hier müssen wir uns fragen, ob diese Reihe konvergiert?

In Abbildung 6.6 stehen Skizzen zu den ersten Termen aus (6.18) und in Abbildung 6.7 ähnliche aus (6.23):

$$u_n(x, t) = 20 \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{-(\frac{(2k+1)\pi}{\ell})^2 t} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{\ell} x\right) \quad (6.24)$$

Es hat den Anschein, dass die Formel aus (6.24) nicht konvergiert für  $t = .01$ . Kann man sich mit analytischen Mitteln überzeugen?

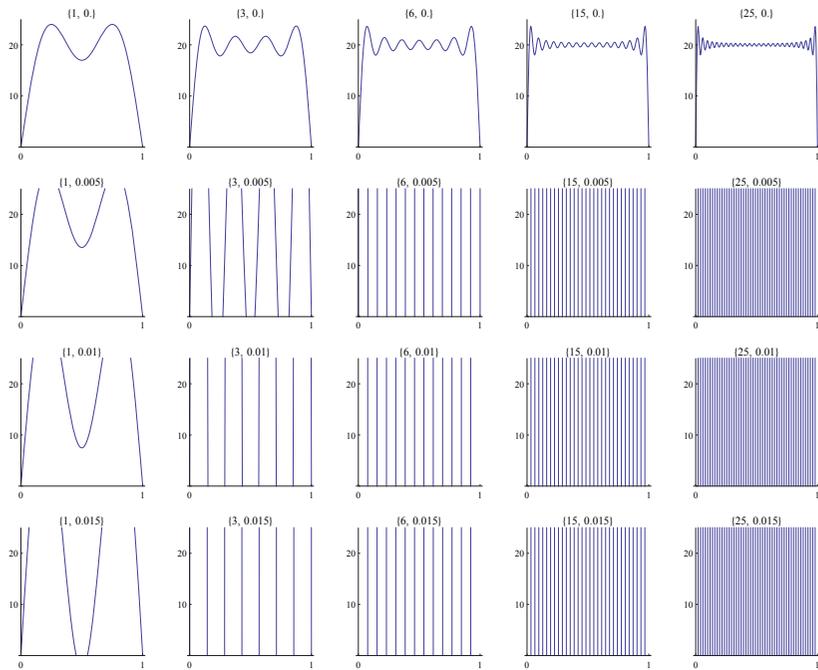


Abbildung 6.7: Skizzen zu den Funktionen

$$x \mapsto 20 \sum_{k=0}^n \frac{4}{(2k+1)\pi} e^{(2k+1)^2 \pi^2 t} \sin((2k+1)\pi x)$$

für  $n \in \{1, 3, 6, 15, 25\}$  und  $t \in \{0, 0.005, 0.01, 0.015\}$ . Man vergleiche mit den Bildern in Fig. 6.6. Anscheinend gibt es Probleme mit der Konvergenz!

### 6.2.6 Welche Randbedingungen passen?

Wir haben keineswegs jetzt schon den kompletten Beweis gegeben, welche Randbedingungen zu einem wohldefinierten Randwertproblem im Sinne von Hadamard führen werden. Die Vermutungen kann man jedoch schon mal bildlich darstellen. Siehe Abbildung 6.8.

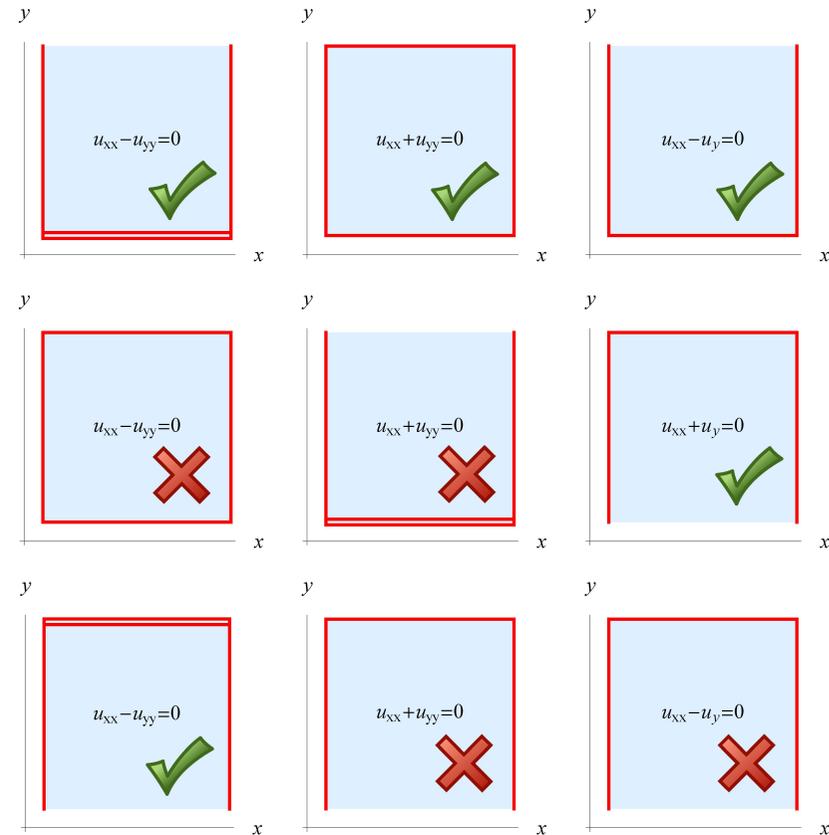


Abbildung 6.8: Mögliche Randbedingungen bei den verschiedenen Differentialgleichungen. Ein roter Strich bedeutet, dass man einen Randwert vorschreibt. Bei zwei Strichen braucht es einen zweiten unabhängigen Randwert. Es gibt wohl-definierte (✓) und nichtwohl-definierte Probleme (✗) im Sinne von Hadamard. Zu der Aussage in fast jedem dieser Beispiele gehört ein nicht-trivialer Beweis.

## 6.3 Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

### 6.3.1 In zwei Dimensionen

Die allgemeine Form einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung sahen wir schon in (6.1):

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = \varphi, \quad (6.25)$$

mit  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ . Das Symbol ist

$$L(\xi, \eta) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f. \quad (6.26)$$

**Definition 6.9** Sei das Symbol wie in (6.26). Dann heißt (6.25)

- *elliptisch*, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass  $L(\xi, \eta) = \lambda$  die Gleichung einer Ellipse darstellt;
- *hyperbolisch*, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass  $L(\xi, \eta) = \lambda$  die Gleichung einer Hyperbel darstellt;
- *parabolisch*, wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt derart, dass  $L(\xi, \eta) = \lambda$  die Gleichung einer Parabel darstellt.

**Bemerkung 6.9.1** Wenn  $a, \dots, e$  von  $x$  und  $y$  abhängt, dann kann es sein, dass der Typ verschieden ist an verschiedenen Stellen. Hyperbolisch und elliptisch wird bestimmt durch  $a, b, c$ .

**Lemma 6.10** Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- *i.* Wenn  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Ellipse darstellt, dann gilt  $b^2 < ac$ .

*ii.* Wenn  $b^2 < ac$  gilt, dann beschreibt  $L(\xi, \eta) = \lambda$  mit  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  entweder eine Ellipse oder einen Punkt oder die leere Menge.

- *i.* Wenn  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Hyperbel darstellt, dann gilt  $b^2 > ac$ .
- ii.* Wenn  $b^2 > ac$  gilt, dann beschreibt  $L(\xi, \eta) = \lambda$  mit  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  entweder eine (doppelte) Hyperbel oder zwei sich schneidende Geraden.
- *i.* Wenn  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Parabel darstellt, dann gilt  $b^2 = ac$  und<sup>3</sup>

$$\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \notin \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \right\}. \quad (6.27)$$

*ii.* Wenn  $b^2 = ac$  und (6.27) gilt, beschreibt  $L(\xi, \eta) = \lambda$  eine Parabel.

Für konstante Koeffizienten kann man (6.25) auch schreiben als

$$\left( \nabla \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \nabla + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \cdot \nabla + f \right) u = \varphi.$$

**Lemma 6.11** Seien  $\mu_1, \mu_2$  die Eigenwerte von  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ .

- $\mu_1\mu_2 > 0 \Leftrightarrow$  (6.25) ist elliptisch.
- $\mu_1\mu_2 < 0 \Leftrightarrow$  (6.25) ist hyperbolisch.
- $\mu_1\mu_2 = 0$  und (6.27) gilt  $\Leftrightarrow$  (6.25) ist parabolisch.

<sup>3</sup> $\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \{\sum_{k=1}^n c_k \vec{v}_k; c_k \in \mathbb{R}\}$ .

**Beispiel 6.12** Die Tricomi-Gleichung  $u_{xx} + xu_{yy} = 0$  ist elliptisch für  $x > 0$  und hyperbolisch für  $x < 0$ .

**Beispiel 6.13** Die Differentialgleichung  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = \varphi$  gehört nicht zu einem dieser drei Typen, denn (6.27) ist nicht erfüllt. Mit der Koordinatentransformation  $s = x + y$  und  $t = x - y$  wird die Differentialgleichung  $4u_{ss} + 2u_s = \varphi$  und die ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.

**Aufgabe 6.4** Klassifizieren Sie die Differentialgleichungen

1.  $u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} = f$ ,

2.  $-u_{xx} + 5u_{xy} - 3u_{yy} = f$ .

**Aufgabe 6.5** Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist diese Differentialgleichung parabolisch?

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + au_x + a^2u_y = f$$

### 6.3.2 In höheren Dimensionen

Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in  $n$  Dimensionen kann man wie folgt schreiben:

$$(\nabla \cdot M \nabla + \vec{v} \cdot \nabla + c) u = f, \quad (6.28)$$

mit  $M$  eine symmetrische und reelle  $n \times n$  Matrix,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  und  $c \in \mathbb{R}$  und  $f$  eine vorgeschriebene Funktion.

**Definition 6.14** Seien  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  die Eigenwerte von  $M$ . Man nennt die partielle Differentialgleichung in (6.28)

- elliptisch, wenn die Eigenwerte entweder alle positiv oder alle negativ sind;
- hyperbolisch, wenn  $n - 1$  Eigenwerte entweder alle positiv oder alle negativ sind und der letzte Eigenwert ein entgegengesetztes Vorzeichen hat;
- parabolisch, wenn  $n - 1$  Eigenwerte das gleiche Vorzeichen haben, der letzte Eigenwert gleich 0 ist und es außerdem gilt, dass  $\vec{v} \notin \text{Spaltenraum}(M)$ .

**Bemerkung 6.14.1** Man erinnere sich aus der Vorlesung Lineare Algebra, dass eine symmetrische und reelle  $n \times n$  Matrix  $M$  eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Man sollte sich auch erinnern, dass für eine  $n \times n$  Matrix  $M$  die Determinante dem Produkt seiner Eigenwerte  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  (mit algebraischer Multiplizität) gleich:

$$\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Es gilt übrigens auch, dass  $\sum_{i=1}^n M_{ii} =: \text{spur}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

**Bemerkung 6.14.2** Lemma 6.11 zeigt, dass diese Klassifizierung auch gilt für Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Dimensionen.

**Bemerkung 6.14.3** Diese Aufteilung umfasst nicht alle Möglichkeiten. Die wichtigsten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus physikalischen Modellen sind aber erfasst.

**Theorem 6.15** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  eine invertierbare Matrix. Unter der Koordinatentransformation  $x = Ay$  ändert sich der Typ der partiellen Differentialgleichung in (6.28) aus Definition 6.14 nicht.

**Beweis.** Setze  $U(y) = u(Ay)$ . Weil

$$\frac{\partial}{\partial y_i} U(y) = \frac{\partial}{\partial y_i} (u(Ay)) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (Ay)$$

gilt, findet man  $\nabla_y U(y) = A (\nabla_x u)(Ay)$  und  $A^{-1} \nabla_y U(y) = (\nabla_x u)(Ay)$ . Setzen wir  $B = A^{-1}$ , so ändert sich (6.28) mit  $F(y) = f(Ay)$  in

$$(B \nabla_y \cdot M B \nabla_y + \vec{v} \cdot B \nabla_y + c) U = F,$$

und dies gleicht

$$(\nabla_y \cdot B^T M B \nabla_y + \vec{v} \cdot B \nabla_y + c) U = F.$$

Hier ist  $B^T$  der Transponierte von  $B$ . Weil  $M$  symmetrisch ist, ist auch  $B^T M B$  symmetrisch:

$$(B^T M B)^T = B^T M^T (B^T)^T = B^T M B.$$

Man soll zeigen, dass die Zahl der positiven, beziehungsweise negativen und Null-Eigenwerte von  $M$  und  $B^T M B$  identisch sind. Dies wäre einfach, wenn  $B$  orthogonal wäre, aber das dürfen wir nicht voraussetzen. Für eine allgemeine invertierbare Matrix  $B \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  braucht man mehrere Schritte, die u.a. Ergebnisse aus der Matrixrechnung verwenden:

- $(BB^T)$  ist eine symmetrische positiv definite Matrix.

- Es gibt eine orthogonale Matrix  $S \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ , also  $S^T = S^{-1}$ , und eine Diagonalmatrix  $D \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  mit  $D_{ii} > 0$  derart, dass  $(BB^T) = SDS^T$ .
- Für  $\theta \in \mathbb{R}$  und  $D_{ii} > 0$  ist die reelle Zahl  $(D_{ii})^\theta$  wohldefiniert. Dann ist auch die Diagonalmatrix mit  $(D^\theta)_{ii} = (D_{ii})^\theta$  und die Matrix  $(BB^T)^\theta := SD^\theta S^T$  wohldefiniert. Hier setzen wir  $D^0 = I$ .
- $B^T M B$  und  $(BB^T)^{1/2} M (BB^T)^{1/2}$  haben die gleichen Eigenwerte.

**Aufgabe 6.6** Finden Sie eine Matrix  $A$  derart, dass  $A\varphi$  ein Eigenvektor von  $(BB^T)^{1/2} M (BB^T)^{1/2}$  ist, wenn  $\varphi$  ein Eigenvektor von  $B^T M B$  ist und derart, dass die zugehörigen Eigenwerte gleich sind.

- Die Dimension von

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^n; (BB^T)^\theta M (BB^T)^\theta v = 0 \right\}$$

ist konstant bezüglich  $\theta$ .

- Die Nullstellen  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}^n$  vom Polynom

$$p(\lambda; \vec{a}) := \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda^1 + a_n$$

kann man lokal so anordnen, dass sie stetig abhängig sind von  $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$ . Diese Stetigkeit ist bewiesen von Ostrowski in einer Arbeit aus 1939. Um dies genau zu formulieren ist jedoch weniger die Stetigkeit ein Problem, sondern

welchen Eigenwert man zum Beispiel  $\lambda_1$  nennt, weil man diese Eigenwerte in  $\mathbb{C}$  nicht global durch eine vernünftige Ordnung festlegen kann. Siehe Abbildung 6.9.

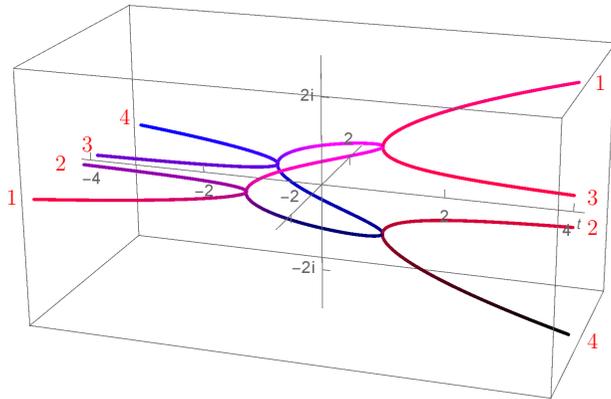


Abbildung 6.9: Sei  $p_t(\lambda) := \lambda^4 + 2t\lambda^2 + 1 = 0$ . Die vier Nullstellen  $t \mapsto \lambda(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  von  $p_t(\lambda) = 0$  als Funktion von  $t$  sind hier skizziert. Ordnet man die Nullstellen links von vorne nach hinten, kann man diese Ordnung nicht stetig überführen in eine Ordnung rechts von oben nach unten oder umgekehrt.

- Das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) := \det \left( (BB^T)^\theta M (BB^T)^\theta - \lambda I \right)$$

hat für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  gleich viel positive, beziehungsweise negative Nullstellen.

Kombiniert man diese Ergebnisse, dann folgt, dass die Zahl der positiven, beziehungsweise negativen und Null-Eigenwerte

von  $M$  und  $B^T M B$  identisch sind. Die zusätzliche Bedingung für die Parabolizität lässt sich direkt kontrollieren. ■

**Aufgabe 6.7** Berechnen Sie den Typ der Differentialgleichung in Abhängigkeit von  $a$ :

$$u_{xx} + 2au_{x,y} + u_{yy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z = f.$$

### 6.3.3 Bei variablen Koeffizienten

Wenn die Differentialgleichung Koeffizienten hat, die nicht konstant sind, kann die Klassifizierung ortsabhängig sein. Dann wird klassifiziert, indem man den Parameter einfriert. Das heißt, man nennt eine semilineare Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_{x_j} u(x) = f(x, u) \quad (6.29)$$

elliptisch (beziehungsweise parabolisch, hyperbolisch) an der Stelle  $x_0$ , wenn

$$L := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x_0) \partial_{x_j}$$

elliptisch (beziehungsweise parabolisch, hyperbolisch) ist. Bei einer quasilinearen Differentialgleichung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x)) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) = f(x, u(x), \nabla u(x)) \quad (6.30)$$

wird dieses Einfrieren sogar von der Lösung selber abhängen. Man nennt (6.30) elliptisch (beziehungsweise hyperbolisch) an der Stelle  $x_0$ , wenn gilt:

$$L := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0)) \partial_{x_i} \partial_{x_j}$$

ist elliptisch.

**Beispiel 6.16** Eine einfache Differentialgleichung für eine stationäre Potentialströmung von einem Gas in zwei Dimensionen ist

$$(c^2 - u_x^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c^2 - u_y^2) u_{yy} = 0. \quad (6.31)$$

Hier ist  $u$  das Potential und  $\nabla u$  die Geschwindigkeit. Weil

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} c^2 - u_x^2 & -u_x u_y \\ -u_x u_y & c^2 - u_y^2 \end{pmatrix} \\ = (c^2 - u_x^2)(c^2 - u_y^2) - (u_x u_y)^2 = c^2 (c^2 - |\nabla u|^2) \end{aligned}$$

gilt, folgt, dass (6.31) elliptisch ist für  $|\nabla u|^2 < c^2$  und hyperbolisch ist für  $|\nabla u|^2 > c^2$ . Bei einer solchen Potentialströmung ist  $c$  die Schallgeschwindigkeit in dem Gas. Diese Gleichung trifft auch zu, wenn das Gas zum Beispiel Luft ist und ein Flugzeug sich durch dieses Gas bewegt. Wenn sich das Flugzeug schneller als die Schallgeschwindigkeit bewegt, gibt es Stellen, an denen  $|\nabla u| > c$  gilt. Das bedeutet, dass man dann für die Gleichung (6.31) sowohl „elliptische“ Gebiete als auch „hyperbolische“ Gebiete hat. Die Modellierung für Überschall- und für Unterschallflug sind dann auch wesentlich verschieden.

**Aufgabe 6.8** Die Monge-Ampère Gleichung ist definiert für Funktionen auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  durch

$$\det \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} = f.$$

Zeigen Sie, dass wenn  $f > 0$  gilt und  $u \in C^\infty(\Omega)$ , dann ist diese Gleichung elliptisch. Weil diese Gleichung nicht linear ist, betrachtet man die Gleichung für

$$\begin{aligned} v(x, y) &:= u(x, y) - u(x_0, y_0) - (x - x_0) u_x(x_0, y_0) \\ &\quad - (y - y_0) u_y(x_0, y_0) - \frac{1}{2} (x - x_0)^2 u_{xx}(x_0, y_0) \\ &\quad - (x - x_0)(y - y_0) u_{xy}(x_0, y_0) - \frac{1}{2} (y - y_0)^2 u_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

mit  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , wenn  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$  klein ist, und betrachtet deren Klassifizierung.

## Die 1d Wellengleichung

Eine typische hyperbolische partielle Differentialgleichung ist die Wellengleichung:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0. \quad (7.1)$$

Die Variable  $t$  repräsentiert meistens die Zeit; der Differentialoperator  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  ist die Summe der zweiten Ableitungen bezüglich der Raumvariablen. In Raumdimension 1 beschreibt diese Gleichung zum Beispiel die Schwingungen einer Saite, in Dimension 2 die Wellen in einem Teich und in Dimension 3 beschreibt sie, wie die Stimme eines Sängers sein Publikum erreicht.

### 7.1 Die Wellengleichung in Raumdimension 1

Die Wellengleichung in einer Dimension haben wir schon betrachtet in Paragraph 6.2.1. Die folgende partielle Differentialgleichung ist gemeint:

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t).$$

Diese Differentialgleichung ist hyperbolisch. Man kann durch Skalierung  $c = 1$  erhalten, so wie es in Paragraph 6.2.1 gemacht wird. Weil  $c$  genau die Geschwindigkeit ist, mit der die Wellen sich seitwärts bewegen, lässt man der Anschaulichkeit halber  $c$  oft auch stehen.

Die Funktion  $f$  ist gegeben und man versucht, bei geschickt gewählten Anfangs- und Randwerten, die Existenz einer eindeutigen Lösung zu zeigen. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (7.2)$$

ist ein solches Problem.

#### Proposition 7.1 (Die Formel von d'Alembert)

Sei  $f = 0$ ,  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$  und  $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ . Dann hat (7.2) genau eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x - ct) + \frac{1}{2} u_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y) dy. \quad (7.3)$$

**Bemerkung 7.1.1** Wenn  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$  und  $v_0 \in C(\mathbb{R})$ , dann liefert (7.3) immer noch eine schwache Lösung  $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ .

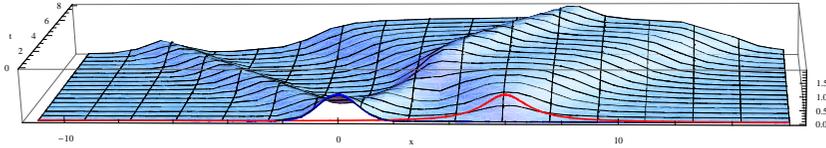


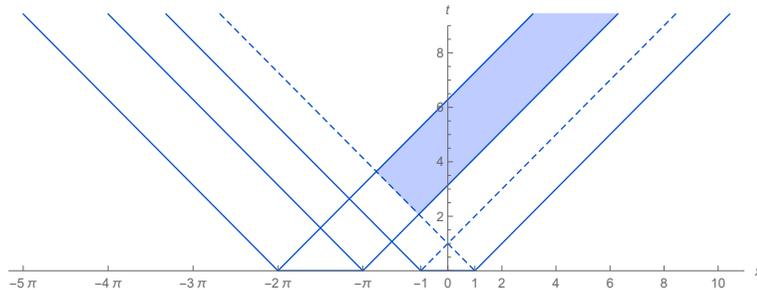
Abbildung 7.1: Skizze der Lösung nach d'Alembert von (7.2) mit  $c = 1$  und  $u_0(x) = e^{-x^2}$  (in blau) und  $v_0(x) = \frac{1}{1+(x-6)^2}$  (in rot).

**Aufgabe 7.1** Sei  $c = 1$  und  $u_0, v_0$  definiert durch

$$u_0(x) = \begin{cases} (\sin(x))^2 & \text{für } x \in [-2\pi, -\pi], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$v_0(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{für } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie eine Lösung  $u$  von (7.2) auf dem in Blau angegebenen Teilgebiet.



2. Geben Sie auch den Träger von  $u$  in  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  an.

**Aufgabe 7.2** Obwohl in der letzten Aufgabe  $u_0 \in C^{1,1}(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$  gilt, kann man die Formel von d'Alembert anwenden. Wie kann man eine Lösung passend definieren?

**Beweis.** Wenn  $f, u_0$  und  $v_0$  diesen obengenannten Funktionenräumen angehören, ist  $u$  zweimal stetig differenzierbar. Die erste Anfangsbedingung folgt direkt:

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}u_0(x-0) + \frac{1}{2}u_0(x+0) + \frac{1}{2c} \int_x^x v_0(y) dy = u_0(x).$$

Man findet

$$u_t(x, t) = -\frac{1}{2}cu'_0(x-ct) + \frac{1}{2}cu'_0(x+ct) + \frac{1}{2}v_0(x+ct) + \frac{1}{2}v_0(x-ct),$$

und es folgt

$$u_t(x, 0) = v_0(x).$$

Nochmals nach  $t$  ableiten ergibt

$$u_{tt}(x, t) = \frac{1}{2}c^2u''_0(x-ct) + \frac{1}{2}c^2u''_0(x+ct) + \frac{1}{2}cv'_0(x+ct) - \frac{1}{2}cv'_0(x-ct).$$

Die Ableitungen nach  $x$  sind

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2}u'_0(x-ct) + \frac{1}{2}u'_0(x+ct) + \frac{1}{2c}v_0(x+ct) - \frac{1}{2c}v_0(x-ct),$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{2}u''_0(x-ct) + \frac{1}{2}u''_0(x+ct) + \frac{1}{2c}v'_0(x+ct) - \frac{1}{2c}v'_0(x-ct).$$

Die Differentialgleichung ist erfüllt und  $u$  in (7.3) ist eine Lösung.

Dass diese Lösung die einzige ist, findet man durch Verfolgung der charakteristischen Kurven anfangend auf  $t = 0$ .

Wenn es nämlich zwei Lösungen gäbe, sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann erfüllt  $u = u_1 - u_2$  das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ (\partial_t + c\partial_x)u = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}, \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases} \quad (7.4)$$

Entlang der charakteristischen Kurven für  $\partial_t - c\partial_x$ , also entlang  $x = x_0 - ct$ , folgt dass  $(\partial_t + c\partial_x)u$  konstant ist:

$$((\partial_t + c\partial_x)u)(x_0 - ct, t) = ((\partial_t + c\partial_x)u)(x_0, 0) = 0.$$

Also gilt  $(\partial_t + c\partial_x)u(x, t) = 0$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Anschließend finden wir entlang  $x = x_0 + ct$ , dass

$$u(x_0 + ct, t) = u(x_0, 0) = 0.$$

Also gilt  $u(x, t) = 0$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  und  $u_1 \equiv u_2$ . ■

Der Beweis der Eindeutigkeit der Lösung von (7.2) gilt auch für  $f \neq 0$ .

**Proposition 7.2 (Prinzip von Duhamel)** Sei  $u_0 = v_0 = 0$  und  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ . Dann hat (7.2) genau eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds \quad (7.5)$$

wobei  $U(\cdot, \cdot; s)$  für  $s > 0$  die Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(x, t; s) - c^2 U_{xx}(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > s, \\ U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t = s, \\ U_t(x, t; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t = s. \end{cases} \quad (7.6)$$



Abbildung 7.2: Links: Jean Le Rond d'Alembert, 1717 - 1783. Rechts: Jean Marie Constant Duhamel, 1797 - 1872.

**Bemerkung 7.2.1** Die Funktionen  $(x, t) \mapsto U(x, t; s)$  sind wohldefiniert für  $t \geq s$ . Dies bedeutet auch, dass  $u$  in (7.5) wohldefiniert ist.

**Bemerkung 7.2.2** Die Differentialgleichung ist linear. Das bedeutet, dass die Summe von (7.3) und (7.5) eine Lösung liefert für (7.2) mit  $u_0, v_0$  und  $f$  ungleich 0.

**Beweis.** Aus Proposition 7.1 folgt

$$U(x, t; s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy.$$

Wenn  $f \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , dann ist auch  $(x, t, s) \mapsto U(x, t; s)$

zweimal stetig differenzierbar. Man findet<sup>1</sup>

$$u_t(x, t) = U(x, t; t) + \int_0^t U_t(x, t; s) ds = \int_0^t U_t(x, t; s) ds$$

und

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= U_t(x, t; s)_{s=t} + \int_0^t U_{tt}(x, t; s) ds \\ &= f(x, t) + \int_0^t c^2 U_{xx}(x, t; s) ds \\ &= f(x, t) + c^2 u_{xx}(x, t). \end{aligned}$$

Weil

$$u(x, 0) = \int_0^0 U(x, 0; s) ds = 0$$

und

$$u_t(x, 0) = \int_0^0 U_t(x, 0; s) ds = 0,$$

sind auch die Anfangsbedingungen erfüllt. ■

Noch eine Bemerkung zu (7.3) und (7.5) ist zu machen: In (7.3) steht, wie sich der Einfluss der Anfangswerte  $u_0$  und  $v_0$

<sup>1</sup>Für  $g(t) = \int_0^t f(t, s) ds$  mit stetig differenzierbarem  $f$  gilt

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_0^{t+h} f(t+h, s) ds - \int_0^t f(t, s) ds \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(t+h, s) ds + \int_0^t \frac{f(t+h, s) - f(t, s)}{h} ds \right) = \\ &= f(t, t) + \int_0^t f_t(t, s) ds. \end{aligned}$$

auswirkt. In (7.5) sieht man, wo  $f$  an der Stelle  $(x, t)$  seinen Einfluss hat. Umgekehrt kann man sehen, wie der Wert von  $u(x, t)$  abhängt von  $u_0, v_0$  und  $f$ . Man nennt diese Teilgebiete Einflussbereich und Abhängigkeitsbereich. Für  $u_0$  sind es Kegelflächen. Für  $v_0$  und  $f$  sind es *Einflusskegel*<sup>2</sup> und *Abhängigkeitskegel*<sup>3</sup>. Siehe Abbildung 7.3.

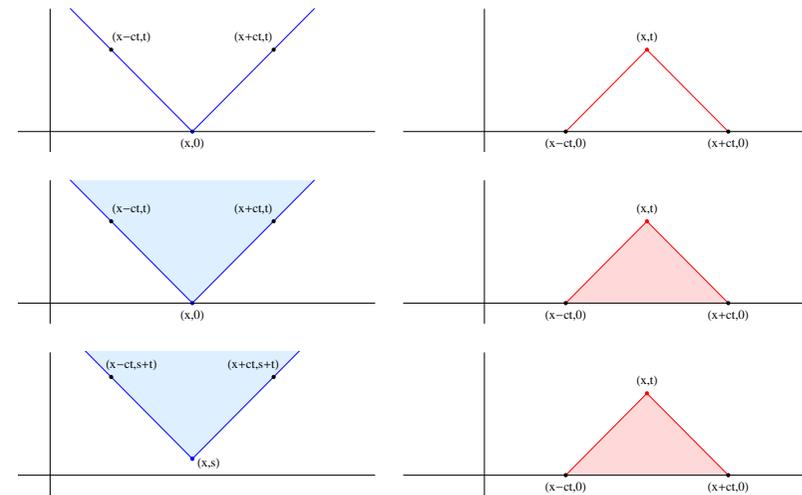


Abbildung 7.3: Oben: Das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet zu  $u_0$ . Mitte: Der Einflusskegel und der Abhängigkeitskegel zu  $v_0$ . Unten: Der Einflusskegel und der Abhängigkeitskegel zu  $f$ .

**Aufgabe 7.3** Sei  $f$  definiert durch

$$f(x, t) = \begin{cases} (1-x^2)^2(2-t)^2 & \text{für } |x| \leq 1 \text{ und } t \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

<sup>2</sup>Cone of influence

<sup>3</sup>Cone of dependance

Wir betrachten

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass  $u(x, t) = 0$  gilt für  $t \leq |x| - 1$ .
2. Zeigen Sie, dass  $u(x, t)$  konstant ist für  $t \geq |x| + 3$ .
3. Wir definieren  $M(t) := \int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx$ . Zeigen Sie, dass

$$M''(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) dx \quad \text{und} \\ M'(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x, s) dx ds.$$

4. Zeigen Sie, dass  $M'(t)$  konstant ist für  $t \geq 2$ .
5. Berechnen Sie  $M(t)$  für  $t \geq 2$ .
6. Berechnen Sie mit diesem  $M(t)$  den konstanten Wert von  $u(x, t)$  für  $t \geq |x| + 3$ .

## 7.2 Die 1d-Wellengleichung auf einem Intervall

Die Formeln von D'Alembert und Duhamel sind für  $x \in \mathbb{R}$  und  $t > 0$  gemacht. Man kann sie jedoch manchmal verwenden, wenn  $x$  in einem Intervall  $I$  liegt. Wie man in Paragraph 6.2.1

schon gesehen hat, braucht man für  $(x, t) \in \partial I \times \mathbb{R}^+$  dann eine Randbedingung. Wenn diese Randbedingung sehr einfach ist, wie zum Beispiel  $u(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \partial I \times \mathbb{R}^+$  dann kann man für ein solches beschränktes Gebiet eine Lösung finden, wenn man die Funktionen  $u_0$ ,  $v_0$  und  $f$  geschickt fortsetzt. Wir betrachten dies in den nächsten Beispielen.

**Beispiel 7.3** Für  $I = \mathbb{R}^+$  und  $u(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \partial I \times \mathbb{R}^+$  wird das Anfangs-Randwertproblem wie folgt:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x > 0 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u(0, t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Man definiere

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, t) &= \begin{cases} f(x, t) & \text{für } x \geq 0, \\ -f(-x, t) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{u}_0(x) &= \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ -u_0(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{v}_0(x) &= \begin{cases} v_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ -v_0(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

und betrachte (7.2) mit diesen erweiterten rechten Seiten. Wenn  $f(0, t)$ ,  $u_0(0)$  und  $v_0(0)$  nicht identisch 0 sind, sind diese erweiterten Funktionen nicht länger stetig. Und sogar wenn diese Kompatibilitätsbedingung erfüllt ist, reicht es noch nicht für die Differenzierbarkeit. Sei  $\bar{u}(x, t)$  nun definiert durch (7.3) und (7.5). Dann folgt aus der antisymmetrischen Fortsetzung von  $f$ ,  $u_0$  und  $v_0$ , dass auch  $x \mapsto \bar{u}(x, t)$  antisymmetrisch ist, das heißt

$$\bar{u}(x, t) = -\bar{u}(-x, t).$$

Ist also die Kompatibilitätsbedingung erfüllt, findet man durch

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t)|_{x \geq 0}$$

eine distributionelle Lösung  $u \in C([0, \infty) \times [0, \infty))$ .

**Beispiel 7.4** Für das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x > 0 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x > 0, \\ u_x(0, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases} \quad (7.8)$$

findet man eine Lösung durch symmetrische Fortsetzung:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, t) &= \begin{cases} f(x, t) & \text{für } x \geq 0, \\ f(-x, t) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{u}_0(x) &= \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ u_0(-x) & \text{für } x < 0, \end{cases} \\ \bar{v}_0(x) &= \begin{cases} v_0(x) & \text{für } x \geq 0, \\ v_0(-x) & \text{für } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Auch hier gibt es Kompatibilitätsbedingungen, wenn die Lösung  $\bar{u}(x, t)$  klassisch sein sollte.

**Beispiel 7.5** Für das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in (0, \ell) \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0 & \text{für } t > 0, \end{cases} \quad (7.9)$$

findet man eine Lösung durch periodische Fortsetzung. Man definiert

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(x) &= \begin{cases} u_0(x) & \text{für } x \in [0, \ell), \\ -u_0(2\ell - x) & \text{für } x \in [\ell, 2\ell), \end{cases} \\ \bar{u}_0(x) &= \tilde{u}_0(x - \left[ \frac{x}{2\ell} \right] 2\ell). \end{aligned}$$

Hier ist  $[s] = \max\{k \in \mathbb{N}; k \leq s\}$ . Auf ähnliche Weise werden  $f(\cdot, t)$  und  $v_0$  fortgesetzt. Eine solche Fortsetzung findet man in Abbildung 7.4.

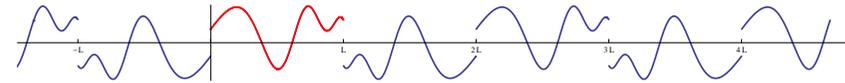


Abbildung 7.4: Periodische Fortsetzung einer auf  $[0, L]$  definierten Funktion, die außerdem antisymmetrisch ist bezüglich 0 und  $L$ .

Für das Problem (7.9) kann man auch eine Lösung finden mit Hilfe von Fouriertheorie. Für (7.9) wäre das eine Lösung der Form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \phi_k(x) \sqrt{2/\ell} \sin\left(k \frac{\pi}{\ell} x\right)$$

mit

$$\phi_k(x) = \sqrt{2/\ell} \sin\left(k \frac{\pi}{\ell} x\right) \quad (7.10)$$

und  $c_k(\cdot)$  eine geschickt gewählte Lösung von

$$c_k''(t) + \left(k \frac{\pi}{\ell}\right)^2 c_k(t) = 0.$$

Die Funktionen  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}^+}$ , definiert in (7.10), nennt man ein vollständiges Orthonormalsystem für  $L^2(0, \ell)$ , das heißt, für jede Funktion  $u_0 \in L^2(0, \ell)$  gibt es eine Folge  $\gamma_k \in \ell^2$  derart, dass

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \phi_k(x). \quad (7.11)$$

Genauer gesagt, bedeutet (7.11), dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| u_0(x) - \sum_{k=1}^m \gamma_k \phi_k(x) \right\|_{L^2(0, \ell)} = 0.$$

Das hier gewählte Orthonormalsystem sind die Eigenfunktionen von

$$\begin{cases} \phi_{xx}(x) = \lambda \phi(x) & \text{für } x \in (0, \ell), \\ \phi(0) = \phi(\ell) = 0. \end{cases}$$

**Aufgabe 7.4** *Geben Sie eine Lösung von*

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in (0, \pi) \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(x) & \text{für } x \in (0, \pi), \\ u_t(x, 0) = \sin(2x) & \text{für } x \in (0, \pi), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

*Ist sie die einzige Lösung?*



## Intermezzo zu Distributionen

Die Physik hat der Mathematik die *Dirac- $\delta$ -Funktion*<sup>1</sup> gebracht. Diese  $\delta$ -Funktion soll folgende Eigenschaften haben:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \text{ für jedes } \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Wenn  $\delta$  eine integrierbare Funktion wäre, folgt aus dem Satz von Lusin, dass  $\delta$  stetig ist auf jedem beschränkten Gebiet mit Ausnahme einer beliebig kleinen Menge. Wenn  $\delta$  stetig ist in  $x \neq 0$ , folgt mit dem Hauptlemma der Variationsrechnung (Lemma 3.17), dass  $\delta(x) = 0$ . Es gilt also  $\delta = 0$  fast überall. Dann folgt aber, dass  $\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = 0$ , und das ist ein Widerspruch.

Das bedeutet nicht, dass es diese Dirac- $\delta$ -Funktion nicht gibt, sondern, dass wir etwas mehr Sorgfalt walten lassen müssen, wenn wir dieses  $\delta$  definieren. Dazu brauchen wir Objekte, die den Begriff der Funktion erweitern. Diese Erweiterung hat den Namen Distribution bekommen.

<sup>1</sup>Paul Adrien Maurice Dirac, 1902 Bristol (GB) – 1984 Tallahassee (USA), Nobel Preis in Physik 1933

### 8.1 Testfunktionen

Die Dirac- $\delta$ -Funktion ist etwas, das sich nur definieren lässt durch seine Wirkung auf Testfunktionen  $\varphi$ . Die zwei wichtigsten Sorten von Testfunktionen werden wir vorstellen:

**Definition 8.1** *Man nennt*

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) := \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \exists R > 0 \text{ mit } u(x) = 0 \text{ für } |x| > R\}$$

*den Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.*

**Bemerkung 8.1.1** *Manchmal schreibt man auch  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  statt  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .*

**Beispiel 8.2** *Die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (8.1)$$

*ist eine Funktion in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .*

**Notation 8.3** Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  setzt man

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

$$D^\beta = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\beta_2} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}.$$

Man nennt  $\alpha$  und  $\beta$  Multiindizes.

**Definition 8.4** Man nennt

$$C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha D^\beta u(x) = 0 \right\}$$

den Vektorraum der schnell fallenden, beliebig oft differenzierbaren Funktionen.

**Aufgabe 8.1** Die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  wird definiert durch  $\varphi(x) = \exp(-|x|^2)$ . Zeigen Sie, dass  $\varphi \in C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

## 8.2 Konvergenz für Testfunktionen

Sowohl für  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  als auch für  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  wollen wir Folgenkonvergenz festlegen. Wenn eine passende Norm zur Verfügung steht, wäre das einfach. Man könnte zwar zum Beispiel die  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm verwenden, doch die gibt nicht genügend Struktur. Wir möchten, dass der Limes einer Folge von Testfunktionen auch wieder eine Testfunktion aus der gleichen Menge ist. Das heißt zum Beispiel bei  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , dass die Träger beschränkt bleiben und im gleichen Kompaktum liegen.

Um beim Limes wieder eine  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktion zu bekommen, brauchen wir Konvergenz in jeder  $C^k(\mathbb{R}^n)$ -Norm. Dies führt zu der folgenden Definition der Konvergenz bei Testfunktionen aus  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

**Definition 8.5** Sei  $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann sagen wir

$$\varphi_\ell \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D},$$

wenn:

1. es eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^n$  gibt derart, dass für die Träger  $\text{supp}(\varphi_\ell)$  gilt

$$\text{supp}(\varphi_\ell) \subset K \text{ für alle } \ell \in \mathbb{N},$$

2. und für alle  $\beta \in \mathbb{N}^n$  gilt  $\|D^\beta \varphi_\ell - D^\beta \varphi\|_\infty \rightarrow 0$ , wenn  $\ell \rightarrow \infty$ .

**Bemerkung 8.5.1** Schwartz nannte den Vektorraum  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  versehen mit dieser Konvergenz  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  oder nur  $\mathcal{D}$ . Der Buchstabe  $D$  wurde von Schwartz verwendet wegen Differenzieren.

Auf ähnliche Art geht man vor bei der zweiten Klasse von Testfunktionen. Um beim Limes in  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  wieder eine  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktion zu bekommen, definiert man für  $u \in C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  die folgenden Normen:

$$\|u\|_{m,k}^* := \sum_{\substack{|a| \leq k \\ |\beta| \leq m}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)|. \quad (8.2)$$

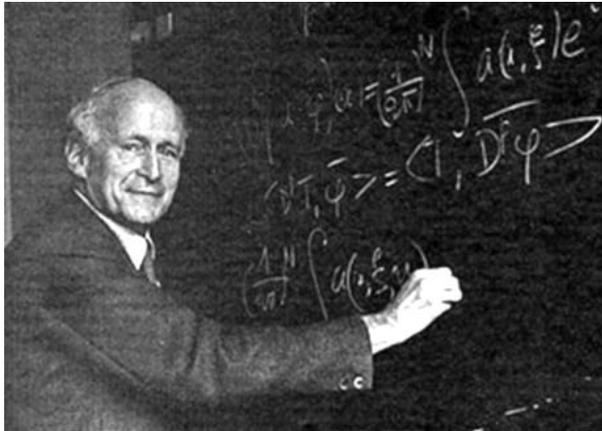


Abbildung 8.1: Laurent Schwartz, 1915 - 2002, Französischer Mathematiker.

**Definition 8.6** Sei  $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  und sei  $\varphi \in C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann sagen wir

$$\varphi_\ell \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{S},$$

wenn für alle  $m, k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\|\varphi_\ell - \varphi\|_{m,k}^* \rightarrow 0 \text{ wenn } \ell \rightarrow \infty.$$

**Bemerkung 8.6.1** Um Schwartz zu ehren nannte man den Vektorraum  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , versehen mit dieser Konvergenz,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  oder nur  $\mathcal{S}$ .

**Bemerkung 8.6.2** Um die Konvergenz in  $\mathcal{S}$  zu definieren, verwendet man (abzählbar) unendlich viele Normen. Wenn man endlich viele Normen hätte, dann würde man  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  als einen normierten Vektorraum darstellen können. Dies gelingt hier jedoch nicht.

Man sieht direkt, dass  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  und dass  $C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  echt größer als  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist.

Wie verhalten sich die beiden Konvergenzdefinitionen?

**Lemma 8.7** Sei  $\{\varphi_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

1. Wenn  $\varphi_\ell \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}$ , dann gilt auch  $\varphi_\ell \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{S}$ .
2. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

**Beweis.** 1. Wir dürfen annehmen, dass  $\text{supp}(\varphi_\ell) \subset B_R(0)$  mit  $R \geq 1$ . Dann gilt

$$\|\varphi_\ell\|_{m,k}^* \leq R^k \|\varphi_\ell\|_{C^m(K)} \rightarrow 0 \text{ für } \ell \rightarrow \infty.$$

2. Für die Umkehrung nehmen wir ein nichttriviales  $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und betrachten

$$\varphi_\ell(x) = \ell^{-1} \tilde{\varphi}(\ell^{-1}x).$$

Dann gilt  $\varphi_\ell \rightarrow 0$  in  $\mathcal{S}$  aber die Folge konvergiert nicht in  $\mathcal{D}$ , denn die Träger  $\text{supp}(\varphi_\ell)$  liegen nicht innerhalb eines gemeinsamen Kompaktums. ■

**Aufgabe 8.2** Wir definieren  $\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $n \in \mathbb{N}^+$  durch

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-n^2 x^2}{n^2 - x^2}\right) & \text{für } |x| < n, \\ 0 & \text{für } |x| \geq n. \end{cases}$$

1. Zeigen Sie  $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ .
2. Berechnen Sie  $\varphi_\infty(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ .
3. Zeigen Sie  $\varphi_n \not\rightarrow \varphi_\infty$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .
4. Zeigen Sie  $\varphi_n \rightarrow \varphi_\infty$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

### 8.3 Distributionen

Für einen normierten Raum  $X$  definiert man den Dualraum  $X'$  als den Raum der stetigen linearen Abbildungen. Um den Dualraum zu definieren, muss der Raum nicht unbedingt eine Norm haben, sondern es reicht, die Konvergenz definiert zu haben.

**Definition 8.8 (Schwartz-Distributionen)** Eine Schwartz-Distribution ist eine stetige lineare Abbildung von  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  nach  $\mathbb{R}$ . Für die Menge dieser Distributionen schreibt man  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Bemerkung 8.8.1** Also gilt  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , wenn

1.  $F$  ist linear: für alle  $c_i \in \mathbb{R}$  und  $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$F(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1F(\varphi_1) + c_2F(\varphi_2);$$

2.  $F$  ist stetig:

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies |F(\varphi_n) - F(\varphi)| \rightarrow 0.$$

**Bemerkung 8.8.2** Wie immer bei linearen Abbildungen impliziert die Stetigkeit in 0 die Stetigkeit auf dem ganzen Raum, denn  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}$  impliziert  $\varphi_n - \varphi \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}$  und die Linearität liefert  $|F(\varphi_n) - F(\varphi)| = |F(\varphi_n - \varphi)|$ .

**Bemerkung 8.8.3** Wenn  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}$ , dann haben diese  $\varphi_n$  nach Definition 8.5 den Träger im gleichen Kompaktum liegen, aber auch folgt, dass  $\|\varphi_n - \varphi\|_{C^k} \rightarrow 0$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

Um zu zeigen, dass  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , reicht es also, dass  $F$  linear ist und es eine solche  $C^k$ -Norm gibt derart, dass

$$|F(\varphi)| \leq C_F \|\varphi\|_{C^k}$$

für ein  $C_F \in \mathbb{R}^+$  unabhängig von  $\varphi$ .

#### Definition 8.9 (Temperierte Distributionen)

Eine temperierte Distribution ist eine stetige lineare Abbildung von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  nach  $\mathbb{R}$ . Für die Menge dieser Distributionen schreibt man  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Bemerkung 8.9.1** Linearität und Stetigkeit sind ähnlich wie in Bemerkung 8.8.1.

Weil  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_{\text{s.f.}}^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt und wegen Lemma 8.7, kann man sagen

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Stetigkeit in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ist also etwas, das für eine größere Menge Funktionen gelten soll als die Stetigkeit in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Dies bedeutet, dass

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Jede lokal Lebesgue-integrierbare Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$  liefert durch

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx. \quad (8.3)$$

eine Abbildung  $F_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Eine solche Distribution nennt man regulär. Die Linearität von  $F_f$  folgt sofort. Für Stetigkeit betrachte man für  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit Träger in  $K$  die folgende

Abschätzung:

$$\begin{aligned} |F_f(\varphi)| &\leq \int_K |f(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \int_K |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(K)} \|\varphi\|_{L^\infty(K)}. \end{aligned}$$

Wenn  $\varphi_n \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , findet man ein  $K \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp } \varphi_n$  und  $\|\varphi_n\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0$ . Es folgt, dass

$$|F_f(\varphi_n)| \leq \|f\|_{L^1(K)} \|\varphi_n\|_{L^\infty(K)} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Wenn die Funktion  $f$  höchstens polynomiales Wachstum hat, dann definiert (8.3) auch ein  $F_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Nimmt man jedoch eine Funktion wie  $f(x) = e^{|x|^2}$ , dann findet man, dass  $F_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , jedoch auch, dass  $F_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemma 8.10** Wenn  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $F'$ , definiert durch

$$F'(\varphi) := -F(\varphi'),$$

auch in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Das ähnliche Ergebnis gilt für  $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

**Bemerkung 8.10.1** Ähnliches gilt in höheren Dimensionen mit partiellen Ableitungen.

**Beweis.** Die Linearität von  $F'$  folgt aus der Linearität von  $F$ . Für die Stetigkeit von  $F'$  verwendet man die von  $F$ . Denn, wenn  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt, dann gilt auch  $\varphi'_n \rightarrow \varphi'$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Weil

$$F'(\varphi_n) = -F(\varphi'_n) \rightarrow -F(\varphi') = F'(\varphi)$$

folgt das Ergebnis. ■

**Beispiel 8.11** Betrachtet man  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x) = \frac{1}{2} \text{sign}(x)$ , dann ist die zugehörige Abbildung  $F$  auf  $C_0[-1, 1]$  definiert als

$$F(\varphi) = \int_{-1}^1 f(x) \varphi(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \varphi(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Es gilt für  $F'$  auf  $C^1[-1, 1] \cap C_0[-1, 1]$ , dass

$$\begin{aligned} F'(\varphi) &= -F(\varphi') = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \varphi'(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi'(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \varphi(0) - \frac{1}{2} \varphi(-1) - \frac{1}{2} \varphi(1) + \frac{1}{2} \varphi(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi). \end{aligned}$$

**Bemerkung 8.11.1** Die Dirac- $\delta$ -Funktion liegt sowohl in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  als auch in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , denn für  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cup C_{s.f.}^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$|\delta_0(\varphi)| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{0,0}^*.$$

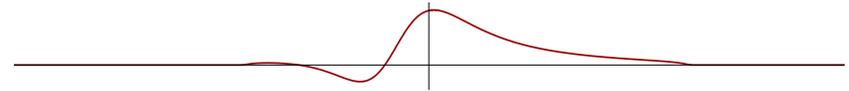


Abbildung 8.2: Darstellung einer Funktion aus  $D(\mathbb{R})$ . Eine solche Funktion ist unendlich oft differenzierbar und hat einen kompakten Träger.

Reguläre Distributionen sind Distributionen aus  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , welche sich wie in (8.3) mit Hilfe einer Funktion definieren lassen.

Wir betrachten nochmals  $\varphi_\varepsilon$  aus (3.9):

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2 - \varepsilon^2}} & \text{für } |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (8.4)$$

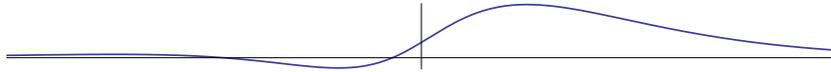


Abbildung 8.3: Darstellung einer Funktion aus  $S(\mathbb{R})$ . Eine solche Funktion ist unendlich oft differenzierbar und schnell fallend.

und setzen

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx}. \quad (8.5)$$

Ein Bild zu diesen Funktionen findet man in Abbildung 3.3. Setze

$$\Psi_\varepsilon(u)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x) u(x) dx \text{ für } u \in C_B(\mathbb{R}^n). \quad (8.6)$$

Für  $\varepsilon > 0$  ist die Abbildung  $\Psi_\varepsilon : C_B(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B(\mathbb{R}^n)$  wohldefiniert, und es gilt

$$u \in C_B(\mathbb{R}^n) \implies \Psi_\varepsilon(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_B(\mathbb{R}^n).$$

**Definition 8.12** Den Operator  $\Psi_\varepsilon : C_B(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_B(\mathbb{R}^n)$  aus (8.6) nennt man den Friedrichsschen<sup>2</sup> Glätter oder Mollifier.

**Lemma 8.13** Sei  $u \in C_B(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Psi_\varepsilon(u)(y) = u(y). \quad (8.7)$$

Für  $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$  gilt sogar

$$|\Psi_\varepsilon(u)(y) - \delta_y u| \leq \|u\|_{C_B^1(\mathbb{R}^n)} \varepsilon. \quad (8.8)$$

<sup>2</sup>Kurt Otto Friedrichs, (1901 Kiel – 1982 New Rochelle, New York) war ein deutsch-amerikanischer Mathematiker

**Bemerkung 8.13.1** Man kann dieses Ergebnis wie folgt lesen:  $\{\Psi_\varepsilon(\cdot)(y)\}_{\varepsilon>0}$  sind reguläre Distributionen, die die Dirac- $\delta$ -Funktion an der Stelle  $y$  approximieren, wenn  $\varepsilon \downarrow 0$ .

**Bemerkung 8.13.2** Weil (8.7) gilt, sind  $\Psi_\varepsilon(u)$  für  $\varepsilon > 0$  unendlich oft differenzierbare Funktionen, die  $u \in C_B(\mathbb{R}^n)$  punktweise approximieren. Wenn  $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$  ist diese Approximation wegen (8.8) sogar gleichmäßig.

**Beweis.** Da  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(x) dx = 1$  gilt und  $u$  stetig ist, folgt

$$\begin{aligned} |\Psi_\varepsilon(u)(y) - u(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x) (u(x) - u(y)) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\varepsilon(y-x) \sup_{z \in B_\varepsilon(y)} |u(z) - u(y)| dx \\ &= \sup_{z \in B_\varepsilon(y)} |u(z) - u(y)| \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0. \end{aligned}$$

Wenn  $u \in C_B^1(\mathbb{R}^n)$ , hat man

$$|u(z) - u(y)| \leq \|u\|_{C_B^1(\mathbb{R}^n)} |z - y|,$$

und es folgt die letzte Ungleichung. ■

## 8.4 Distributionen und Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele vorgeführt.

**Beispiel 8.14** Man könnte versuchen Distributionen als Anfangswerte zuzulassen. Wir betrachten

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (8.9)$$

und nehmen hier statt der Funktion  $u_0$  die  $\delta$ -Distribution  $\delta_y$  und setzen  $v_0 = f = 0$ . Man bekäme formell eine distributionelle Lösung  $u(\cdot, t) = \frac{1}{2}\delta_{y-ct} + \frac{1}{2}\delta_{y+ct} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  (auch in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ). Hätte man  $u_0 = \sum_i \delta_{y_i}$ , würde man durch die Linearität  $u(\cdot, t) = \frac{1}{2}\sum_i (\delta_{y_i-ct} + \delta_{y_i+ct})$  als Lösung haben. Für eine allgemeine Anfangsbedingung  $u_0(\cdot)$  kann man formell schreiben (wir tun mal so, als ob  $\delta_y$  eine Funktion wäre):

$$u_0(x) = \int_{y \in \mathbb{R}} \delta_y(x) u_0(y) dy.$$

Die Lösung wäre

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{y \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{2}\delta_{y-ct}(x) + \frac{1}{2}\delta_{y+ct}(x) \right) u_0(y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{2}\delta_y(x+ct) + \frac{1}{2}\delta_y(x-ct) \right) u_0(y) dy \\ &= \frac{1}{2}u_0(x+ct) + \frac{1}{2}u_0(x-ct). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Wenn auch dies alles mathematisch erst noch mal zwielfichtig ist, kann man leicht kontrollieren, dass das Endergebnis vernünftig ist. Für  $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$  ist (8.10) tatsächlich die klassische Lösung, die wir schon vorher sahen.

**Beispiel 8.15** Man betrachte  $f(x) = \frac{1}{2}|x|$ . Dann ist  $f'$  und  $f''$  nicht überall definiert. Definiert man  $F_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  oder  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  durch

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx,$$

dann folgt

$$\begin{aligned} F'_f(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\text{sign}(x) \varphi(x) dx, \\ F''_f(\varphi) &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Man bemerke, dass

$$f'(x) = \frac{1}{2}\text{sign}(x) \quad \text{für } x \neq 0.$$

Man zeigt diese Behauptungen durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} F'_f(\varphi) &= -F_f(\varphi') = - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}|x| \varphi'(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}x \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{2}x \varphi'(x) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left[ \frac{1}{2}x \varphi(x) \right]_{-m}^0 - \int_{-m}^0 \frac{1}{2}\varphi(x) dx \right) \\ &\quad - \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left[ \frac{1}{2}x \varphi(x) \right]_0^m - \int_0^m \frac{1}{2}\varphi(x) dx \right) \\ &= - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}\varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\text{sign}(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F_f''(\varphi) &= -F_f'(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \operatorname{sign}(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \varphi'(x) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \varphi(x) \right]_{-m}^0 - \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \varphi(x) \right]_0^m = \varphi(0) = \delta(\varphi). \end{aligned}$$

Im Sinne von Distributionen gilt also:

$$\left(\frac{1}{2}|\cdot|\right)' = \frac{1}{2}\operatorname{sign}(\cdot) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{2}\operatorname{sign}(\cdot)\right)' = \delta(\cdot).$$

**Aufgabe 8.3** Wir definieren  $F$  für geschickte Funktionen  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \ln|x| \varphi(x) dx. \quad (8.11)$$

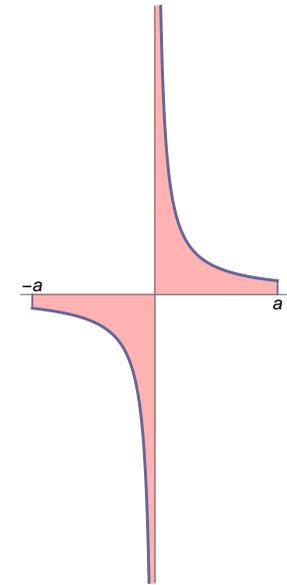
1. Zeigen Sie, dass  $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .
2. Zeigen Sie, dass  $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
3. Sei  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Welche der folgenden Behauptungen stimmt?

$$(a) \quad F'(\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx;$$

$$(b) \quad F'(\varphi) = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx;$$

$$(c) \quad F'(\varphi) = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{1}{x} \varphi(x) dx.$$

Die Funktion  $x \mapsto \frac{1}{x}$  ist in 0 nicht stetig fortsetzbar und bei 0 weder Riemann- noch Lebesgue-integrierbar. Schaut man sich auf  $[-a, a]$  die positive Oberfläche unter der Funktion rechts und die negative Oberfläche links an, könnte man bemerken, dass man das Integral über  $[-a, a]$  doch als 0 definieren könnte, weil  $\infty - \infty$  etwas sein könnte.



So naiv geht es leider nicht. Für einige Funktionen  $f$ , die stetig sind auf  $[-a, a] \setminus \{0\}$ , kann man jedoch den Cauchyschen Hauptwert<sup>3</sup> definieren durch:

$$\text{CH} \int_{-a}^a f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{-a}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^a f(x) dx \right).$$

Der Unterschied zu dem uneigentlichen Riemann-Integral ist, dass da die beiden Grenzwerte getrennt und unabhängig existieren müssen.

Die Distribution  $F_{\text{CH}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , definiert für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  durch

$$F_{\text{CH}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{1}{x} \varphi(x) dx,$$

ist wohl-definiert.

<sup>3</sup>Meistens schreibt man *V.P.* (valeur principale) oder *p.v.* (principle value) statt CH.

**Aufgabe 8.4** 1. Zeigen Sie  $F_{\text{CH}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

2. Geben Sie für  $F''(\varphi)$ , mit  $F$  aus (8.11), eine Formel mit Dirac-delta und den Cauchyschen Hauptwert.

**Beispiel 8.16** Sei  $f \in L^1_{\text{lokal}}(\mathbb{R}^n)$  mit  $n \geq 3$  definiert durch

$$f(x) = |x|^{2-n}. \quad (8.12)$$

Dann ist

$$F_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \varphi(x) dx$$

wohldefiniert für  $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  oder  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (\Delta F_f)(\varphi) &= F_f(\Delta\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \Delta\varphi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} |x|^{2-n} \Delta\varphi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{|x|=\varepsilon} (|x|^{2-n} \nabla\varphi(x) - (\nabla|x|^{2-n}) \varphi(x)) \cdot \nu d\sigma_x \right. \\ &\quad \left. + \int_{|x|>\varepsilon} (\Delta|x|^{2-n}) \varphi(x) dx \right) = (*) \end{aligned}$$

und weil  $\Delta|x|^{2-n} = 0$  für  $x \neq 0$  folgt  $(*) =$

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \varepsilon^{2-n} \mathcal{O}(\varepsilon^{n-1}) - \int_{|x|=\varepsilon} (2-n) |x|^{-n} x \varphi(x) \cdot \frac{-x}{|x|} d\sigma_x \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} (2-n) |x|^{1-n} \varphi(x) d\sigma_x \\ &= -(n-2) \omega_n \varphi(0). \end{aligned}$$

Wir nehmen  $\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma$  wie auf Seite 44. Dann gilt im Sinne von Distributionen:

$$-\Delta \left( \frac{1}{(n-2)\omega_n} |\cdot|^{2-n} \right) = \delta(\cdot). \quad (8.13)$$

Hier ist  $\delta$  das  $n$ -dimensionale Dirac-Funktional in 0:

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) \text{ für } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ oder } \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Für  $n = 2$  findet man

$$-\Delta \left( \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{1}{|\cdot|} \right) \right) = \delta(\cdot). \quad (8.14)$$

**Beispiel 8.17** Ebenso kann man zeigen, dass für  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $n \geq 3$  gilt:

$$-\Delta \left( \frac{1}{(n-2)\omega_n} |\cdot - y|^{2-n} \right) = \delta_y(\cdot). \quad (8.15)$$

Hier ist  $y$  also nur ein Parameter und (8.15) heißt

$$\int_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x - y|^{2-n} (-\Delta\varphi(x)) dx = \varphi(y)$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  oder  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Diese letzte Formel gibt uns jedoch die Möglichkeit,  $\varphi$  zurückzufinden mittels  $-\Delta\varphi$ . Also, wenn  $-\Delta u = f$  für eine gegebene Testfunktion  $f$  auch eine Testfunktion  $u$  als Lösung hat, dann gilt

$$u(y) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x - y|^{2-n} f(x) dx. \quad (8.16)$$

Man kann zeigen, dass die Formel in (8.16) nicht nur für Testfunktionen gilt. Zum Beispiel findet man für  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger durch (8.16) eine Lösung  $u$  von

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (8.17)$$

**Aufgabe 8.5** Für  $f_n(x) = |x|^{4-n}$  mit  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt in distributionellem Sinne, wenn  $n \geq 5$ , dass

$$\Delta^2 f_n = c_n \delta_0$$

Berechnen Sie  $c_n$ .

**Beispiel 8.18** Für  $y \in \mathbb{R}^2$  gilt:

$$-\Delta \left( \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{1}{|\cdot - y|} \right) \right) = \delta_y(\cdot) \quad (8.18)$$

und auch hier folgt, dass wenn  $-\Delta u = f$  für eine gegebene Testfunktion  $f$  auch eine Testfunktion  $u$  als Lösung hat, dass

$$u(y) = \int_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{1}{|x - y|} \right) f(x) dx. \quad (8.19)$$

Ebenso wie im letzten Beispiel gilt diese letzte Formel nicht nur für Testfunktionen. Für  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$  mit kompaktem Träger findet man durch (8.16) eine Lösung  $u$  von  $-\Delta u = f$  in  $\mathbb{R}^2$ . Wenn jedoch  $f \geq 0$  gilt und  $f$  nicht trivial ist, dann folgt  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = -\infty$ . Die zweite Bedingung in (8.17) ist in dem Fall nicht erfüllt.

Die Funktionen

$$x \mapsto \log \left( \frac{1}{|x|} \right) \quad \text{und} \quad x \mapsto |x|^{2-n} \quad (8.20)$$

mit  $n \geq 3$ , die Sie in den letzten Beispielen gesehen haben, kommen so oft vor, dass wir erinnern an deren Graphen in Abbildung 8.4.

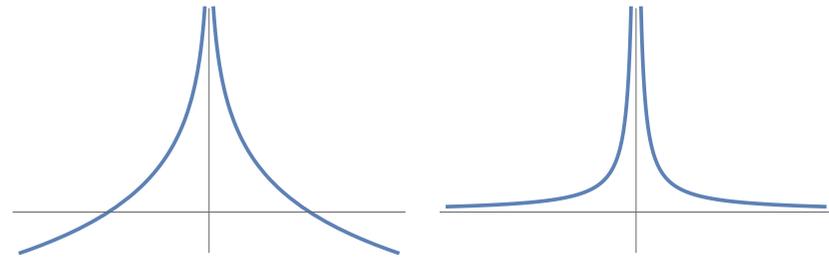


Abbildung 8.4: Skizzen zu den Funktionen in (8.20). Links die Funktion  $x \mapsto \log \left( \frac{1}{|x|} \right)$ , die negativ wird für  $|x| > 1$ , und rechts  $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ . Auch die Skizzen zu (8.20) mit  $n > 3$  sehen ähnlich aus wie der rechten Skizze.

## Die Wellengleichung in mehr Dimensionen

### 9.1 Kirchhoff für Raumdimension 3

Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung auf dem ganzen Raum  $\mathbb{R}^3$  ist

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (9.1)$$

Wir versuchen anzugeben, wie man zu einer Lösungsformel kommt. Dies ist erstmal kein Beweis, sondern ein Versuch die kreativen Schritte anzugeben. Später muss das Ergebnis dann noch bewiesen werden.

1) Man betrachte erst den radialsymmetrischen Fall:  $u(x_1, x_2, x_3, t) = U(|x|, t)$ . Weil in 3 Raumdimensionen  $\Delta u(|x|) = r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r u(r)|_{r=|x|}$  gilt, wird die Differentialgleichung wie folgt:

$$\left( \partial_t^2 - c^2 \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \right) U(r, t) = 0.$$

Setzen wir  $V(r, t) = r U(r, t)$  so folgt mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r \frac{1}{r} V(r, t) &= \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \left( \frac{1}{r} V_r(r, t) - \frac{1}{r^2} V(r, t) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r V_r(r, t) - V(r, t)) = \frac{1}{r} V_{rr}(r, t), \end{aligned}$$

dass

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_r^2) V(r, t) = 0.$$

2) Diese Gleichung ist die Wellengleichung in einer Raumdimension und die Lösungen dieser Gleichung haben die Form

$$V(r, t) = \Phi(r - ct) + \Psi(r + ct).$$

Man findet

$$U(r, t) = \frac{1}{r} \Phi(r - ct) + \frac{1}{r} \Psi(r + ct).$$

und radialsymmetrische Lösungen der Wellengleichung in 3 Raumdimensionen durch

$$u(x, t) = \frac{1}{|x|} \Phi(|x| - ct) + \frac{1}{|x|} \Psi(|x| + ct).$$

Eine Funktion  $u(x, t) = \frac{1}{|x|} \Phi(|x| - ct)$  wäre eine radialsymmetrische Welle, die sich mit Geschwindigkeit  $c$  nach außen bewegt. Die sich nach innen bewegenden Wellen geben Probleme bei  $|x| = 0$  und daher lassen wir sie außer Betracht.

3) Analog einer Raumdimension könnte man eine Distribution formal als generalisierte Lösung ansetzen:

$$u(x, t) = \frac{1}{|x|} \delta(|x| - ct) = \frac{1}{ct} \delta(|x| - ct).$$

Die letzte Gleichung folgt, weil  $|x| = ct$  gilt auf dem Träger von  $x \mapsto \delta(|x| - ct)$ . Als Distribution in  $\mathbb{R}^3$  mit  $t$  als Parameter wäre das:

$$\begin{aligned} F_{u(\cdot, t)}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{ct} \delta(|x| - ct) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{ct} \int_{|x|=ct} \varphi(x) d\sigma_x \\ &= ct \int_{|z|=1} \varphi(ctz) d\sigma_z =: ct \int_{\omega \in \mathbb{S}^2} \varphi(ct\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Für  $\omega \in \mathbb{S}^2$  schreiben wir weiter  $|\omega| = 1$ . Es gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} F_{u(\cdot, t)}(\varphi) = 0$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \partial_t F_{u(\cdot, t)}(\varphi) &= \\ \lim_{t \downarrow 0} \int_{|\omega|=1} (c \varphi(ct\omega) + c^2 t \omega \cdot \nabla \varphi(ct\omega)) d\omega &= 4\pi c \varphi(0). \end{aligned}$$

Formal scheint  $F_{u(\cdot, t)}$  das nächste Anfangswertproblem als Distribution zu erfüllen

$$\begin{cases} \partial_t^2 F_{u(\cdot, t)} - c^2 \Delta F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t > 0, \\ F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t = 0, \\ \partial_t F_{u(\cdot, t)} = 4\pi c \delta_0 & \text{für } t = 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

4) Ähnlich wäre  $u(x, t) = \frac{1}{4\pi c|x|} \delta(|x - y| - ct)$  so, dass die Distribution  $F_{u(\cdot, t)}$  eine Lösung ist von

$$\begin{cases} \partial_t^2 F_{u(\cdot, t)} - c^2 \Delta F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t > 0, \\ F_{u(\cdot, t)} = 0 & \text{für } t = 0, \\ \partial_t F_{u(\cdot, t)} = \delta_y & \text{für } t = 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Welle, die in  $y$  startet. Wie in einer Dimension kann man vermuten, dass, wenn man die Delta-Funktionen durch eine Dichte  $v_0$  ersetzt, dies eine Lösung von (9.1) wäre mit  $f = u_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi c^2 t} \delta(|x - y| - ct) v_0(y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

5) Hat man eine genügend oft differenzierbare Lösung  $u(x, t)$  von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^3, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (9.4)$$

dann erfüllt  $w(x, t) := \partial_t u(x, t)$  formal

$$w_{tt} = u_{ttt} = c^2 \Delta u_t = c^2 \Delta w$$

und

$$w(x, 0) = u_t(x, 0) = v_0(x),$$

und

$$w_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = c^2 \Delta u_{xx}(x, 0) = 0.$$

Das folgende Theorem sagt, dass diese Überlegungen tatsächlich eine Lösung zu den Anfangswerten  $u_0$  und  $v_0$  liefern.

**Theorem 9.1 (Die Formel von Kirchhoff<sup>1</sup>)** Sei  $f = 0$ ,  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$  und  $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Dann hat (9.1) eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ , nämlich

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y + \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \quad (9.5)$$

**Aufgabe 9.1** Begründen Sie, dass  $\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} 1 d\sigma_y = t$ .

**Bemerkung 9.1.1** Betrachtet man wiederum das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet wie auch in einer Dimension, dann bekommt man zwei Kegelränder, die schematisch (die Bodenplatte soll  $\mathbb{R}^3$  darstellen) in Abbildung 9.1 dargestellt sind.

**Bemerkung 9.1.2** Die Formel in (9.5) kann man auch wie folgt schreiben:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} (tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x)) d\sigma_y$$

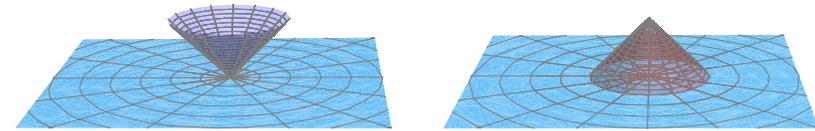


Abbildung 9.1: Einfluss- und Abhängigkeitsgebiet in 3 Dimensionen. Nach oben die Zeit; in blau das dreidimensionale(!)  $\mathbb{R}^3$  für  $t = 0$ . Nur der Rand des Kegels zählt.

**Beweis, dass die Anfangsbedingungen durch (9.5) erfüllt sind.** Weil  $v_0$  stetig differenzierbar und  $u_0$  zweimal stetig differenzierbar ist, folgt für die erste Randwertbedingung:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x + ct\omega) d\omega = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left( \frac{t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u_0(x + ct\omega) d\omega \right) \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} (u_0(x + ct\omega) + ct\omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega)) d\omega \\ &= u_0(x). \end{aligned}$$

Für die zweite Randwertbedingung finden wir

$$\lim_{t \downarrow 0} \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \right) = v_0(x)$$

<sup>1</sup>Gustav Robert Kirchhoff, Königsberg 1824 – Berlin 1887.

und

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \downarrow 0} \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \left( 2c\omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega) \right. \\
&\quad \left. + ct \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \partial_{x_i} \partial_{x_j} u_0(x + ct\omega) \right) d\omega \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{2c}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla u_0(x + ct\omega) d\omega \\
&= \frac{2c}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \omega \cdot \nabla u_0(x) d\omega = 0.
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir benutzt, dass für  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$\int_{|\omega|=1} \omega \cdot \vec{v} d\omega = 0.$$

Also sind die Anfangsbedingungen erfüllt.  $\blacksquare$

Bevor wir zeigen können, dass die Differentialgleichung erfüllt ist, brauchen wir das folgende Lemma:

**Lemma 9.2** Sei  $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$  mit  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$  und  $n > 2$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy \\
&= u(0) - \frac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y \\
&\quad - \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y.
\end{aligned}$$

**Bemerkung 9.2.1** Für  $n = 3$  folgt

$$\begin{aligned}
& \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{4\pi |y|} dy \\
&= u(0) - \frac{1}{4\pi R} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y - \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y.
\end{aligned}$$

**Beweis.** Man braucht Gauß,

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} (v \nabla u - \nabla v u) d\sigma_x + \int_{\Omega} (\Delta v) u dx,$$

die Tatsache, dass  $y \mapsto |y|^{2-n}$  harmonisch außerhalb 0 ist,

$$\begin{aligned}
\Delta |y|^{2-n} &= \nabla \cdot \nabla |y|^{2-n} = \nabla \cdot ((2-n)|y|^{-n} y) \\
&= (2-n)(-n|y|^{-n-2} y \cdot y + n|y|^{-n}) = 0
\end{aligned}$$

und, dass  $y \mapsto |y|^{2-n}$  integrierbar ist bei 0:

$$\begin{aligned}
& \int_{|y|<R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < R} \frac{-\Delta u(y)}{|y|^{n-2}} dy \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \left( \int_{|y|=R} - \int_{|y|=\varepsilon} \right) \right. \\
&\quad \left. (-|y|^{2-n} \nabla u(y) + u(y) \nabla |y|^{2-n}) \cdot \nu d\sigma_y \right. \\
&\quad \left. + \int_{\varepsilon < |y| < R} -(\Delta |y|^{2-n}) u(y) dy \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{|y|=R} - \int_{|y|=\varepsilon} \right) \\
&\quad \left( -|y|^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (2-n) |y|^{-n} y \cdot \frac{y}{|y|} \right) d\sigma_y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{|y|=R} (-R^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (2-n) R^{1-n}) d\sigma_y \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|y|=\varepsilon} (\varepsilon^{2-n} \nabla u(y) \cdot \nu + u(y) (n-2) \varepsilon^{1-n}) d\sigma_y \\
&= \frac{-1}{R^{n-2}} \int_{|y|=R} \nabla u(y) \cdot \nu d\sigma_y - \frac{n-2}{R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{O}(\varepsilon) + (n-2) \omega_n u(0).
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt ist verwendet worden, dass der Flächeninhalt von  $\partial B_\varepsilon(0)$  gleich  $\omega_n \varepsilon^{n-1}$  ist. ■

### Fortsetzung des Beweises von Theorem 9.1 .

Wir zeigen nun, dass die Differentialgleichung erfüllt ist und fangen an mit dem Teil, der zu  $v_0$  gehört:

$$\begin{aligned}
c^2 \Delta_x \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y &= \Delta_x \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} v_0(x + ct\omega) d\omega \\
&= \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} \Delta_x v_0(x + ct\omega) d\omega = \frac{c^2 t}{4\pi} \int_{|\omega|=1} (\Delta v_0)(x + ct\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi t} \int_{|z|=ct} \Delta v_0(x + z) d\sigma_z = \int_{|z|=ct} \frac{c}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) d\sigma_z \\
&= \partial_t \int_{r=0}^{ct} \int_{|z|=r} \frac{1}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) dr d\sigma_z \\
&= \partial_t \int_{|z|<ct} \frac{1}{4\pi |z|} \Delta v_0(x + z) dz = (*).
\end{aligned}$$

Durch Verwendung des Lemmas folgt

$$\begin{aligned}
(*) &= \partial_t \left( -v_0(x) + \frac{1}{4\pi c t} \int_{|z|=ct} \nabla v_0(x+z) \cdot \nu d\sigma_z \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|z|=ct} v_0(x+z) d\sigma_z \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \partial_t \left( \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|} \nabla v_0(x+z) \cdot \nu d\sigma_z \right. \\
&\quad \left. + \int_{|z|=ct} \frac{1}{|z|^2} v_0(x+z) d\sigma_z \right) = (**).
\end{aligned}$$

Es folgt weiter mit  $\nu = \frac{z}{|z|} = \omega$  und ' $d\sigma_z = |z|^2 d\omega$ ', dass

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{1}{4\pi} \partial_t \left( \int_{|\omega|=1} \left( r \nabla v_0(x+r\omega) \cdot \omega + v_0(x+r\omega) \right) d\omega \right)_{r=ct} \\
&= \frac{1}{4\pi} \partial_t \left( \int_{|\omega|=1} \partial_r \left( r v_0(x+r\omega) \right) d\omega \right)_{r=ct} \\
&= \frac{1}{4\pi c} \partial_t^2 \int_{r=0}^{ct} \left( \int_{|\omega|=1} \partial_r \left( r v_0(x+r\omega) \right) d\omega \right) dr = (***) ,
\end{aligned}$$

wiederum wegen des Hauptsatzes der Integralrechnung. Die Fortsetzung liefert durch Vertauschung der Integrale,

$$\begin{aligned}
(***) &= \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^{ct} \partial_r \left( r v_0(x+r\omega) \right) dr d\omega \right) \\
&= \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c} \int_{|\omega|=1} \left[ r v_0(x+r\omega) \right]_{r=0}^{ct} d\omega \right) \\
&= \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c} \int_{|\omega|=1} ct v_0(x+ct\omega) d\omega \right) \\
&= \partial_t^2 \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y \right)
\end{aligned}$$

und es folgt, dass dieser Teil die Differentialgleichung erfüllt. Für den zweiten Teil können wir uns nun kurz fassen:

$$\begin{aligned} & c^2 \Delta_x \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \\ &= \partial_t c^2 \Delta_x \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \\ &= \partial_t^2 \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right), \end{aligned}$$

und der Beweis ist komplett. ■

Auch hier kann man für  $f$  das Prinzip von Duhamel verwenden. Da dieses Prinzip in jeder Dimension gilt, betrachten wir gleich die allgemeine Version.

## 9.2 Ergebnisse für beliebige Dimensionen

**Proposition 9.3 (Prinzip von Duhamel)** Sei  $u_0 = v_0 = 0$  und  $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  und sei die Funktion  $(x, t) \mapsto U(x, t; s)$  mit

$$U \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0 \leq s \leq t < \infty])$$

für jedes  $s \geq 0$  eine Lösung von

$$\begin{cases} U_{tt}(x, t; s) - c^2 \Delta U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > s, \\ U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t = s, \\ U_t(x, t; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t = s, \end{cases} \quad (9.6)$$

dann ist

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds. \quad (9.7)$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9.8)$$

**Beweis.** Ähnlich wie in einer Dimension zeigt man:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \int_0^t U(x, t; s) ds &= \partial_t \left( U(x, t; s)_{s=t} + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds \right) \\ &= 0 + \partial_t \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds \\ &= (\partial_t U(x, t; s))_{s=t} + \int_0^t \partial_t^2 U(x, t; s) ds \\ &= f(x, s) + \int_0^t c^2 \Delta U(x, t; s) ds \\ &= f(x, s) + c^2 \Delta \int_0^t U(x, t; s) ds \end{aligned}$$

und dies ist genau die Gleichung, die  $u$  aus (9.7) erfüllen sollte. Die Anfangsbedingungen kontrolliert man direkt. ■

Die Ableitung der Kirchhoffschen Formel mag rätselhaft erscheinen. Wenn man hinterher zeigen kann, dass das Ergebnis stimmt, soll uns das eigentlich keine Sorgen bereiten. Trotzdem ist es vernünftig, dieser Ableitung etwas Beachtung zu geben. Die Idee dahinter kann man wie folgt verstehen. Der  $\Delta$ -Differentialoperator ist drehungsinvariant:

$$\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R \text{ für beliebige Drehungen } R,$$

denn sei  $M$  eine orthogonale Matrix, so findet man  $MM^T = I$  und

$$\begin{aligned} \Delta(u(Mx)) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1}^n M_{ji} M_{ki} (\partial_k \partial_j u)(Mx) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n M_{ji} M_{ki} \right) (\partial_k \partial_j u)(Mx) \\ &= \sum_{j,k=1}^n (MM^T)_{jk} (\partial_k \partial_j u)(Mx) \\ &= \sum_{k=1}^n (\partial_k^2 u)(Mx) = (\Delta u)(Mx). \end{aligned}$$

Weil wir eine lineare Differentialgleichung betrachten, kann man auch eine Summe, oder sogar ein Integral von solchen Drehungen betrachten, wenn man bei der rechten Seite die gleiche Summe oder Integral der rechten Seiten und ähnlich auch die passenden Anfangswerte nimmt.

**Proposition 9.4 (Euler - Poisson - Darboux<sup>2</sup>)**

Wenn  $(t, x) \mapsto u(t, x)$  eine Lösung ist in  $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > 0, \\ u(x, t) = g(x) \text{ und } u_t(x, t) = h(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (9.9)$$

<sup>2</sup> • Leonhard Euler, Basel 1707 – St. Petersburg 1783.  
 • Siméon Denis Poisson, 1781 – 1840, hat sich nie weit von Paris entfernt. Die folgende Aussage wird ihm zugeschrieben: *La vie n'est bonne qu'à deux choses: à faire des mathématiques et à les professer.* Siehe Seite 115 für ein Bild.  
 • Jean Gaston Darboux, Nîmes 1842 – Paris 1917.

dann ist

$$U(r, t) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} u(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \quad (9.10)$$

mit

$$G(r) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} g(y) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y}, \quad H(r) := \frac{\int_{\partial B_r(x)} h(y) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} \quad (9.11)$$

eine Lösung in  $C^2((0, \infty) \times [0, \infty))$  von

$$\begin{cases} U_{tt}(r, t) - c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) = 0 \text{ für } r, t > 0, \\ U(r, t) = G(r) \text{ und } U_t(r, t) = H(r) \text{ für } r > 0, \end{cases} \quad (9.12)$$

mit

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} U(r, t) &= u(x, t), \quad \lim_{r \downarrow 0} U_r(r, t) = 0 \\ \lim_{r \downarrow 0} U_{rr}(r, t) &= \frac{1}{n} \Delta u(x, t). \end{aligned}$$

**Bemerkung 9.4.1** Die Differentialgleichung in (9.12) nennt man die Euler-Poisson-Darboux Gleichung.

**Beweis.** Man hat

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\partial B_r(x)} u(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} &= \frac{\int_{|\omega|=1} u(x + r\omega, t) r^{n-1} d\omega}{\int_{|\omega|=1} r^{n-1} d\omega} \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} u(x + r\omega, t) d\omega \end{aligned}$$

und so folgt mit Gauß

$$\begin{aligned}\partial_r U(r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|\omega|=1} \nabla u(x + r\omega, t) \cdot \omega d\omega \\ &= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_{|z|=r} \nabla u(x + z, t) \cdot \nu d\sigma_z \\ &= \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int_{|z|<r} \Delta u(x + z, t) dz.\end{aligned}\quad (9.13)$$

Aus (9.13) folgt

$$\partial_r U(r, t) = \frac{r \int_{|z|<r} \Delta u(x + z, t) dz}{n \int_{|z|<r} 1 dz}$$

und anschließend  $\lim_{r \downarrow 0} U_r(r, t) = 0$  und  $\lim_{r \downarrow 0} U_{rr}(r, t) = \frac{1}{n} \Delta u(x, t)$ . Weiter folgt aus (9.13), dass

$$\begin{aligned}c^2 \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) &= \partial_r \left( \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|<r} u_{tt}(x + z, t) dz \right) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=r} u_{tt}(x + z, t) d\sigma_z \\ &= r^{n-1} \frac{\int_{\partial B_r(x)} u_{tt}(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(x)} 1 d\sigma_y} = r^{n-1} U_{tt}(r, t).\end{aligned}$$

Die Anfangsbedingungen für  $U$  zeigt man direkt. ■

Diese letzte Proposition liefert uns auch die Eindeutigkeit der Lösung in Raumdimension 3.

**Theorem 9.5** *Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung in (9.1) hat höchstens eine Lösung in  $C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ .*

**Beweis.** Wenn (9.1) zwei Lösungen hat, sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann löst  $w = u_1 - u_2$  das Randwertproblem mit  $f = u_0 = v_0 = 0$ . Nehmen wir an, es gibt  $w(\tilde{x}, \tilde{t}) \neq 0$ . Ohne Verlust der Allgemeinheit nehmen wir  $\tilde{x} = 0$ . Weil  $\Delta$  invariant unter orthogonalen Abbildungen ist, folgt für

$$U(r, t) = \frac{\int_{\partial B_r(0)} w(y, t) d\sigma_y}{\int_{\partial B_r(0)} 1 d\sigma_y},$$

dass  $U_{tt} - c^2 r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r U = 0$ . Setzen wir

$$V(r, t) = rU(r, t)$$

so folgt

$$\begin{aligned}r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r U &= r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r r^{-1} V \\ &= r^{-2} \partial_r (-V + r \partial_r V) = r^{-1} \partial_r^2 V\end{aligned}$$

und weiter, dass  $V(r, t)$  eine Lösung der Wellengleichung in einer Dimension ist mit  $V(r, 0) = V_t(r, 0) = 0$  für  $r > 0$  und  $V(0, t) = 0$ . Diese Lösung ist eindeutig und daher gilt  $V(r, t) = 0$  für alle  $r, t > 0$  und auch  $U(r, t) = 0$  für alle  $r, t > 0$ . Dann findet man

$$w(0, \tilde{t}) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} w(r\omega, \tilde{t}) d\omega = \lim_{r \downarrow 0} U(r, \tilde{t}) = 0,$$

und dies ist ein Widerspruch. ■

### 9.3 Poisson für Raumdimension 2

Rechts finden Sie ein Bild von Siméon Denis Poisson.



Eine Lösungsformel wie die von Kirchhoff lässt sich in 2 Dimensionen nicht direkt herleiten. Wenn man die Formel in drei Dimensionen verwendet für Funktionen, die in einer Richtung konstant sind, bekommt man eine Formel für das zweidimensionale Problem. Anders gesagt, statt

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^2 \text{ und } t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ und } u_t(x, 0) = v_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (9.14)$$

betrachten wir das ähnliche Problem in  $\mathbb{R}^3$  mit  $\tilde{u}_0(x_1, x_2, x_3) = u_0(x_1, x_2)$  und  $\tilde{v}_0(x_1, x_2, x_3) = v_0(x_1, x_2)$ . Die Kirchhoffsche Formel gibt uns eine Lösung  $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ , nämlich

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = & \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\substack{|y-x|=ct \\ y \in \mathbb{R}^3}} \tilde{v}_0(y) d\sigma_y \\ & + \partial_t \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\substack{|y-x|=ct \\ y \in \mathbb{R}^3}} \tilde{u}_0(y) d\sigma_y \right). \end{aligned}$$

Weil  $\tilde{u}_0$  und  $\tilde{v}_0$  jedoch nicht von  $x_3$  abhängen, und die Lösung  $\tilde{u}$  eindeutig ist, hängt auch  $\tilde{u}$  nicht von  $x_3$  ab. Denn wenn  $\tilde{u}$

von  $x_3$  abhängen würde, wären

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \tilde{u}(x_1, x_2, x_3) \text{ und} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + 1) \end{aligned}$$

zwei verschiedene Lösungen. Es folgt außerdem, dass

$$\begin{aligned} & \int_{|y-x|=ct, y \in \mathbb{R}^3} \tilde{u}_0(y_1, y_2, y_3) d\sigma_y \\ &= \int_{|y-(x_1, x_2, 0)|=ct, y \in \mathbb{R}^3} \tilde{u}_0(y_1, y_2, y_3) d\sigma_y \\ &= 2 \int_{|z| \leq ct, z \in \mathbb{R}^2} u_0(x+z) \sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2} dz. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Hier beschreibt  $w$  die dritte Koordinate  $y_3$  auf der Sphäre  $\{y \in \mathbb{R}^3; |y - (x_1, x_2, 0)| = ct\}$  als Funktion von  $(z_1, z_2)$ , das heißt

$$(y_1, y_2, y_3) = \gamma(z_1, z_2) := (x_1 + z_1, x_1 + z_2, w(z_1, z_2))$$

mit  $w(z_1, z_2) = \pm \sqrt{c^2 t^2 - z_1^2 - z_2^2}$ .

Die 2 in (9.15) folgt, weil man zwei Hälften hat, die obere und die untere Sphäre. Der Faktor  $\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2}$  folgt aus der Parametrisierung  $\gamma$  durch

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z_2} \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_1} & \frac{\partial w}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_2} \\ \frac{\partial w}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_1} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_2} \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2}. \end{aligned}$$

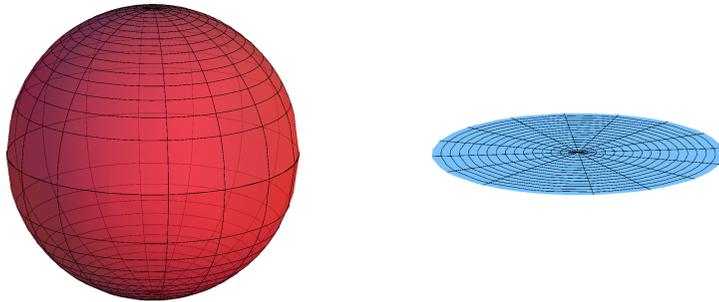


Abbildung 9.2: Statt über die Sphäre  $\partial B_{ct}(x_1, x_2, 0)$  in  $\mathbb{R}^3$  integriert man über eine Scheibe  $B_{ct}(x_1, x_2)$  in  $\mathbb{R}^2$ .

Mit

$$\sqrt{1 + |\nabla w(z)|^2} = \sqrt{1 + \frac{|z|^2}{c^2 t^2 - |z|^2}} = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - |z|^2}}$$

findet man:

**Theorem 9.6 (Die Formel von Poisson)** Sei  $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$  und  $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Die Lösung von (9.14) ist für  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $t > 0$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| < ct} \frac{v_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy + \partial_t \left( \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| < ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right). \quad (9.16)$$

**Bemerkung 9.6.1** Betrachtet man wiederum das Einflussgebiet und das Abhängigkeitsgebiet wie auch in einer Dimension, dann bekommt man in Dimension 2 zwei gefüllte Kegel, die in Abbildung 9.3 dargestellt sind.

**Bemerkung 9.6.2** Wenn man auch für eine rechte Seite  $f(x, t)$  lösen möchte, kann man wiederum das Prinzip von Duhamel verwenden.

**Bemerkung 9.6.3** Diese Idee, mit der Dimension abzustiegen, wird Hadamard zugeschrieben.

**Aufgabe 9.2** 1. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2\pi c} \int_{|x-y| < ct} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

2. Können Sie das Ergebnis erklären mit Hilfe der Differentialgleichung?

**Lemma 9.7** Man kann die Formel in (9.16) wie folgt umschreiben:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{tv_0(y) + u_0(y) + \nabla u_0(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy.$$

**Aufgabe 9.3** Sei  $u_0 \geq 0$ . Gibt es  $v_0$  und  $T$  derart, dass für die Lösung in (9.16) gilt

$$u(x, t) = 0 \text{ für alle } t > T?$$

**Beweis.** Wir brauchen nur die zweite Hälfte von (9.16) zu betrachten und benutzen da die Substitution  $y = x + ctr\omega$  mit  $r \in (0, 1)$  und  $\omega \in \mathbb{R}^2$  mit  $|\omega| = 1$ . Für  $n = 2$  gilt

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

und symbolisch  $d\omega := d\varphi$ . So finden wir mit der Jacobi-Determinante, dass

$$dy_1 dy_2 = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(ctr \cos \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(ctr \cos \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(ctr \sin \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(ctr \sin \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \right| dr d\omega = c^2 t^2 r dr d\omega.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \partial_t \left( \frac{1}{2\pi c} \int_{|y-x| \leq ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy \right) \\ &= \partial_t \left( \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^1 \frac{t u_0(x + ctr\omega)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\omega|=1} \int_{r=0}^1 \frac{u_0(x + ctr\omega) + t cr\omega \cdot \nabla u_0(x + ctr\omega)}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y-x| < ct} \frac{u_0(y) + (y-x) \cdot \nabla u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy, \end{aligned}$$

die Formel im Lemma. ■

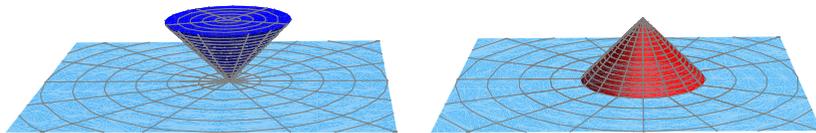


Abbildung 9.3: Einfluss- und Abhängigkeitsgebiet in 2 Dimensionen; die Zeit nach oben und in blau  $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Im Gegensatz zu 3 Dimensionen sind die Kegel nun gefüllt.

Die Eindeutigkeit der Lösung in zwei Raumdimensionen folgt aus der Eindeutigkeit in drei Raumdimensionen.

## 9.4 Raumdimensionen 4 und höher

Wir betrachten erst die ungeraden Raumdimensionen. Wenn wir da Existenz, Eindeutigkeit oder sogar eine explizite Formel für eine Lösung gefunden haben, können wir mit dem Absteigetricke von Hadamard auch die geraden Raumdimensionen angehen.

Wir definieren für eine Funktion  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  die (9.9) erfüllt, wie in (9.10) die Funktion  $(r, t) \mapsto U(r, t)$ . Ähnlich werden auch  $G$  und  $H$  wie in (9.11) definiert.

**Lemma 9.8** Sei  $n \geq 3$  ungerade. Wenn  $(r, t) \mapsto U(r, t)$  eine  $\frac{1}{2}(n+1)$ -mal differenzierbare Lösung ist von

$$\begin{cases} U_{tt}(r, t) - c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t) = 0 \text{ für } r, t > 0, \\ U(r, t) = G(r), \quad U_t(r, t) = H(r) \text{ für } r > 0, \end{cases} \quad (9.17)$$

dann ist  $(r, t) \mapsto \tilde{U}(r, t)$ , definiert durch

$$\tilde{U}(r, t) = (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t))$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt}(r, t) - c^2 \partial_r^2 \tilde{U}(r, t) = 0 \text{ für } r, t > 0, \\ \tilde{U}(r, t) = \tilde{G}(r), \quad \tilde{U}_t(r, t) = \tilde{H}(r) \text{ für } r > 0, \end{cases} \quad (9.18)$$

bei der  $\tilde{G}$  und  $\tilde{H}$  wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(r) &= (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} G(r)), \\ \tilde{H}(r) &= (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} H(r)). \end{aligned}$$

**Beweis.** Schreibe  $k = \frac{1}{2}(n-3)$ . Man kann zeigen, dass

$$\partial_r^2 (r^{-1} \partial_r)^k r^{2k+1} f(r) = (r^{-1} \partial_r)^{k+1} r^{2k+2} \partial_r f(r).$$

Für  $f(r) = r^\alpha$  folgt, dass die Gleichung stimmt, denn links und rechts steht dann folgendes:

$$\alpha(2k+1+\alpha)(2k-1+\alpha)\dots(3+\alpha)(1+\alpha)r^{\alpha-1},$$

und so gilt es für Polynome, die dicht in  $C^m[a, b]$  liegen.

Damit findet man

$$\begin{aligned} c^2 \partial_r^2 \tilde{U}(r, t) &= c^2 \partial_r^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t)) \\ &= c^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{-1} \partial_r) r^{n-1} \partial_r U(r, t) \\ &= (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} r^{n-2} (c^2 r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r, t)) \\ &= \partial_t^2 (r^{-1} \partial_r)^{\frac{n-3}{2}} (r^{n-2} U(r, t)) = \partial_t^2 \tilde{U}(r, t). \end{aligned}$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen kontrolliert man sofort. ■

Man kann nun wieder raten, wie die Lösungsformel in ungeraden Dimensionen sein wird für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (9.19)$$

Verwendet man den Absteigetricke von Hadamard, dann findet man auch eine Formel für gerade Raumdimensionen.

Die Eindeutigkeit einer solchen Lösung kann man mit Hilfe von Lemma 9.8 wie in Theorem 9.5 beweisen.

Nur für die Vollständigkeit geben wir im nächsten Theorem die expliziten Formeln.

**Theorem 9.9** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $f = 0$ ,  $u_0 \in C^{m+2}(\mathbb{R}^n)$  und  $v_0 \in C^{m+1}(\mathbb{R})$ .

- Wenn  $n$  ungerade ist, hat (9.19) die folgende Lösung:

$$u(x, t) = C_n \left( (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-3}{2}} \frac{1}{c^{n-1} t} \int_{|y-x|=ct} v_0(y) d\sigma_y + \partial_t (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-3}{2}} \left( \frac{1}{c^{n-1} t} \int_{|y-x|=ct} u_0(y) d\sigma_y \right) \right).$$

$$\text{Es gilt } C_n = \frac{1}{\omega_n(n-2)(n-4)\dots 3 \cdot 1}.$$

- Wenn  $n$  gerade ist, hat (9.19) die folgende Lösung:

$$u(x, t) = D_n \left( (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{c^{n-1}} \int_{|y-x|<ct} \frac{v_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} d\sigma_y + \partial_t (t^{-1} \partial_t)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{c^{n-1}} \left( \int_{|y-x|<ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} d\sigma_y \right) \right).$$

$$\text{Es gilt } D_n = \frac{1}{\omega_n n(n-2)(n-4)\dots 4 \cdot 2}.$$

$$\text{Wie vorher: } \omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma.$$

Die Beweise dieser Formeln sind ähnlich wie die für die Formeln von Kirchhoff (9.5) und Poisson (9.16).

## 9.5 Gebiete mit Rand

Eine natürliche Frage ist, was passiert, wenn man die Wellengleichung nicht auf ganz  $\mathbb{R}^n$  sondern nur auf ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  lösen möchte. Man kann zeigen, dass das folgende Anfangs/Randwertproblem sinnvoll ist im Sinne von Hadamard:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } t > 0 \text{ und } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (9.20)$$

Nur in einigen einfachen Fällen, wie zum Beispiel beim Halbraum  $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ , kann man eine explizite Formel für die Lösung herleiten. Für allgemeinere Gebiete gibt es kaum derartige explizite Formeln und wir müssen andere mathematische Werkzeuge anwenden. Aber auch ohne solche Formeln kann man die Fragen von Hadamard zu einem solchen Problem angehen und für (9.20) Existenz, Eindeutigkeit und Robustheit zeigen.

**Theorem 9.10** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ . Dann hat (9.20) höchstens eine Lösung in  $C^2(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ .

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen gäbe, sagen wir  $u_1$  und  $u_2$ , dann wäre  $u = u_1 - u_2$  eine Lösung von (9.20) mit  $f = u_0 = v_0 = \varphi = 0$ . Betrachte die Funktion

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t(x, t)^2 + c^2 |\nabla u(x, t)|^2) dx.$$

Man nennt diese Funktion die Energie. Es gilt, wenn wir den zweiten Term partiell integrieren, dass

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} (u_t(x, t) u_{tt}(x, t) + c^2 \nabla u(x, t) \cdot \nabla u_t(x, t)) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u(x, t) u_t(x, t) d\sigma_x \\ &\quad + \int_{\Omega} u_t(x, t) (u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t)) dx = 0. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt verwenden wir, dass

$$u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = 0$$

und dass aus  $u(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$  folgt  $u_t = 0$  auf  $\partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ . Also gilt

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t(x, 0)^2 + c^2 |\nabla u(x, 0)|^2) dx = 0.$$

Hier verwendet man  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ . Weil in  $E(t)$  die Summe zweier Quadrate ist, folgt  $u_t(x, t) = 0 = \nabla u(x, t)$  für alle  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ . Wenn alle Ableitungen 0 sind, ist die Funktion konstant. Weil  $u$  am Rand 0 ist, gilt  $u = 0$  auf  $\Omega \times \mathbb{R}^+$ . Es gibt also nur eine Lösung. ■

**Aufgabe 9.4** Wir betrachten stehende Wellen für die Einheitskugeln in  $\mathbb{R}^n$ , das heißt Lösungen von

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } |x| < 1 \text{ und } t > 0, \\ u(x, t) = 0 & \text{für } |x| = 1 \text{ und } t > 0, \end{cases}$$

der Form

$$u(x, t) = U(x) \cos(\lambda t).$$

Die Lösungen mit dem kleinsten  $\lambda$  sind radialsymmetrisch.

1. Für  $n = 1$  findet man

$$U(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ und } \lambda = \frac{\pi}{2}.$$

Zeigen Sie, dass man so eine stehende Welle findet.

2. Für  $n = 3$  findet man

$$U(x) = \frac{\sin(\pi|x|)}{|x|} \text{ und } \lambda = \pi.$$

Zeigen Sie, dass man so eine stehende Welle findet.

3. Welche Differentialgleichung für  $U$  finden Sie für  $n = 2$ ?  
Können Sie diese lösen?

## Die Wärmeleitungsgleichung I

Eine typische Frage bei der parabolischen Differentialgleichung  $(\partial_t - \Delta)u = 0$  betrifft die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases} \quad (10.1)$$

Der Wert  $u(t, x)$  stellt die Temperatur an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$  dar bei durch  $u_0$  gegebenen Anfangswerten. Wenn  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , braucht man keine Randwerte. Wenn es einen Rand  $\partial\Omega$  gibt, kann man aus physikalischen Gründen vermuten, dass ein solcher Rand die Lösung mitbestimmt. Es wäre möglich den Fall zu betrachten, dass der Rand isoliert ist und dies würde bedeuten, dass keine Wärme herausfließt:  $\partial_\nu u(x, t) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ . Statt eines isolierten Randes könnte man am Rand die Temperatur festlegen:  $u(x, t) = \varphi(x, t)$  für  $x \in \partial\Omega$ . Im Gegensatz zu der Wellengleichung werden wir bei der Wärmeleitungsgleichung sehen, dass dieser Einfluss vom Randverhalten sich mit unendlicher Geschwindigkeit im Gebiet verbreitet. Physikalisch widerspricht es der Annahme, dass sich nichts schneller als die Lichtgeschwindigkeit verbreiten kann.

### 10.1 Diffusionskern

Die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension 1

$$(\partial_t - \partial_x^2)u(x, t) = 0 \quad (10.2)$$

hat die folgende Skalierungseigenschaft. Wenn  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  eine Lösung ist, dann ist  $(x, t) \mapsto u(cx, c^2t)$  für jede  $c \in \mathbb{R}^+$  auch eine Lösung. Wenn wir nun eine Lösung suchen, die für jedes  $c \in \mathbb{R}^+$  die gleiche Funktion liefert, dann findet man für  $c = t^{-1/2}$ , dass  $u(cx, c^2t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$ . Versuchen wir dies und betrachten eine Lösung in der Form

$$(x, t) \mapsto u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Dann hätte man eine Funktion, die nur von einer Variablen abhängt, nämlich  $\xi := \frac{x}{\sqrt{t}}$ . Setzt man

$$v(\xi) = u(\xi, 1)$$

so folgt für  $v$  die folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= (\partial_t - \partial_x^2) v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{-x}{2t\sqrt{t}} - v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \frac{1}{t} = \\ &= -\frac{1}{t} \left(\frac{1}{2}\xi v'(\xi) + v''(\xi)\right). \end{aligned}$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann man lösen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\xi v'(\xi) + v''(\xi) &= 0, \\ \frac{v''(\xi)}{v'(\xi)} &= -\frac{1}{2}\xi \quad (\text{oder } v'(\xi) = 0), \\ \ln|v'(\xi)| &= -\frac{1}{4}\xi^2 + c_1, \\ v'(\xi) &= c_2 e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \end{aligned}$$

und man findet

$$u(x, t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = c_2 \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi + c_3.$$

Wenn wir  $c_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$  und  $c_3 = 0$  setzen<sup>1</sup> folgt

$$U(x) := \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

<sup>1</sup>Die Standardrechnung mit Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi &= 2\sqrt{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4}x^2} e^{-\frac{1}{4}y^2} dx dy} \\ &= 2\sqrt{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{1}{4}r^2} dr d\varphi} = \sqrt{4\pi}. \end{aligned}$$

Im Sinne von Distributionen gilt  $\partial_x U = \delta$  und mit einer Verschiebung

$$\partial_x U(\cdot - y) = \delta_y.$$

Dies läßt uns vermuten, dass man eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (10.3)$$

bekommen könnte durch

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \partial_x \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \right) dy.$$

**Aufgabe 10.1** Wir setzen

$$U(x, t; y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi.$$

1. Zeigen Sie, dass  $(x, t) \rightarrow U(x, t; y)$  eine Lösung ist von

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0 & \text{für } x < y, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 1 & \text{für } x > y. \end{cases}$$

2. Seien  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$  und  $c_i \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $(x, t) \rightarrow \sum_{i=1}^n c_i U(x, t; y_i)$  eine Lösung ist von

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0 & \text{für } x < y_1, \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = \sum_{k=1}^i c_k & \text{für } x \in (y_i, y_{i+1}), \\ \lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = \sum_{k=1}^n c_k & \text{für } x > y_n. \end{cases}$$

Es gilt

$$\partial_x \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi \right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

und das folgende Theorem:

**Theorem 10.1** Wenn  $u_0 \in C_b(\mathbb{R})$  (stetig und beschränkt), dann ist  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0. \quad (10.4)$$

Außerdem folgt:

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (10.3),
- $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ,
- $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)} = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ ,
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und
- für  $u$ , fortgesetzt durch  $u_0$  für  $t = 0$ , gilt

$$u \in C_b(\mathbb{R} \times [0, \infty)).$$

**Bemerkung 10.1.1** Die Funktion  $p(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$  nennt man die Fundamentallösung oder der Diffusionskern für die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension 1. Eine Skizze findet man in Abbildung 10.1.

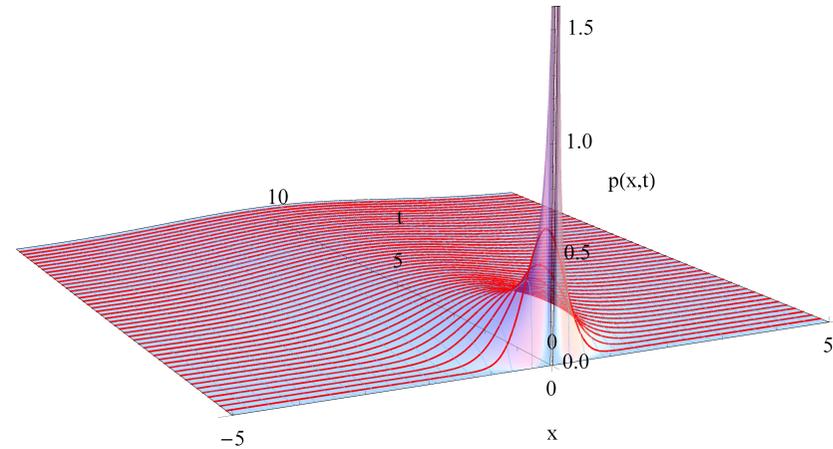


Abbildung 10.1: Eine Skizze des Diffusionskerns

**Bemerkung 10.1.2** Es gibt zwei wesentliche Unterschiede zu der Wellengleichung.

1. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung hat eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.
2. Auch wenn  $u_0$  nur stetig ist, ist  $u(\cdot, t)$  für  $t > 0$  in (10.4) unendlich oft differenzierbar. Bei der Wellengleichung auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  ist der Lösungsteil von  $u(\cdot, t)$ , der von  $u_0$  abhängt, genauso oft differenzierbar wie  $u_0$ .

**Beweis.** Die Abschätzung nach oben im dritten Punkt folgt aus

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \|u_0\|_\infty dy = \|u_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit jeder Ordnung folgt für  $t > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$  aus den Eigenschaften von  $\exp(-\frac{1}{4}(x-y)^2/t)$  und aus dem Satz zu dominierter Konvergenz<sup>2</sup>. Man kann also die Folge von Differenzieren und Integrieren vertauschen und findet  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .

Die Differentialgleichung folgt aus

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_x^2) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy \\ = \int_{\mathbb{R}} (\partial_t - \partial_x^2) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = 0 \text{ für } t > 0. \end{aligned}$$

Für  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  bemerkt man, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x - \xi\sqrt{t}) d\xi.$$

Aus der dominierten Konvergenz, der Stetigkeit von  $u_0$  und

<sup>2</sup>Der Satz zu dominierter Konvergenz besagt, dass wenn

1.  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine positive Funktion ist mit  $\int_I g(x) dx < \infty$ ,
2. die Funktionen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  derart sind, dass  $|f_n(x)| \leq g(x)$  für  $x \in I$ , und
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  konvergiert für fast alle  $x \in I$ ,

dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi = 1$  folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x - \xi\sqrt{t}) d\xi \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \downarrow 0} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x - \xi\sqrt{t}) d\xi \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} u_0(x) d\xi = u_0(x). \end{aligned}$$

Es gilt also  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und diese Konvergenz ist gleichmäßig auf beschränkten Intervallen und sogar gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ , wenn  $u_0$  gleichmäßig stetig ist. Weil

$$|u(x, t) - u_0(y)| \leq |u(x, t) - u_0(x)| + |u_0(x) - u_0(y)|$$

folgt wiederum mit der lokal gleichmäßigen Stetigkeit von  $u_0$ , dass

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (y,0) \\ t > 0}} u(x, t) = u_0(y)$$

und so auch die Stetigkeit der Erweiterung von  $u(\cdot, t)$  bei  $t = 0$  mit  $u_0$ . ■

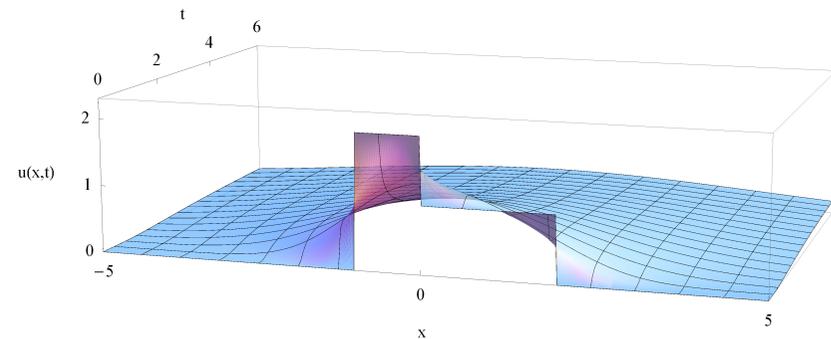


Abbildung 10.2: Darstellung der Funktion aus Beispiel 10.2.

**Beispiel 10.2** Man bekommt eine Lösung

$$u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0, \infty) \setminus \{(-1, 0), (0, 0), (2, 0)\})$$

von (10.3) mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\infty, -1), \\ 2 & \text{für } x \in [-1, 0), \\ 1 & \text{für } x \in [0, 2), \\ 0 & \text{für } x \in [2, \infty), \end{cases}$$

durch

$$u(x, t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x-2}{2\sqrt{t}}\right)$$

mit

$$\operatorname{erf}(\xi) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2} ds.$$

Obwohl diese Funktion nicht-stetige Anfangswerte hat, ist sie für  $t > 0$  sogar unendlich oft differenzierbar. Eine Skizze zu dieser Funktion findet man in Abbildung 10.3.

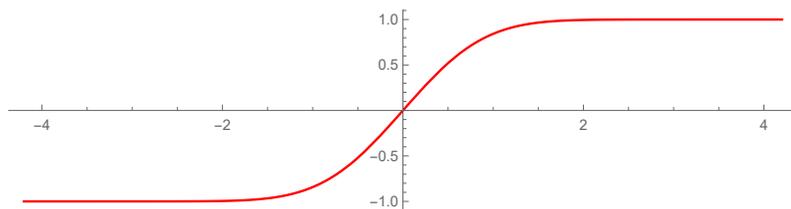


Abbildung 10.3: Skizze zu  $x \mapsto \operatorname{erf}(x)$

**Aufgabe 10.2** Wir betrachten

$$u(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $u$  eine Lösung ist

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0.$$

2. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0 \text{ für } x \neq 0.$$

3. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} u(\cdot, t) = \delta \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Eigentlich steht links  $F_{u(\cdot, t)}$  statt  $u(\cdot, t)$  wie in (8.3).

## 10.2 Das Anfangswertproblem in mehr Dimensionen

Für die Wärmeleitungsgleichung in mehr Dimensionen

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (10.5)$$

hat man:

**Theorem 10.3** Wenn  $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$  (stetig und beschränkt), dann ist  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy \quad \text{für } t > 0. \quad (10.6)$$

Außerdem folgt:

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (10.5);
- $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ ;
- $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)} = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ ,
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = u_0(x)$  und
- für  $u$ , fortgesetzt durch  $u_0$  für  $t = 0$ , gilt

$$u \in C_b(\mathbb{R}^n \times [0, \infty)).$$

**Bemerkung 10.3.1** Die Funktion  $p$ , definiert durch

$$p_n(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \quad (10.7)$$

nennt man die Fundamentallösung oder Diffusionskern für die Wärmeleitungsgleichung in Raumdimension  $n$ .

**Beweis.** Wir zeigen, dass  $(x, t) \mapsto (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}$  für  $t > 0$  die Differentialgleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \partial_t \left( t^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) &= t^{-n/2-1} \left( -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}|x|^2 t^{-1} \right) e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}, \\ \Delta \left( t^{-n/2} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) &= \nabla \cdot \left( -\frac{1}{2}x t^{-n/2-1} e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t} \right) \\ &= t^{-n/2-1} \left( -\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}x \cdot x t^{-1} \right) e^{-\frac{1}{4}|x|^2/t}. \end{aligned}$$

Der Rest des Beweises ist ähnlich wie in einer Dimension. ■

**Aufgabe 10.3** Sei  $n = 2$ . Geben Sie eine Lösung von (10.5) an für

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x_1, x_2 < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

## 10.3 Wärmeleitungsgleichung mit rechter Seite

Wir betrachten anschließend die Wärmeleitungsgleichung mit einer Wärmequelle  $f$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (10.8)$$

Dazu nehmen wir die Lösungen  $U(\cdot, \cdot; s)$  von

$$\begin{cases} \partial_t U(x, t; s) - \Delta U(x, t; s) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t > s, \\ U(x, s; s) = f(x, s) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (10.9)$$

Man bekommt eine Lösung von (10.9) durch eine Zeitverschiebung in (10.6):

$$U(x, t; s) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy. \quad (10.10)$$

Ähnlich wie für die Wellengleichung hat man:

**Theorem 10.4 (Duhamel)** Sei  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Für die Funktion  $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t; s) ds, \quad (10.11)$$

mit  $U$  wie in (10.10), gilt

- $u$  erfüllt die Differentialgleichung in (10.8);
- $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0$ ;
- $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ .

**Beweis.** Weil  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  findet man  $U(\cdot, \cdot; s) \in$

$C_b^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty))$  und es folgt<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^t U(x, t; s) ds &= U(x, t; s)|_{s=t} + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds \\ &= f(x, t) + \int_0^t \partial_t U(x, t; s) ds. \end{aligned}$$

Man bekommt

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) \int_0^t U(x, t; s) ds \\ = U(x, t; s)|_{s=t} + \int_0^t (\partial_t - \Delta) U(x, t; s) ds = f(x, t) \end{aligned}$$

und aus der Beschränktheit von  $f$ , die zur Beschränktheit von  $U$  führt, dass

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_0^t U(x, t; s) ds = 0.$$

Die letzte Aussage folgt aus  $U(\cdot, \cdot; s) \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [s, \infty))$ . ■

Kombiniert man (10.6), (10.10) und (10.11), so folgt:

<sup>3</sup>Sei  $v \in C^1(\{(s, t); 0 \leq s \leq t < \infty\})$ . Dann gilt für die rechte Ableitung von  $\int_0^t v(s, t) ds$ , dass:

$$\begin{aligned} \partial_t^+ \left( \int_0^t v(s, t) ds \right) &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \frac{\int_0^{t+h} v(s, t+h) ds - \int_0^t v(s, t) ds}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(s, t+h) ds + \int_0^t \frac{v(s, t+h) - v(s, t)}{h} ds \right) = \\ &= v(t, t) + \int_0^t \partial_t^+ v(s, t) ds. \end{aligned}$$

Ähnliches gilt auch für die linke Ableitung.

**Korollar 10.5** Sei  $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ . Dann ist die Funktion

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)}{(4\pi t)^{n/2}} u_0(y) dy + \int_{s=0}^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right)}{(4\pi(t-s))^{n/2}} f(y, s) dy ds$$

eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

## 10.4 Mittelwert und Maximum

Für harmonische Funktionen ist in Proposition 4.4 gezeigt, dass im Zentrum einer Kugel der Mittelwert über der Kugeloberfläche angenommen wird. Ein Ergebnis ähnlicher Art gilt für die Wärmeleitungsgleichung. Weil  $t$  und  $x$  sich nicht gleich verhalten, ist das Ergebnis komplizierter.

**Definition 10.6** Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $r, t > 0$ . Wir definieren die „Wärmeleitungskugeln“  $W(x, t; r) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  durch

$$W(x, t; r) := \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; s < t \text{ und } (4\pi(t-s))^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} < r^n \right\}. \quad (10.12)$$

**Bemerkung 10.6.1** Sei  $p_n$  der Diffusionskern. Dann gilt:

$$(4\pi(t-s))^{n/2} e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} < r^n \Leftrightarrow p_n(x-y, t-s) > r^{-n}.$$

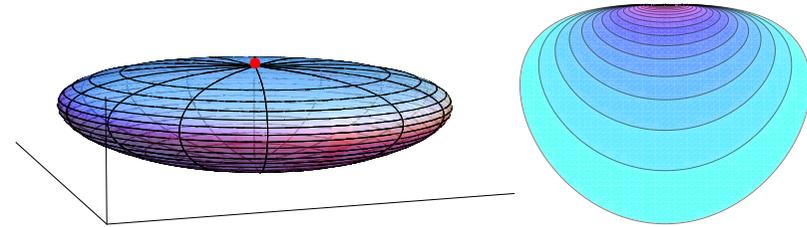


Abbildung 10.4: Links eine Wärmeleitungskugel  $W(x, t, r)$  in  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  mit dem Punkt  $(x, t)$  in rot. Rechts mehrere solcher Kugeln in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  bei festen  $x, t$  und verschiedene  $r$ .

**Bemerkung 10.6.2** Einige Eigenschaften von  $W(x, t; r)$ . In der Beschreibung nimmt man die  $x$ -Richtungen horizontal und  $t > 0$  zeigt nach oben.

- $\partial W(x, t; r) \in C^\infty$  für  $r > 0$ . Eine Wärmeleitungskugel ist ein konvexes Gebiet, bei dem  $(x, t)$  der höchste Punkt ist. Anders gesagt,  $(x, t)$  liegt in der Mitte oben auf  $W(x, t; r)$ .
- Für  $(y, s) \in W(x, t; r)$  gilt

$$t - \frac{1}{4\pi} r^2 < s < t \text{ und } |x - y| < c_n r$$

mit  $c_n = \left(\frac{n}{2\pi e}\right)^{n/2}$ . Das letztere folgt aus

$$\begin{aligned} |x - y|^n &= \\ \frac{1}{\pi^{n/2}} \left( \left( \frac{|x - y|^2}{4(t - s)} \right)^{n/2} e^{-\frac{|x - y|^2}{4(t - s)}} \right) (4\pi(t - s))^{n/2} e^{\frac{|x - y|^2}{4(t - s)}} \\ &\leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \left( \sup_{\alpha > 0} \alpha^{n/2} e^{-\alpha} \right) r^n = \left( \frac{n}{2\pi e} \right)^{n/2} r^n. \end{aligned}$$

• Weiter gilt

$$(y, s) \in W(x, t; c) \Leftrightarrow (ry, r^2s) \in W(rx, r^2t; rc).$$

**Lemma 10.7** Sei  $W(0, 0, r)$  wie in (10.12). Es gilt

$$\frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,r)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds = 1.$$

**Beweis.** Der Ausdruck hängt nicht von  $r$  ab, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,r)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds &= \frac{1}{r^n} \iint_{W(0,0,1)} \frac{|ry|^2}{4(r^2s)^2} r^n dy r^2 ds \\ &= \iint_{W(0,0,1)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds. \end{aligned}$$

Wir substituieren  $\sigma = -s$  und  $y = 2\sqrt{\sigma}z$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} &\iint_{W(0,0;1)} \frac{|y|^2}{4s^2} dy ds \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} \int_{\sigma=0}^{\frac{1}{4\pi} e^{-2|z|^2/n}} \frac{4\sigma |z|^2}{4\sigma^2} (2\sqrt{\sigma})^n d\sigma dz \\ &= \int_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{2^{n+1}}{n} \left[ \sigma^{\frac{1}{2}n} \right]_0^{\frac{1}{4\pi} e^{-2|z|^2/n}} |z|^2 dz \\ &= \frac{2\omega_n}{\pi^{n/2}n} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} r^{n+1} dr \\ &= \frac{\omega_n}{\pi^{n/2}n} \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} t^{n/2} dt = \frac{\omega_n}{\pi^{n/2}n} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt  $\omega_n$  der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  gilt nämlich  $\omega_n = n\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)$ . ■

**Theorem 10.8 (Mittelwerteigenschaft für die Wärmeleitungsgleichung)** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$  ein Gebiet. Wenn die Funktion  $u \in C^2(U)$  die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \text{ auf } U \tag{10.13}$$

erfüllt, dann gilt

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x,t;r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds$$

für jede Wärmeleitungskugel  $W(x, t; r)$  mit  $\overline{W(x, t; r)} \subset U$ .

## 10.5 Beweis von Theorem 10.8

**Beweis.** Ohne Verlust der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $x = 0$  und  $t = 0$ . Wir betrachten

$$\phi(r) = \frac{1}{4r^n} \iint_{W(0,0;r)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \frac{1}{4r^n} \iint_{W(0,0;1)} u(ry, r^2s) \frac{|ry|^2}{(r^2s)^2} r^{n+2} dy ds = \frac{1}{4} \iint_{W(0,0;1)} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{4} \iint_{W(0,0;1)} \left( y \cdot (\nabla u)(ry, r^2s) + 2rs (\partial_t u)(ry, r^2s) \right) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y,s) + \frac{|y|^2}{2s} (\partial_t u)(y,s) \right) dy ds = (*) \end{aligned}$$

Schreiben wir mit  $s < 0$

$$\psi(y, s; r) = \log(r^n p_n(y, -s)) = n \log r - \frac{n}{2} \log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s},$$

so folgt

$$\nabla \psi(y, s; r) = \frac{y}{2s} \quad \text{und} \quad \partial_s \psi(y, s; r) = -\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}. \quad (10.14)$$

Bemerkung 10.6.1 besagt, dass

$$\psi(y, s; r) = 0 \text{ auf } \partial W(0,0;r) \text{ und } \psi(y, s; r) > 0 \text{ in } W(0,0;r).$$

Wir finden, wenn wir (10.14)-links verwenden und nach  $y$ , nach  $s$  und wieder nach  $y$  partiell integrieren, dass

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y,s) + y \cdot \nabla \psi(y,s;r) \partial_s u(y,s) \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( \frac{|y|^2}{4s^2} y \cdot \nabla u(y,s) - \psi(y,s;r) (n \partial_s u(y,s) + y \cdot \nabla \partial_s u(y,s)) \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( \left( \frac{|y|^2}{4s^2} + \partial_s \psi(y,s;r) \right) y \cdot \nabla u(y,s) - n \psi(y,s;r) \partial_s u(y,s) \right) dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( -\frac{n}{2s} y \cdot \nabla u(y,s) - n \psi(y,s;r) \partial_s u(y,s) \right) dy ds = (**). \end{aligned}$$

Wenn wir die Differentialgleichung verwenden folgt

$$\begin{aligned}
 (**) &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} \left( -\frac{n}{2s} y \cdot \nabla u(y,s) - n \psi(y,s;r) \Delta u(y,s) \right) dy ds = \\
 &= \frac{-n}{r^{n+1}} \iint_{W(0,0;r)} (\nabla \psi(y,s;r) \cdot \nabla u(y,s) + \psi(y,s;r) \Delta u(y,s)) dy ds = \frac{-n}{r^{n+1}} \iint_{\partial W(0,0;r)} \psi(y,s;r) \nabla u(y,s) \cdot \nu_{y,s} d\sigma_{y,s} = 0.
 \end{aligned}$$

Hier ist  $\nu_{y,s}$  der auswärtige Normalenvektor auf  $W(0,0;r)$ . Also gilt

$$\phi(r) = \lim_{\rho \downarrow 0} \phi(\rho) = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{1}{4\rho^n} \iint_{W(0,0;\rho)} u(y,s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = u(0,0)$$

wegen der Stetigkeit von  $u$ . ■

**Bemerkung 10.8.1** Wenn man statt (10.13) die inhomogene Gleichung

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \text{ auf } U \tag{10.15}$$

anschaut mit  $f(x,t) \geq 0$  auf  $U$ , dann folgt im Beweis oben bei (\*\*) eine Ungleichung und via  $\phi'(r) \leq 0$  schließlich

$$u(x,t) \geq \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x,t;r)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} dy ds.$$

**Aufgabe 10.4** Beweisen Sie diese letzte Bemerkung im Detail.

## 10.6 Maximumprinzip und Eindeutigkeit

Für harmonische Funktionen folgt aus Korollar 4.5, dass eine harmonische Funktion ihr Maximum nur auf dem Rand annehmen kann. Auch für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung gilt ein ähnliches Ergebnis.

**Definition 10.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Man definiert den parabolischen Rand von  $\Omega \times (0, T)$  durch

$$\partial_P(\Omega \times (0, T)) = (\bar{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]).$$

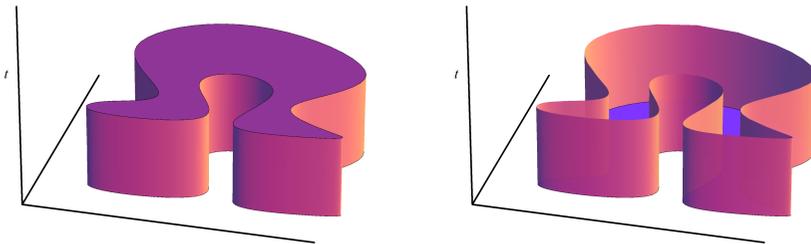


Abbildung 10.5:  $\Omega \times (0, T)$  und sein parabolischer Rand  $\partial_P(\Omega \times (0, T))$

**Theorem 10.10 (Das starke Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung auf beschränkten Gebieten)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und zusammenhängend. Sei  $u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ auf } \Omega \times (0, T). \quad (10.16)$$

Dann gilt:

1. Das Maximum wird auf dem parabolischen Rand angenommen:

$$\begin{aligned} \max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\} \\ = \max \{u(x, t); (x, t) \in \partial_P(\Omega \times (0, T))\}. \end{aligned}$$

2. Wenn das Maximum in  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$  angenommen wird, also

$$u(x_0, t_0) = \max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\},$$

dann ist  $u$  konstant auf  $\bar{\Omega} \times [0, t_0]$ .

**Bemerkung 10.10.1** Wenn  $u$  eine Lösung von (10.16) ist, dann löst auch  $-u$  diese Gleichung. Das bedeutet, dass man in Theorem 10.10 statt Maximum auch Minimum lesen kann.

**Bemerkung 10.10.2** Betrachtet man die inhomogene Version von (10.16), also

$$\partial_t u - \Delta u = f \text{ auf } \Omega \times (0, T). \quad (10.17)$$

und die Funktion  $f$  hat ein Vorzeichen, dann folgt:

- Wenn  $f \geq 0$ , dann nimmt  $u$  sein Minimum an auf dem parabolischen Rand.
- Wenn  $f \leq 0$ , dann nimmt  $u$  sein Maximum an auf dem parabolischen Rand.

Für einen Beweis verwendet man Bemerkung 10.8.1.

**Bemerkung 10.10.3** *Im Fall, dass  $f$  eine strikte Ungleichung erfüllt, kann man das Ergebnis sehr leicht bekommen. Nehme an, dass  $u$  in  $(x^*, t^*) \in \Omega \times (0, T)$  ein Maximum hat und dass  $f(x^*, t^*) < 0$  gilt. Weil es ein inneres Maximum ist, folgt  $u_t(x^*, t^*) = 0$  und  $-u_{x_i x_i}(x^*, t^*) \geq 0$ . Dann findet man, dass*

$$0 > f(x^*, t^*) = \partial_t u(x^*, t^*) - \Delta u(x^*, t^*) \geq 0$$

und dies ist ein Widerspruch. Wenn für  $x^* \in \Omega$  und  $t^* = T$  das Maximum angenommen wird, so folgt  $u_t(x^*, t^*) \geq 0$  und  $-u_{x_i x_i}(x^*, t^*) \geq 0$  für alle  $i$ , ebenfalls ein Widerspruch.

**Beweis.** Wir setzen  $M = \max \{u(x, t); (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]\}$  und nehmen an, dass es  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T]$  gibt, mit  $u(x_0, t_0) = M$ .

Dann gilt für jede Wärmeleitungskugel  $W(x_0, t_0; r) \subset \bar{\Omega} \times [0, T]$ , dass

$$\begin{aligned} M = u(x_0, t_0) &= \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x_0, t_0; r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds \\ &\leq \frac{1}{4r^n} \iint_{W(x_0, t_0; r)} M \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds = M. \end{aligned}$$

Gleichheit tritt hier nur auf, wenn  $u(y, s) = M$  für alle  $(y, s) \in W(x_0, t_0; r)$ . Wir können  $r$  so groß nehmen, dass  $\partial_P(\Omega \times (0, T))$  von  $W(x_0, t_0; r)$  berührt wird. In dieser Berührungsstelle  $(\tilde{x}, \tilde{t})$  gilt  $u(\tilde{x}, \tilde{t}) = M$  und die erste Aussage ist bewiesen.

Für die zweite Behauptung nehmen wir an, dass es  $(x_*, t_*) \in \bar{\Omega} \times [0, t_0]$  gibt mit  $u(x_*, t_*) < M$ . Sei  $x(\cdot) : [t_*, t_0] \rightarrow \Omega$  eine Kurve, die  $x_*$  mit  $x_0$  verbindet. Dann verbindet  $t \mapsto (x(t), t)$  den Punkt  $(x_*, t_*)$  mit  $(x_0, t_0)$  und bei wachsendem  $t$ . Setze

$$t_1 = \sup \{t \in [t_*, t_0]; u(x(t), t) < M\}. \quad (10.18)$$

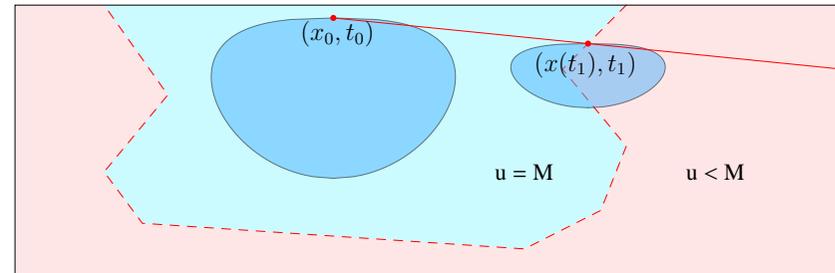


Abbildung 10.6: Die Verwendung von Wärmeleitungskugeln für den Widerspruch beim Beweis des Maximumprinzips

Es gibt  $W(x(t_1), t_1; r) \subset \bar{\Omega} \times [0, T]$  mit  $r > 0$  und  $\varepsilon > 0$  derart, dass  $(x(t), t) \in W(x(t_1), t_1; r)$  für  $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1)$ . Weil  $u(x(t_1), t_1) = M$  gilt, folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass  $u(x, t) = M$  auf  $W(x(t_1), t_1; r)$  und dies ist ein Widerspruch zu (10.18). ■

**Korollar 10.11 (Eindeutigkeit auf beschränkten Gebieten)**

Sei  $\Omega$  ein offenes und beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $T > 0$ . Das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases}$$

hat höchstens eine Lösung

$$u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T]).$$

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  gibt, wendet man Theorem 10.10 an auf  $w = u_1 - u_2$  und auf  $-w$  für jede Zusammenhangskomponente von  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ . ■

**Aufgabe 10.5** Meistens betrachte man die Wärmeleitungsgleichung auf einem festen Gebiet  $\Omega$ . In bestimmten Fällen, zum Beispiel, wenn  $\Omega$  ein Eisklumpen im Wasser ist, dann kann das Gebiet von der Zeit abhängen. In den Formulierungen haben wir dies nicht zugelassen um die Notation nicht zu überlasten. Wir betrachten einen solchen Fall.

Sei

$$\Omega(t) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + (t-1)^2 < 5\}$$

und

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{für } x \in \Omega(t) \text{ und } 0 < t < 3, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{für } |x| \leq 2. \end{cases}$$

Beschreiben Sie, an welchen Stellen eine stetige Lösung  $u(x,t)$  ihr Maximum annehmen kann, und begründen Sie Ihre Antwort.

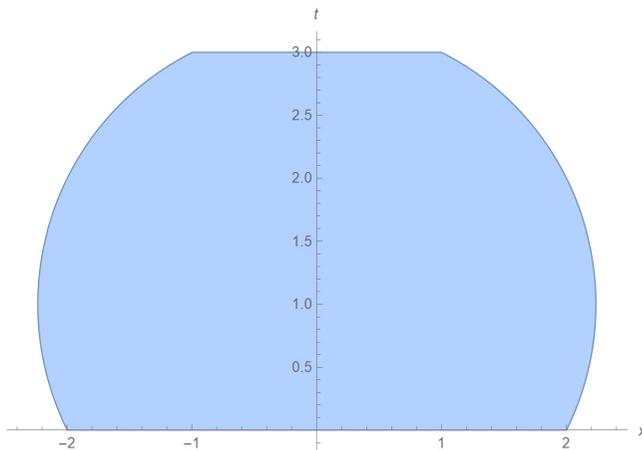


Abbildung 10.7: Das  $t$ -abhängige Gebiet aus Aufgabe 10.5

## Die Wärmeleitungsgleichung II

### 11.1 Eindeutigkeit unter einer Wachstumsbedingung

**Theorem 11.1 (Ein starkes Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$  unter einer Wachstumsbedingung)** Sei  $T > 0$  und sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times (0, T),$$

die die folgende Bedingung erfüllt:

- Es gibt  $C$  &  $A$  in  $\mathbb{R}^+$  derart, dass für alle  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$  gilt:  $u(x, t) \leq C e^{A|x|^2}$ .

Wenn  $M := \sup \{u(x, 0); x \in \mathbb{R}^n\} \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$\sup \{u(x, t); (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]\} = M. \quad (11.1)$$

**Beweis.** Nehme an, dass es  $(y, t_1) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$  gibt mit

$$u(y, t_1) > M = \sup \{u(x, 0); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wir fangen an mit dem Fall, dass  $t_1$  so klein ist, dass  $4At_1 < 1$ . Dann gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $4A(t_1 + \varepsilon) < 1$ . Man definiere für  $\delta > 0$  die Funktion

$$v_\delta(x, t) = u(x, t) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{|x - y|^2}{4(t_1 + \varepsilon - t)}\right)$$

und man nehme  $\delta$  so klein, dass

$$v_\delta(y, t_1) = u(y, t_1) - \frac{\delta}{\varepsilon^{n/2}} > M.$$

Es gilt  $(\partial_t - \Delta)v_\delta(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, t_1 + \varepsilon)$ . Nehme  $\Omega_r = B_r(y)$ .

Wir haben

$$v_\delta(x, 0) \leq u(x, 0) \leq M \text{ für } x \in \Omega_r,$$

und für  $(x, t) \in \partial\Omega_r \times (0, t_1)$  gilt

$$v_\delta(x, t) = u(x, t) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(t_1 + \varepsilon - t)}\right)$$

$$\begin{aligned} &\leq C \exp(A|x|^2) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon - t)^{n/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(t_1 + \varepsilon - t)}\right) \\ &\leq C \exp(A(|y| + r)^2) - \frac{\delta}{(t_1 + \varepsilon)^{n/2}} \exp\left(\frac{1}{4(t_1 + \varepsilon)} r^2\right). \end{aligned}$$

Weil  $A < \frac{1}{4(t_1 + \varepsilon)}$ , folgt  $v_\delta(x, t) \rightarrow -\infty$  für  $(x, t) \in \partial B_r(y) \times (0, t_1)$ , wenn  $r \rightarrow \infty$ . Wir können dann  $r$  derart groß nehmen, dass

$$v_\delta(x, t) \leq M \text{ für } x \in \partial\Omega_r.$$

Mit Theorem 10.10 gilt

$$\begin{aligned} M &< \sup \{v_\delta(x, t); (x, t) \in \Omega_r \times (0, t_1)\} = \\ &\sup \{v_\delta(x, t); (x, t) \in \partial_P(\Omega_r \times (0, t_1))\} \leq M, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Wenn die Annahme  $4At_1 < 1$  nicht erfüllt ist, teilt man das Intervall  $(0, t_1)$  auf in kleinere Intervalle und zeigt das Maximumprinzip nacheinander auf  $(0, \frac{1}{n}t_1)$ ,  $(\frac{1}{n}t_1, \frac{2}{n}t_1)$ , und so weiter. ■

**Aufgabe 11.1** Betrachte die Funktion

$$u(x, t) := \frac{x}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1. Zeigen Sie, dass  $u_t - u_{xx} = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $t > 0$ .
2. Zeigen Sie, dass  $\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Erfüllt diese Funktion die Bedingung in Theorem 11.1?

**Korollar 11.2 (Eindeutigkeit auf  $\mathbb{R}^n$  bei einer Wachstumsbedingung)** Sei  $T > 0$ . Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (11.2)$$

mit der folgenden Wachstumsbedingung:

- Es gibt  $C$  &  $A$  derart, dass für  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ :

$$|u(x, t)| \leq C e^{A|x|^2}. \quad (11.3)$$

Dann gilt, dass höchstens eine Funktion

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$$

existiert, die sowohl (11.2) als auch (11.3) erfüllt.

**Beweis.** Man wende Theorem 11.1 an auf die Differenz zweier Lösungen. ■

## 11.2 Eindeutigkeit mit Hilfe der Energiefunktion

Die Eindeutigkeit für das Anfangs-Randwertproblem lässt sich bei beschränkten Gebieten  $\Omega$  mit  $\partial\Omega \in C^1$  einfacher zeigen. Wenn  $u_1$  und  $u_2$  Lösungen in  $C^2(\bar{\Omega} \times (0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$  sind von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (11.4)$$

definiert man für  $w = u_1 - u_2$  die *Energiefunktion*  $E$  durch

$$E(t) = \int_{\Omega} w(x, t)^2 dx. \quad (11.5)$$

**Lemma 11.3** Sei  $\Omega$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$  und  $E$  wie oben. Dann gilt  $E'(t) \leq 0$ .

**Korollar 11.4** Sei  $\Omega$  beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^1$  und sei  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ . Dann hat (11.4) mit  $u(x, 0) = u_0(x)$  höchstens eine Lösung in  $C^2(\bar{\Omega} \times (0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ .

**Beweis.** Man findet, dass

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{\Omega} 2w(x, t) \partial_t w(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega} 2w(x, t) \Delta w(x, t) dx \\ &= 2 \int_{\partial\Omega} w(x, t) \frac{\partial}{\partial n} w(x, t) dx - 2 \int_{\Omega} |\nabla w(x, t)|^2 dx \\ &= -2 \int_{\Omega} |\nabla w(x, t)|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Wir haben die Differentialgleichung und partielle Integration verwendet, und außerdem dass  $w(x, t) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ . Das Lemma ist so bewiesen.

Für das Korollar bemerkt man, dass aus der Definition folgt, dass  $E(t) \geq 0$ . Also wenn  $E(0) = 0$  gilt, dann folgt, dass  $E(t) = 0$  für alle  $t \geq 0$ . Weil  $w(x, 0) = 0$ , hat man  $E(0) = 0$  und so findet man

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0.$$

Wenn  $E(t) = 0$  folgt  $w(x, t) = 0$  und die Eindeutigkeit. ■

Diese Energiefunktion  $E$  können wir auch verwenden, um Eindeutigkeit der Anfangswerte zu zeigen. Dieses Problem ist wesentlich anders, denn eine Lösung rückwärts zu finden, ist im Allgemeinen nicht möglich. Wir bekommen hier also keine Existenz, sondern nur Eindeutigkeit.

**Theorem 11.5 (Klassische Lösungen sind auch rückwärts eindeutig)** Wir betrachten (11.4) mit  $f$  und  $\varphi$  gegeben und  $u_0$  unbekannt. Das Gebiet  $\Omega$  sei beschränkt und  $\partial\Omega \in C^1$ . Wenn  $u_1, u_2 \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$  Lösungen von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \varphi(x, t) & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (11.6)$$

sind (ohne  $u_0$  vorzuschreiben!) und

$$u_1(x, T) = u_2(x, T) \text{ für } x \in \bar{\Omega},$$

dann gilt  $u_1 = u_2$  auf  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ .

**Beweis.** Wir betrachten  $E(t)$  aus (11.5). Es gilt

$$\begin{aligned} E''(t) &= -4 \int_{\Omega} \nabla w(x, t) \cdot \nabla \partial_t w(x, t) dx = \\ &= 4 \int_{\Omega} \Delta w(x, t) \partial_t w(x, t) dx = 4 \int_{\Omega} |\Delta w(x, t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Wir haben hier verwendet, dass  $w(x, t) = 0$  auf  $\partial\Omega \times [0, T]$  und daher auch  $\partial_t w(x, t) = 0$  auf  $\partial\Omega \times [0, T]$ . Mit

Cauchy<sup>1</sup>-Schwarz<sup>2</sup> gilt dann, dass

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2 \int_{\Omega} w(x, t) \Delta w(x, t) dx \\ &\leq 2 \left( \int_{\Omega} w(x, t)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \Delta w(x, t)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

anders gesagt, dass

$$E'(t)^2 \leq E(t)E''(t).$$

Wegen unserer Annahme gilt  $E(T) = 0$ . Wenn  $E(t) = 0$  auf  $[0, T]$  wären wir fertig. Nehmen wir also an, es gibt ein Intervall  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  mit  $E(t) > 0$  für  $t \in [t_1, t_2)$  und  $E(t_2) = 0$ . Weil  $E(t) > 0$  auf diesem Intervall gilt, ist  $\log(E(t))$  wohldefiniert. Es folgt, dass

$$\left( \frac{d}{dt} \right)^2 \log(E(t)) = \frac{d}{dt} \left( \frac{E'(t)}{E(t)} \right) = \frac{E''(t)E(t) - E'(t)^2}{E(t)^2} \geq 0.$$

Dann ist  $t \mapsto \log(E(t))$  convex auf  $[t_1, t_2)$  und für  $t \in [t_1, t_2)$  gilt

$$\begin{aligned} \log(E((1-s)t_1 + st)) &\leq \\ &(1-s) \log(E(t_1)) + s \log(E(t)) \quad \text{für } s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Anders geschrieben wird dies

$$E((1-s)t_1 + st) \leq E(t_1)^{1-s} E(t)^s \quad \text{für } s \in [0, 1],$$

<sup>1</sup>Augustin-Louis Cauchy, Paris 1789 – Sceaux 1857

<sup>2</sup>Karl Hermann Amandus Schwarz, Hermsdorf 1843 – Berlin 1921

und weil  $E$  stetig ist, folgt

$$E((1-s)t_1 + st) \leq E(t_1)^{1-s} E(t)^s = 0 \quad \text{für } s \in (0, 1].$$

So findet man  $E(t) = 0$  für  $t \in (t_1, t_2]$  und das widerspricht der Annahme. ■

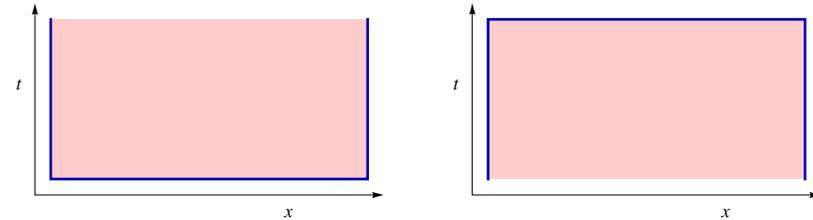


Abbildung 11.1: Schematische Darstellung vorgeschriebener Randwerte bei der Wärmeleitungsgleichung. Obwohl die Eindeutigkeit für beide Fälle gilt, heißt das noch nicht, dass beide Randwertprobleme wohldefiniert sind im Sinne von Hadamard. Mit Anfangswert  $u(x, 0) = u_0(x)$  und  $u_0 \in C(\bar{\Omega})$  kann man Existenz und Robustheit zeigen. Für  $u(x, T) = u_1(x)$  und  $u_1 \in C(\bar{\Omega})$  gilt dies nicht.

### Aufgabe 11.2 Wir betrachten

$$(\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t \in (0, T).$$

Zeigen Sie, dass wenn  $u_1, u_2 \in C_b^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  Lösungen sind mit für irgendein  $M > 0$  und für alle  $t \in [0, T]$ :

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \|\nabla^2 u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq M,$$

und  $u_1(\cdot, T) = u_2(\cdot, T)$ , dann gilt

$$u_1(\cdot, t) = u_2(\cdot, t) \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

### 11.3 Regularität

Wir haben gesehen, dass die Lösung der Wärmeleitungsgleichung in  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  (mit  $f = 0$ ) unendlich oft differenzierbar ist, sogar wenn  $x \mapsto u(x, 0)$  nur stetig ist. Dies gilt auch für die Wärmeleitungsgleichung in  $\Omega \times (0, T)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Obwohl wir keine explizite Lösung zur Verfügung haben und sogar noch nicht einmal die Existenz einer Lösung gezeigt haben, können wir doch diese Regularität zeigen.

**Theorem 11.6** Sei  $u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$  eine Lösung von (11.4) mit  $f(x, t) = 0$ . Dann gilt

$$u \in C^\infty(\Omega \times (0, T)).$$

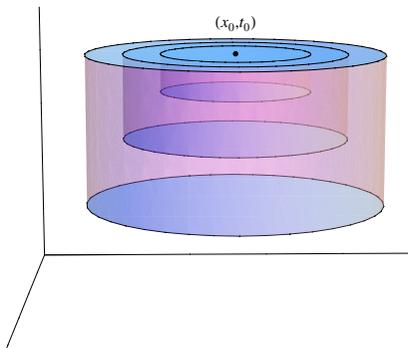


Abbildung 11.2: Die Zylinder  $Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3$  aus dem Beweis zu Theorem 11.6.

**Beweis.** Sei  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$ . Wir definieren die Zylinder

$$Z(x_0, t_0, r) = \{(x, t); |x - x_0| < r \text{ und } t_0 - r^2 < t < t_0\}$$

und betrachten

$$Z_1 = Z(x_0, t_0, r_0), \quad Z_2 = Z(x_0, t_0, \frac{3}{4}r_0), \quad Z_3 = Z(x_0, t_0, \frac{1}{2}r_0).$$

Nehme an, dass  $r_0 > 0$  so ist, dass  $Z(x_0, t_0, r_0) \subset \Omega \times (0, T)$ . Wir zeigen die Regularität innerhalb  $Z_3$ .

Sei  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  so definiert, dass

$$\chi(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } (x, t) \in Z_2, \\ \dots & \text{für } (x, t) \in Z_1 \setminus Z_2, \\ 0 & \text{für } (x, t) \notin Z_1, \end{cases} \quad (11.7)$$

und definiere

$$v(x, t) = \begin{cases} \chi(x, t) u(x, t) & \text{für } (x, t) \in Z_1, \\ 0 & \text{für } (x, t) \notin Z_1. \end{cases}$$

Bemerke, dass  $v \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  gilt, dass

$$v(x, 0) = 0 \quad (11.8)$$

und außerdem, dass

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)v(x, t) &= \\ &= ((\partial_t - \Delta)\chi(x, t))u(x, t) - 2\nabla\chi(x, t) \cdot \nabla u(x, t) \\ &=: \tilde{f}(x, t) \end{aligned} \quad (11.9)$$

Weil  $\chi(x, t) = 1$  auf  $Z_2$  und  $\chi(x, t) = 0$  auf  $Z_1^c$  gilt, folgt

$$\tilde{f}(x, t) = 0 \text{ für } (x, t) \in Z_2 \cup Z_1^c$$

und es gilt, dass  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ . Mit Duhamel findet man eine Lösung von (11.8-11.9) und weil diese beschränkte

Lösung eindeutig ist wegen Theorem 11.2, folgt

$$v(x, t) = \iint_{(y,s) \in Z_1 \setminus Z_2} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \tilde{f}(y, s) dy ds.$$

Für  $(x, t) \in Z_3$  gilt  $\chi(x, t) = 1$  und also auch für  $(x, t) \in Z_3$

$$u(x, t) = \iint_{(y,s) \in Z_1 \setminus Z_2} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \tilde{f}(y, s) dy ds.$$

Es sei bemerkt, dass  $(x, t) \in Z_3$  und  $(y, s) \in Z_1 \setminus Z_2$  bedeutet, dass man der singulären Stelle im Integral, nämlich  $(y, s) = (x, t)$ , fern bleibt. Es gilt also, dass

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) \in C^\infty(Z_3).$$

Mit dem Satz zu Majorisierter Konvergenz lässt sich Differenzieren und Integrieren vertauschen und es folgt, dass auch  $u \in C^\infty(Z_3)$ . ■

**Aufgabe 11.3** Die Funktion  $\chi$  ist konstant 1 auf  $Z_2$  und konstant 0 außerhalb von  $Z_1$ . Wieso braucht man im Beweis noch  $Z_3$  innerhalb von  $Z_2$ ?

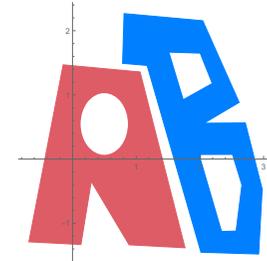
## 11.4 Technisches Intermezzo

In (11.7) wurde eine  $C^\infty$ -Funktion verwendet, die außerhalb  $Z_1$  identisch 0 ist und innerhalb  $Z_2$  identisch 1. Die Mengen waren derartig, dass das Komplement von  $Z_1$  eine positive Entfernung zu  $Z_2$  hat:

$$d(Z_1^c, Z_2) := \inf\{|(x, s) - (y, t)|; (x, s) \notin Z_1 \text{ und } (y, t) \in Z_2\}.$$

Wie bekommt man eine solche Funktion?

Um einmal genau diese vollkommen technische Aufgabe zu klären, finden Sie hier die Details.



**Lemma 11.7** Seien  $A, B \subset \mathbb{R}^m$  mit

$$\delta := \inf\{|x - y|; x \in A \text{ und } y \in B\} > 0.$$

Dann existiert eine Funktion  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  derart, dass

1.  $0 \leq \chi(x) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ ;
2.  $\chi(x) = 1$  für alle  $x \in A$ ;
3.  $\chi(x) = 0$  für alle  $x \in B$ .

**Beweis.** Wir erinnern uns an den Friedrichsschen Glätter  $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ :

$$\varphi_\varepsilon(x) = c_m \varepsilon^{-m} \varphi(|x|/\varepsilon)$$

mit

$$\varphi(r) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{r^2-1}\right) & \text{für } r < 1 \\ 0 & \text{für } r \geq 1 \end{cases}$$

und

$$c_m = \left( \int_{x \in \mathbb{R}^m} \varphi(|x|) dx \right)^{-1}.$$

Die Funktion  $\varphi_\varepsilon$  hat  $\overline{B_\varepsilon(0)}$  als Träger und

$$\int_{x \in B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Man definiert die Entfernung einer Stelle  $x \in \mathbb{R}^m$  zu  $A$  durch

$$d(x, A) := \inf \{|x - y|; y \in A\}.$$

Weil  $d(\tilde{x}, A) \leq d(x, A) + |x - \tilde{x}|$  gilt, ist diese Funktion stetig auf  $\mathbb{R}^m$ . Dann folgt, dass

$$A_{\delta/2} := \{x \in \mathbb{R}^m; d(x, A) < \delta/2\}$$

eine offene Menge ist, die  $A$  umfasst und noch mindestens  $\delta/2$  von  $B$  entfernt ist. Weil  $A_{\delta/2}$  offen ist, ist  $\chi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\chi(x) = \int_{A_{\delta/2}} \varphi_{\delta/2}(x - y) dy \quad (11.10)$$

wohldefiniert. Diese Funktion hat die gewünschten Eigenschaften:

Weil  $\varphi_{\delta/2} \geq 0$  gilt, folgt

$$0 \leq \chi(x) \leq \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_{\delta/2}(x - y) dy = 1.$$

Das Theorem zu majorisierter Konvergenz impliziert

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{\delta/2}(x + he_i - y) - \varphi_{\delta/2}(x - y)}{h} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{\delta/2}(x + he_i - y) - \varphi_{\delta/2}(x - y)}{h} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial \varphi_{\delta/2}}{\partial x_i}(x - y) dy \end{aligned}$$

und durch wiederholte Anwendung folgt  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ .

Weil der Träger von  $y \mapsto \varphi_{\delta/2}(x - y)$  genau  $\overline{B_{\delta/2}(x)}$  ist und für  $x \in A$  gilt, dass  $B_{\delta/2}(x) \subset A_{\delta/2}$ , folgt weiter, dass für  $x \in A$  gilt:

$$\chi(x) = \int_{A_{\delta/2}} \varphi_{\delta/2}(x - y) dy = \int_{B_{\delta/2}(x)} \varphi_{\delta/2}(x - y) dy = 1.$$

Für  $x \in B$  folgt  $B_{\delta/2}(x) \cap A_{\delta/2} = \emptyset$  und man findet für  $x \in B$ :

$$\chi(x) = \int_{A_{\delta/2}} \varphi_{\delta/2}(x - y) dy = \int_{\emptyset} \varphi_{\delta/2}(x - y) dy = 0. \quad \blacksquare$$

## 11.5 Existenz auf beschränkten Gebieten

Wir werden hier skizzieren, wie man die Existenz einer Lösung zu

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (11.11)$$

bekommen kann. Man versucht Lösungen zu finden für

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (11.12)$$

die man wie folgt schreiben kann:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (11.13)$$

Für eine solche Lösung gilt

$$X(x)T'(t) - \Delta X(x)T(t) = 0$$

und wenn  $u$  nicht trivial ist, findet man

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)}.$$

Das bedeutet wiederum, dass

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} = c.$$

Man findet eine passende Funktion  $u$  wie in dem *Separationsansatz* (11.13), wenn man eine Lösung hat vom zugehörigen Eigenwertproblem.

**Definition 11.8** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes und zusammenhängendes Gebiet. Man nennt

$$\begin{cases} -\Delta X(x) = \lambda X(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ X(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.14)$$

wo sowohl die Funktion  $X \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$ , als auch die Konstante  $\lambda \in \mathbb{R}$  gesucht wird, ein Eigenwertproblem. Für ein Paar  $(X, \lambda)$ , das dieses Problem erfüllt, nennt man  $X$  eine Eigenfunktion und  $\lambda$  den zugehörigen Eigenwert.

**Bemerkung 11.8.1** Meistens reicht es, wenn die Eigenfunktion nur im schwachen Sinne das Eigenwertproblem (11.14) erfüllt. Das heißt, man sucht  $X \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass

$$\int_{\Omega} \nabla X(x) \cdot \nabla \varphi(x) - \lambda X(x)\varphi(x) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Wenn das Gebiet keinen glatten Rand hat kann es sein, dass es nur schwache Lösungen gibt.

**Definition 11.9** Der Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  ist definiert als der Abschluss von  $C_0^\infty(\Omega)$  in der  $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ -Norm:

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}} \text{ mit} \\ \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Bemerkung 11.9.1** Man hat  $C^2(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega}) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ . Wenn  $\Omega$  mehrdimensional ist, sind Funktionen in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  im Allgemeinen nicht mal stetig.

**Aufgabe 11.4** Sei

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in B_1(0); |\operatorname{Arg}(x_1 + ix_2)| < \frac{9}{10}\pi\}$$

und  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$u(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = r^{5/9} (1 - r^4) \cos\left(\frac{5}{9}\varphi\right).$$

1. Zeigen Sie, dass  $u \notin C^1(\bar{\Omega})$ .
2. Zeigen Sie, dass  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ .

3. Berechnen Sie  $\Delta u$  für  $x \in \Omega$  und definieren Sie  $v \in C(\overline{\Omega})$  mit  $\Delta u = v$  in  $\Omega$ .
4. Zeigen Sie, dass es  $v \in C^1(\overline{\Omega})$ .

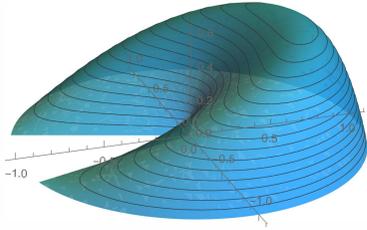


Abbildung 11.3: Skizze der Funktion aus Aufgabe 11.4

Wie bei Eigenvektoren kann man auch eine Eigenfunktion mit einer Zahl multiplizieren und es bleibt eine Eigenfunktion mit dem gleichen Eigenwert. Es ist auch hier üblich, diese (abhängigen) Eigenfunktionen als eine Eigenfunktion zu bezeichnen.

**Beispiel 11.10** Das Eigenwertproblem

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x) & \text{für } 0 < x < 1, \\ X(x) = 0 & \text{für } x \in \{0, 1\}, \end{cases}$$

hat als Lösungen  $\{(X_k, \lambda_k); k \in \mathbb{N}^+\}$  mit

$$X_k(x) = \sin(k\pi x) \text{ und } \lambda_k = k^2\pi^2.$$

Man kann folgendes zeigen:  $\{\sqrt{2}X_k; k \in \mathbb{N}^+\}$  ist ein vollständiges orthonormales System in  $L^2(0, 1)$ . Orthonormal in  $L^2(0, 1)$  bedeutet

$$\langle \sqrt{2}X_k, \sqrt{2}X_\ell \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell, \\ 0 & \text{für } k \neq \ell, \end{cases}$$

für  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ . Vollständig bedeutet, dass es für jede  $u_0 \in L^2(0, 1)$  eine Approximation im  $L^2(0, 1)$ -Sinne gibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u_0 - \sum_{k=1}^n \langle \sqrt{2}X_k, u_0 \rangle \sqrt{2}X_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

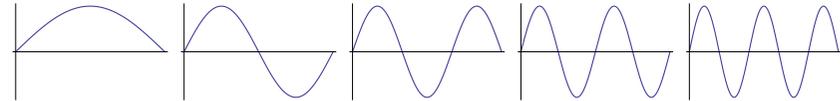


Abbildung 11.4: Darstellung der ersten 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 11.10

Wenn  $X_k$  eine Eigenfunktion mit Eigenwert  $\lambda_k$  für (11.14) ist, dann hat man auch eine Lösung von (11.11) mit  $u(x, 0) = X_k(x)$ , nämlich

$$u(x, t) = e^{-\lambda_k t} X_k(x).$$

Man sieht sofort, dass

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) u(x, t) &= -\lambda_k e^{-\lambda_k t} X_k(x) + \lambda_k e^{-\lambda_k t} X_k(x) = 0, \\ u(x, 0) &= e^{-\lambda_k \cdot 0} X_k(x) = X_k(x), \\ u(x, t)|_{x \in \{0, 1\}} &= e^{-\lambda_k t} X_k(x)|_{x \in \{0, 1\}} = 0. \end{aligned}$$

Für  $u(x, 0) = \sum_{k=1}^n c_k X_k(x)$  findet man als Lösung dieser linearen Differentialgleichung

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{-\lambda_k t} X_k(x).$$

Ohne Beweis beschreiben wir, wie man allgemeine Anfangswerte mit einem solchen Ansatz angehen kann.

**Behauptung 11.11** Ist folgendes erfüllt:

1.  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist ein vollständiges orthonormales System von Eigenfunktionen in  $L^2(\Omega)$ , die (11.14) im schwachen Sinne erfüllen;
2.  $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  hat höchstens endlich viele negative Eigenwerte;
3.  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,

dann gilt:

- Die Funktion  $u(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$  ist für  $t \geq 0$  wohldefiniert durch

$$u(x, t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{-\lambda_k t} \langle X_k, u_0 \rangle X_k(x);$$

- $t \mapsto u(\cdot, t) \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega))$ ;
- $\lim_{t \downarrow 0} \|u(\cdot, t) - u_0\|_{L^2(0,1)} = 0$ ;

Wenn zusätzlich gilt, dass  $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , dann folgt

- $t \mapsto u(\cdot, t) \in L^\infty((0, T); W_0^{1,2}(\Omega))$ ;
- $u$  ist eine schwache Lösung der Differentialgleichung  $(\partial_t - \Delta)u = 0$ .

Das bedeutet, dass für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$  gilt

$$\int_0^T \int_\Omega (u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) - \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t)) dx dt = 0.$$

Ohne nähere Bedingungen am Rand  $\partial\Omega$ , wie zum Beispiel  $\partial\Omega \in C^{2,\gamma}$ , kann man nicht die Existenz einer klassischen Lösung zeigen. Auch wenn  $u_0 \in C^2(\overline{\Omega})$  kann es sein, dass

$u(\cdot, t)$  für  $t > 0$  nicht stetig bis auf  $\partial\Omega$  ist. Im Inneren von  $\Omega \times (0, T)$  wird die Lösung wie vorher unendlich oft differenzierbar sein.

Einen Separationsansatz, der zu explizit berechenbaren Lösungsformeln führt, gibt es meistens nur, wenn genügend Symmetrie vorhanden ist und man keine wilden Randwerte hat. Für

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (11.15)$$

findet man so eigentlich nur eine Lösung, wenn  $\Omega$  ein Rechteck, Quader, Kreis, Halbkreis, Kugel usw. ist.

**Beispiel 11.12** Für ein Rechteck  $\Omega$ , sagen wir  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ , braucht man die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu

$$\begin{cases} -\Delta\varphi(x) = \lambda\varphi(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (11.16)$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen sind

$$\begin{aligned} \lambda_{k,\ell} &= \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} \right) \pi^2, \\ \varphi_{k,\ell}(x_1, x_2) &= \frac{2}{ab} \sin\left(k \frac{\pi}{a} x_1\right) \sin\left(\ell \frac{\pi}{b} x_2\right), \end{aligned}$$

und  $\{\varphi_{k,\ell}\}_{k,\ell=1}^\infty$  ist ein vollständiges Orthonormalsystem für  $L^2(\Omega)$ . Für  $u_0 \in L^2(\Omega)$  kann man die Lösung zu (11.15) wie folgt schreiben:

$$u(x, t) = \sum_{k,\ell=1}^\infty \langle u_0, \varphi_{k,\ell} \rangle e^{-\lambda_{k,\ell} t} \varphi_{k,\ell}(x)$$

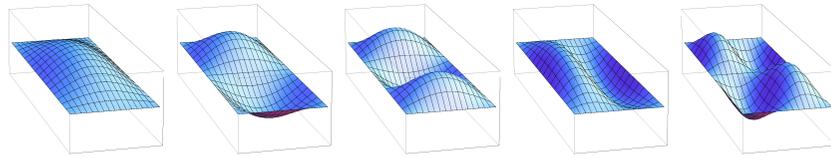


Abbildung 11.5: Darstellung der ersten 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 11.12.

**Beispiel 11.13** Für einen Kreis  $\Omega$ , sagen wir  $\Omega = B_1(0)$ , braucht man die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu (11.16), die man mit einem zweiten Separationsansatz, nämlich

$$\varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) = R(r) \Theta(\theta),$$

via

$$-r^{-1} (rR'(r))' \Theta(\theta) - r^{-2} R(r) \Theta''(\theta) = \lambda R(r) \Theta(\theta)$$

überführt in

$$\begin{cases} -r^{-1} (rR'(r))' = (\lambda - \frac{\mu}{r^2}) R(r) & \text{für } r \in (0, 1), \\ R(1) = R'(0) = 0, \end{cases} \quad (11.17)$$

und

$$\begin{cases} -\Theta''(\theta) = \mu \Theta(\theta) & \text{für } \theta \in (0, 2\pi), \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi). \end{cases} \quad (11.18)$$

Die Eigenwerte und Eigenfunktionen für (11.18) sind

$$\begin{aligned} \mu_n &= n^2 \text{ mit } n \in \mathbb{N}, \\ \Theta_{n,0}(\theta) &= \cos(n\theta) \text{ für } n \in \mathbb{N}, \\ \Theta_{n,1}(\theta) &= \sin(n\theta) \text{ für } n \in \mathbb{N}^+. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Besselfunktionen und ihrer Nullstellen findet man Lösungen für (11.17) mit  $\mu = n^2$  und so die Eigenwerte und Eigenfunktionen für das Eigenwertproblem (11.16) auf dem Kreis  $B_1(0)$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $m \in \mathbb{N}^+$ :

$$\begin{aligned} \lambda_{n,m} &= j_{n,m}^2, \\ \varphi_{n,m,0}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \cos(n\theta) J_n(j_{n,m}r), \\ \varphi_{n,m,1}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \sin(n\theta) J_n(j_{n,m}r) \text{ mit } n > 0. \end{aligned}$$

Hier ist  $J_n$  die  $n$ -te Besselfunktion erster Gattung und  $j_{n,m}$  die  $m$ -te positive Nullstelle von  $J_n$ . Nach Normierung bilden diese Eigenfunktionen ein vollständiges Orthogonalsystem. Dass dieses System vollständig ist, haben wir hier jedoch nicht bewiesen.

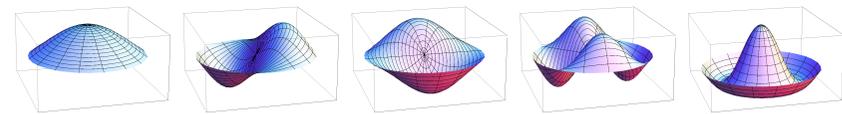


Abbildung 11.6: Darstellung von 5 Eigenfunktionen aus Beispiel 11.13:  $\varphi_{0,1,0}$ ,  $\varphi_{1,1,0}$ ,  $\varphi_{1,1,1}$ ,  $\varphi_{2,1,0}$  und  $\varphi_{0,2,0}$ .

## 11.6 Zwei Gegenbeispiele

Das erste Beispiel ist von Hadamard selbst und zeigt, dass das Rückwärtsproblem bei der Wärmeleitungsgleichung seine dritte Bedingung nicht erfüllt.

Das zweite Beispiel ist von Tychonov. Es zeigt, dass ohne die Wachstumsbedingung in Theorem 11.1, es keine Eindeu-

tigkeit für das Anfangwertproblem bei der Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$  gibt. Tychonov konstruiert eine nicht-triviale Lösung, die trivial, also mit 0, anfängt.

**Beispiel 11.14 (Hadamard)** Wir haben gesehen, dass wenn

$$u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$$

eine Lösung ist von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (11.19)$$

sogar gilt, dass  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ . Dies bedeutet, dass das Rückwärtsproblem

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (-T, 0), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (11.20)$$

nur möglicherweise lösbar ist, wenn  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Aber wenn es der Zufall sogar will, dass (11.20) lösbar ist, zeigt folgendes Beispiel von Hadamard, dass die Robustheit verletzt ist. Sei

$$u_\varepsilon(x, t) = \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} \sin(x/\varepsilon).$$

Man berechnet sofort, dass  $(\partial_t - \partial_x^2) u_\varepsilon(x, t) = 0$  für  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und dass

$$|u_\varepsilon(x, 0)| = |\varepsilon \sin(x/\varepsilon)| \leq \varepsilon.$$

Auch gilt für beliebige  $t < 0$ , dass

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|u_\varepsilon(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left\| \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} \sin(x/\varepsilon) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon e^{-t/\varepsilon^2} = \infty. \end{aligned}$$

Das heißt, man kann kleine Störungen beim Anfangswert angeben mit beliebig großen Änderungen in der Lösung.

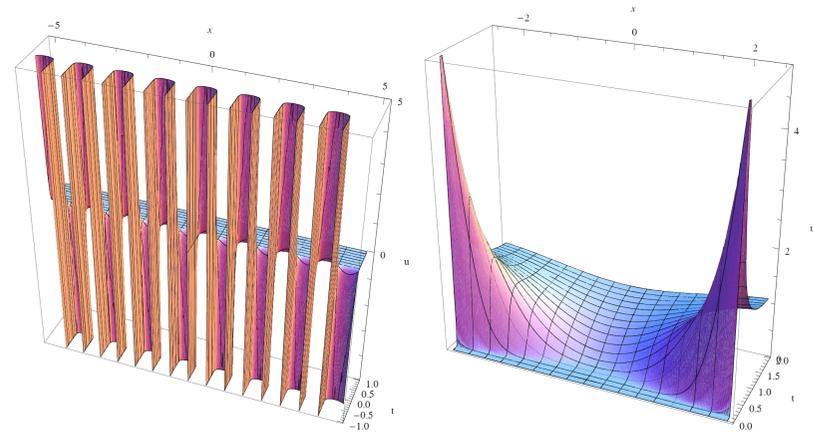


Abbildung 11.8: Links eine Skizze zu dem Gegenbeispiel von Hadamard mit  $\varepsilon = \frac{1}{5}$ . Rechts die Funktion von Tychonov aus Beispiel 11.15.

**Beispiel 11.15 (Tychonov)** Wir haben die Eindeutigkeit gezeigt für die Lösung zu

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = f(x, t) & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (11.21)$$

wenn die Lösung zusätzlich eine Wachstumsbedingung erfüllt: Es gibt  $C, A$  mit

$$|u(x, t)| \leq C e^{A|x|^2} \text{ für alle } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty).$$

Tychonov hat sich folgendes Beispiel überlegt: Man definiere

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ für } x, t \in \mathbb{R}$$

mit

$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{für } t \neq 0, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und sogar dass

$$\begin{aligned} \left| \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| &\leq \frac{2^n n!}{(2n)!} \left( \frac{x^2}{t} \right)^n \exp\left(\frac{-1}{4t^2}\right) \\ &\leq \frac{1}{n!} \left( \frac{x^2}{t} \right)^n \exp\left(\frac{-1}{4t^2}\right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$|u(x, t)| \leq \exp\left(\frac{x^2}{t}\right) \exp\left(\frac{-1}{4t^2}\right) = \exp\left(\frac{4x^2 t - 1}{4t^2}\right) \quad (11.22)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = 0.$$

Dieser Grenzwert gilt für jedes  $x$ , aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig!

Auch gilt

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} &= \\ \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t^{n+1} \phi(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t^n \phi(t) \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} &= 0. \end{aligned}$$

Die Funktion  $u$  ist also eine nicht-triviale Lösung von

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta) u(x, t) = 0 & \text{für } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (11.23)$$

Es folgt selbstverständlich nicht aus (11.22), dass die C&A-Bedingung nicht erfüllt ist. Man kann jedoch zeigen, dass die Abschätzung in (11.22) fast optimal ist und dass  $u$  tatsächlich die C&A-Bedingung nicht erfüllt.

Mehr Details zu diesen Beispielen findet man im Buch von DiBenedetto [3].



## Die Laplace- und Poisson-Gleichungen

Die Struktur bei elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung ist nicht wesentlich verschieden bei Operatoren mit konstanten oder nicht-konstanten Koeffizienten. Technische Aspekte können leider unverhältnismäßig kompliziert werden bei allgemeinen elliptischen Randwertproblemen. Wir werden uns deshalb oft beschränken auf einen Prototyp elliptischer Differentialgleichungen, nämlich die Poisson-Gleichung<sup>1</sup>

$$\Delta u = f. \quad (12.1)$$

Den Differentialoperator<sup>2</sup>

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$$

nennt man Laplace-Operator. Setzt man  $f = 0$  in (12.1), wird sie Laplace-Gleichung genannt. Meistens sucht man Lösungen

<sup>1</sup>Siméon Denis Poisson (1781–1840) bekam 1802 eine Professur an der L'École Polytechnique in Paris. Er war ein Schüler von Pierre-Simon Marquis de Laplace.

<sup>2</sup>Stochastiker nehmen oft  $\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  und für Potentialtheoretiker gilt  $\Delta = - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ .

von (12.1) auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit vorgegebenen Randwerten auf  $\partial\Omega$ .

### 12.1 Fundamentallösung

**Definition 12.1** Sei  $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ . Die Funktion  $F_n : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch

$$F_2(x) = \frac{-1}{2\pi} \ln |x|,$$

$$F_n(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} |x|^{2-n} \quad \text{für } n \geq 3,$$

nennt man die Fundamentallösung zu  $-\Delta$ .

**Bemerkung 12.1.1** Man findet eine Fundamentallösung für einen rotationsinvarianten Operator wie  $-\Delta$ , wenn man eine passende Lösung von  $-\Delta f(|x|) = 0$  für  $|x| > 0$  nimmt. Das heißt, man sucht  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass

$$r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r f(r) = 0.$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}\Delta f(|x|) &= \nabla \cdot \left( f'(|x|) \frac{x}{|x|} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} f'(|x|)) \frac{x_i}{|x|} + f'(|x|) \nabla \cdot \frac{x}{|x|} \\ &= \sum_{i=1}^n f''(|x|) \left( \frac{x_i}{|x|} \right)^2 + f'(|x|) \left( \frac{n}{|x|} - \frac{x}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|^2} \right) \\ &= f''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} f'(|x|)\end{aligned}$$

und via

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r f(r)$$

folgt  $f(r) = c_1 r^{2-n} + c_2$ , wenn  $n \geq 2$  und  $f(r) = c_1 \log r + c_2$  wenn  $n = 2$ . Die zweite Konstante spielt keine Rolle und  $c_1$  sollte man derart wählen, dass folgendes stimmt:

**Lemma 12.2** *Im Sinne von Distributionen gilt  $-\Delta F_n = \delta_0$ .*

**Beweis.** Man soll zeigen, dass für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (oder  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ) gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x) \cdot (-\Delta \varphi(x)) dx = \varphi(0).$$

Wie bei Proposition 4.4 verwendet man, dass  $F_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  und dass

$$-\Delta F_n(x) = 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Nehmen wir  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , so gibt es eine Kugel  $B_R(0)$ , die den Träger von  $\varphi$  umfasst, und es gilt

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x) (-\Delta \varphi(x)) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} F_n(x) \Delta \varphi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( - \int_{\partial(B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0))} (F_n(x) \nabla \varphi(x) - \nabla F_n(x) \varphi(x)) \cdot \nu d\sigma_x \right. \\ & \quad \left. - \int_{B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta F_n(x) \varphi(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} F_n(x) \nabla \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x \\ & \quad - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x.\end{aligned}$$

Man findet für  $n > 2$ , dass

$$\begin{aligned}\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} F_n(x) \nabla \varphi(x) \cdot \nu d\sigma_x \right| &\leq \frac{\varepsilon^{2-n} \|\nabla \varphi\|_\infty}{(n-2) \omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} 1 d\sigma_x = \frac{\|\nabla \varphi\|_\infty}{n-2} \varepsilon, \\ \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) \cdot \nu d\sigma_x \right| &\leq \frac{\varepsilon^{1-n} \|\nabla \varphi\|_\infty}{\omega_n} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |x| d\sigma_x \leq \|\nabla \varphi\|_\infty \varepsilon.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x) (-\Delta\varphi(x)) dx \\ &= -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nabla F_n(x) \varphi(0) \cdot \nu d\sigma_x \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{1}{\omega_n} |x|^{1-n} \varphi(0) d\sigma_x \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \varphi(0) \int_{\partial B_\varepsilon(0)} 1 d\sigma_x = \varphi(0). \end{aligned}$$

Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  benutzt man, dass  $\varphi$  und  $\nabla\varphi$  schneller als jedes Polynom nach 0 konvergiert für  $|x| \rightarrow \infty$ . ■

**Aufgabe 12.1** Eine Fundamentallösung für  $\Delta^2 u = f$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $n > 4$  ist

$$\tilde{F}_n(x) = c_n |x|^{4-n}.$$

1. Berechnen Sie  $c_n$ .
2. Begründen Sie, dass diese Funktion  $\tilde{F}_n$  eine Fundamentallösung ist.

Wenn  $-\Delta F_n = \delta_0$  im Sinne von Distributionen, dann gilt im gleichen Sinne auch

$$-\Delta F_n(\cdot - y) = \delta_0(\cdot - y) = \delta_y(\cdot).$$

Anders gesagt

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) (-\Delta\varphi(x)) dx = \varphi(y).$$

Wenn  $-\Delta\varphi = f$  gilt, so hat man, wenn man  $x$  und  $y$  vertauscht und  $F_n(z) = F_n(-z)$  bemerkt, dass

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy. \tag{12.2}$$

Man nennt (12.2) eine *Darstellungsformel* für  $-\Delta\varphi = f$ . Das heißt, wenn für  $\varphi$  und  $f$  gilt, dass  $-\Delta\varphi = f$ , dann gilt auch (12.2). Sie ist noch keine Lösungsformel. Das werden wir nun zeigen:

**Proposition 12.3** Sei  $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  und setze

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy. \tag{12.3}$$

Dann gilt  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  und  $-\Delta u = f$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Bevor wir den Beweis geben, eine Bemerkung, wie man es nicht beweisen kann. Man könnte naiverweise versuchen den Laplace-Operator durch das Integral zu schieben:

$$\Delta_x \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy \stackrel{\text{falsch}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x F_n(x - y) f(y) dy$$

Wenn man jedoch bedenkt, dass

$$f(x) = -\Delta u(x) = -\Delta \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy,$$

$$\text{und } \int_{\mathbb{R}^n} \Delta F_n(x - y) f(y) dy = 0,$$

dann kann man anscheinend Integral und  $\Delta$ -Operator nicht vertauschen, denn dann wäre die Proposition falsch. Der

Grund, dass sich Integral und  $\Delta$  nicht vertauschen lassen, ist, dass die zweiten Ableitungen von  $x \mapsto F_n(x - y)$  nicht integrierbar sind und die Sätze über majorisierte oder monotone Konvergenz, die eine Vertauschung von der Integration und vom Limes beim Differenzquotienten erlauben, nicht anwendbar sind.

**Beweis.** Die ersten Ableitungen von  $x \mapsto F_n(x - y)$  sind aber lokal integrierbar, und es folgt

$$\begin{aligned} & \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F_n(x + h e_i - y) - F_n(x - y)}{h} f(y) dy \\ & \quad (\text{wegen majorisierter Konvergenz}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_n(x + h e_i - y) - F_n(x - y)}{h} f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i} F_n(x - y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Dann gilt mit einer partiellen Integration, dass

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &= \nabla \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x F_n(x - y) f(y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x - y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) \nabla f(y) dy. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Also ist  $u$  differenzierbar und weil  $\nabla f$  stetig ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) \nabla f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) \nabla_x f(x - z) dy$$

gilt, findet man, dass  $\nabla u$  stetig ist, also gilt  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Auch gilt, dass

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) \partial_j f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_i} F_n(x - y) \partial_j f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_i F_n)(z) (\partial_j f)(x - z) dy \end{aligned}$$

existiert und sogar stetig ist. Also gilt  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

Weiter folgt

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) &= -\nabla \cdot \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x - y) \nabla f(y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x F_n(x - y) \cdot \nabla f(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x - y) \cdot \nabla f(y) dy. \end{aligned}$$

Wir bohren wieder ein kleines Loch, diesmal um  $x$  herum und finden

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_y F_n(x - y) \cdot \nabla f(y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \nabla_y F_n(x - y) \cdot \nabla f(y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \nabla_y F_n(x - y) \cdot f(y) \nu d\sigma_y \right. \\ & \quad \left. - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta_y F_n(x - y) f(y) dy \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{1}{\omega_n} |x - y|^{1-n} f(y) d\sigma_x = f(x). \end{aligned}$$

Nicht nur der letzte Schritt ist ähnlich wie im Beweis von Lemma 12.2. ■

Diese Proposition hat als Voraussetzung, dass  $f$  stetig differenzierbar ist und einen kompakten Träger hat. Beide Bedingungen kann man abschwächen. Es reicht, wenn  $f$  integrierbar ist und wenn die rechte Seite in (12.3) wohldefiniert ist. Wir werden dieser Behauptung hier nicht weiter nachgehen. Wir möchten die Annahmen nur in einer Richtung etwas abschwächen. Um zu zeigen, dass  $u$  definiert durch (12.3) in  $x_0$  zweimal stetig differenzierbar ist reicht es, wenn  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  stetig differenzierbar ist.

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Man nehme  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  derart, dass

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x - x_0| \leq \varepsilon, \\ \dots & \text{für } \varepsilon < |x - x_0| < 2\varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x - x_0| \geq 2\varepsilon. \end{cases}$$

Dann gilt

$$u(x) = \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} F_n(x-y) \chi(y) f(y) dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x_0)} F_n(x-y) (1 - \chi(y)) f(y) dy.$$

Nehmen wir  $x \in B_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x_0)$ , so gilt für  $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x_0)$ , dass  $|x - y| \geq \frac{1}{2}\varepsilon$ . Dies bedeutet, dass die singuläre Stelle im rechten Integral mindestens  $\frac{1}{2}\varepsilon$  vom Integrationsgebiet entfernt liegt und somit folgt sogar für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , dass

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(x_0)} F_n(x-y) (1 - \chi(y)) f(y) dy \in C^\infty(B_{\varepsilon/2}(x_0)).$$

Für das linke Integral können wir Proposition 12.3 verwenden. Für  $f \in C^1(\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)})$  folgt

$$x \mapsto \int_{B_{2\varepsilon}(x_0)} F_n(x-y) \chi(y) f(y) dy \in C^2(\mathbb{R}^n).$$

Übrigens gilt für  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger, dass  $u$  in (12.3) wohldefiniert ist und sogar dass

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy \in C(\mathbb{R}^n). \quad (12.5)$$

Es gilt nämlich, dass wenn der Träger von  $f$  in  $B_R(0)$  liegt, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z-y) f(y) dy \right| &= \left| \int_{B_R(0)} F_n(z-y) f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B_R(0)} F_n(z-y) dy \leq C_R \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Für  $f \geq 0$  kann man den Satz zur majorisierten Konvergenz verwenden um zu zeigen, dass

$$\lim_{z \rightarrow x} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy.$$

Wenn  $f$  kein festes Vorzeichen hat, betrachtet man getrennt  $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$  und  $f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$ . Das liefert die Stetigkeit der Abbildung (12.5). Wir fassen zusammen:

**Lemma 12.4** Sei  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  und nehme an,  $f$  hat einen kompakten Träger. Dann ist

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy. \quad (12.6)$$

wohldefiniert und es gilt  $u \in C(\mathbb{R}^n)$ .

Wenn außerdem  $f|_{\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)}} \in C^1(\overline{B_{2\varepsilon}(x_0)})$ , dann gilt

$$u|_{\overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}} \in C^2(\overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}) \quad (12.7)$$

und  $-\Delta u(x) = f(x)$  für  $x \in \overline{B_{\varepsilon/2}(x_0)}$ .

**Bemerkung 12.4.1** Statt anzunehmen, dass  $f$  einen kompakten Träger hat, reicht es, wenn  $f$  genügend schnell fallend ist.

**Aufgabe 12.2** Sei  $k > 1$ . Zeigen Sie, dass für  $f \in C(\mathbb{R}^n)$  mit  $n \geq 3$  und

$$|f(x)| \leq \frac{M}{(1 + |x|^2)^k} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n,$$

das Integral in (12.6) wohldefiniert ist.

*Hinweis: trennen Sie das Integrationsgebiet  $\mathbb{R}^n$  in*

$$A := \{y \in \mathbb{R}^n; |x - y| \leq |y|\} \text{ und } B := \mathbb{R}^n \setminus A,$$

und begründen und verwenden Sie, dass folgendes gilt:

$$\int_A |x - y|^{2-n} \frac{M}{(1 + |y|^2)^k} dy \leq M\omega_n \int_{r=0}^{\infty} \frac{r}{(1 + r^2)^k} dr,$$

$$\int_B |x - y|^{2-n} \frac{M}{(1 + |y|^2)^k} dy \leq M\omega_n \int_{r=0}^{\infty} \frac{r}{(1 + r^2)^k} dr.$$

## 12.2 Randwertprobleme

Das eigentliche Problem, an dem man interessiert ist, ist

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.8)$$

Wir werden grob einige Möglichkeiten beschreiben, wie man dieses Problem angehen kann. Vorher geben wir zwei Möglichkeiten an, wie man dieses Problem vereinfachen kann.

Es sei bemerkt, dass wenn man

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \text{ und } \begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.9)$$

für allgemeine  $f$  und  $\varphi$  lösen kann, man auch (12.8) lösen kann. Denn seien  $v$  und  $w$  Lösungen von (12.9), dann ist  $u = v + w$  eine Lösung von (12.8). Manchmal braucht man für eine Lösung von (12.8) jedoch nur eine der beiden Randwertprobleme aus (12.9) zu lösen:

- Wenn man das rechte Randwertproblem in (12.9) lösen kann, dann kann man auch (12.8) lösen: Setze

$$u_1(x) = \int_{\Omega} F_n(x - y) f(y) dy \quad (12.10)$$

und sei  $w$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = \varphi - u_1 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so findet man, dass  $u = u_1 + w$  eine Lösung ist von (12.8).

- Wenn man das linke Randwertproblem in (12.9) lösen kann und die Funktion  $\varphi$  lässt sich schreiben mittels  $\varphi = \Phi|_{\partial\Omega}$  für eine Funktion  $\Phi \in C^2(\bar{\Omega})$ , dann kann man auch (12.8) lösen. Denn sei  $v$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta v = f + \Delta\Phi & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so ist  $u = v + \Phi$  eine Lösung von (12.8).

In diesen Ansätzen sind ein paar Probleme an dem Rand des Gebietes versteckt. Die Formel in (12.10) folgt aus Proposition 12.3, wenn man die Funktion  $\tilde{f}$  einsetzt, die wie folgt definiert ist:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann bekommt man nämlich

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \tilde{f}(y) dy = \int_{\Omega} F_n(x-y) f(y) dy.$$

Wenn  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  gilt, folgt jedoch nicht, dass  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Um a-priori eine klassische Lösung zu bekommen, müsste man  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  erweitern zu einer Funktion  $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Für eine solche Erweiterung braucht man jedoch, dass der Rand  $\partial\Omega$  genügend glatt ist. Verwendet man statt Proposition 12.3 nun Lemma 12.4, dann folgt für die Funktion  $u_1$  aus (12.10) nur  $C^2(\Omega)$ .

### 12.2.1 Die Methode von Perron

Für harmonische Funktionen  $u$  auf  $\Omega$ , also  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ , sagt Proposition 4.4, dass

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma_x$$

für jede Sphäre  $\partial B_r(x_0)$  mit  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ . Diese Aussage ist gleichwertig zu

$$u(x_0) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx$$

für jede Kugel  $B_r(x_0)$  mit  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ . Den (Hyper)Flächeninhalt der  $(n-1)$ -dimensionalen Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  nennen wir  $\omega_n$ ; das Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  ist dann  $\frac{1}{n}\omega_n$ .

**Definition 12.5** Eine Funktion  $u \in C(\Omega)$  nennt man superharmonisch auf  $\Omega$ , wenn

$$u(x_0) \geq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \text{ für jede Kugel } B_r(x_0) \subset \Omega.$$

Eine Funktion  $u \in C(\Omega)$  nennt man subharmonisch auf  $\Omega$ , wenn

$$u(x_0) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(x) dx \text{ für jede Kugel } B_r(x_0) \subset \Omega.$$

Für

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.11)$$

kann man wie folgt verfahren:

**Lösung 12.1 (Mit Hilfe des Maximum Prinzips)** Perron<sup>3</sup> definiert

$$S_\varphi(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\bar{\Omega}); \begin{array}{l} u \text{ superharmonisch in } \Omega \\ u \geq \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

und setzt

$$\bar{u}(x) = \inf \{ u(x); u \in S_\varphi(\bar{\Omega}) \}.$$

<sup>3</sup>Oskar Perron, 1880 Frankenthal in der Pfalz – 1975 München

**Bemerkung 12.5.1** *Selbstverständlich kann man auch*

$$\underline{u}(x) = \sup \{u(x); u \in s_\varphi(\overline{\Omega})\}$$

mit

$$s_\varphi(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}); \begin{array}{l} u \text{ subharmonisch in } \Omega \\ u \leq \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

betrachten. Mit Hilfe des Maximumprinzips findet man, dass  $\bar{u} \geq \underline{u}$ . Aber sogar wenn  $\bar{u} = \underline{u}$  gilt, folgt nicht unbedingt, dass die Randbedingung erfüllt ist.

Man kann zeigen, dass  $\bar{u}$  harmonisch ist auf  $\Omega$  und dass  $u \geq \varphi$  auf  $\partial\Omega$ . Wenn man zusätzlich annimmt, dass  $\Omega$  einen „netten“ Rand hat und  $\varphi$  stetig ist, kann man sogar zeigen, dass  $\bar{u} \in C(\overline{\Omega})$  und  $\bar{u} = \varphi$  auf  $\partial\Omega$ . Was genau nett ist, soll noch erklärt werden. Das Maximum Prinzip sagt aus, dass eine subharmonische Funktion ein Maximum nur am Rand des Gebietes annehmen kann. Für eine superharmonische Funktion folgt, dass sie ein Minimum nur am Rande annehmen kann und so auch, dass  $\bar{u} \geq \min \{\varphi(x); x \in \partial\Omega\}$ . Genaueres folgt später.

**Aufgabe 12.3** *Sei  $\Omega$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass jede subharmonische Funktion auf  $\Omega$  konvex ist und dass jede stetige konvexe Funktion auf  $\Omega$  subharmonisch ist.*

## 12.2.2 Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Riesz

Das Argument von Riesz ist funktionalanalytischer Natur und braucht passende Funktionenräume. Für das Randwertpro-

blem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.12)$$

braucht man Sobolev-Räume, die auch noch den Randwert einschließen. Dazu schränkt man die üblichen Sobolev-Räume aus Definition 3.10 wie folgt ein:

**Definition 12.6** *Für  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in (1, \infty)$  definiert man*

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}. \quad (12.13)$$

Mit  $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}$  ist gemeint, dass  $W_0^{k,p}(\Omega)$  der Abschluss ist von  $C_0^\infty(\Omega)$  bezüglich der  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ -Norm.

**Bemerkung 12.6.1**  $W_0^{k,p}(\Omega)$  nennt man auch Sobolev-Raum und ist Teilraum vom Sobolev-Raum  $W^{k,p}(\Omega)$  und  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$  ist eine Norm für  $W_0^{k,p}(\Omega)$ . Als Erinnerung:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|m| \leq k} \int_{\Omega} |D^m u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

$W_0^{k,p}(\Omega)$  ist vollständig bezüglich dieser Norm.

**Theorem 12.7 (Ungleichung von Poincaré-Friedrichs)**

*Nehme an  $\Omega$  ist derart, dass*

$$\sup \{x_1; x \in \Omega\} - \inf \{x_1; x \in \Omega\} \leq d_\Omega. \quad (12.14)$$

*Dann gilt für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq d_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (12.15)$$

**Bemerkung 12.7.1** Hier ist (12.14) eine Bedingung, die sagt dass  $\Omega$  in einem Streifen liegt, wo der  $x_1$ -Koordinate beschränkt ist. Das darf auch eine andere Richtung sein.

**Beweis.** Weil  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt, reicht es, wenn wir die Ungleichung für  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  beweisen. In einer Dimension können wir annehmen, dass  $\Omega = (0, d)$ . Für  $u \in C_0^\infty((0, d))$  gilt

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(x) dx = \int_0^x u'(x) dx$$

und mit Cauchy-Schwarz, dass

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^x u'(x) dx \right| \leq \int_0^x |u'(x)| dx \\ &\leq \sqrt{\int_0^x 1 dx} \sqrt{\int_0^x |u'(x)|^2 dx} \\ &= \sqrt{x} \sqrt{\int_0^d |u'(x)|^2 dx} = \sqrt{x} \|u'\|_{L^2(0,d)}. \end{aligned}$$

Integriert man, so folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0,d)}^2 &= \int_0^d |u(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^d \sqrt{x}^2 dx \|u'\|_{L^2(0,d)}^2 = \frac{1}{2} d^2 \|u'\|_{L^2(0,d)}^2 \end{aligned}$$

und man findet (12.15). In höheren Dimensionen können wir annehmen, dass

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_1 < d\}$$

und wir erweitern  $u$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  durch  $u = 0$ . Für diese erweiterte Funktion gilt

$$u \in C_0^\infty((0, d_1) \times \mathbb{R}^{n-1}).$$

Mit Fubini-Tonelli und dem ein-dimensionalen Ergebnis finden wir

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u(x)|^2 dx &= \int_{(0,d) \times \mathbb{R}^{n-1}} |u(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{(0,d_1)} |u(x_1, x')|^2 dx_1 dx' \\ &\leq \frac{1}{2} d^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{(0,d_1)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x') \right|^2 dx_1 dx' \\ &= \frac{1}{2} d^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \leq \frac{1}{2} d^2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Weil  $\frac{1}{2} \leq 1$  folgt (12.15). ■

**Aufgabe 12.4** Man definiert  $C_0^k(\bar{\Omega}) =$

$$\{u \in C^k(\bar{\Omega}); \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } |\alpha| \leq k\}.$$

1. Zeigen Sie, dass für alle  $u \in C^2[0, 1] \cap C_0^1[0, 1]$  gilt:

$$\|u'\|_{L^2(0,1)} \leq \|u''\|_{L^2(0,1)}. \quad (12.16)$$

Weil auch  $\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \|u'\|_{L^2(0,1)}$  für solche Funktionen gilt, findet man, dass  $c > 0$  existiert mit:

$$\|u\|_{W^{2,2}(0,1)} \leq c \|u''\|_{L^2(0,1)}, \quad (12.17)$$

für alle  $u \in C^2[0, 1] \cap C_0^1[0, 1]$ .

2. Zeigen Sie das letzte.

3. Zeigen Sie, dass (12.16) sogar für alle  $u \in C^2[0, 1] \cap C_0^0[0, 1]$  gilt und dass dann auch (12.17) folgt.

*Hinweis:* Für jede Funktion  $u \in C^2[0, 1] \cap C_0^0[0, 1]$  gilt  $u(0) = u(1) = 0$ . Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass eine Stelle  $x_0 \in (0, 1)$  existiert mit

$$u'(x_0) = \frac{u(0) - u(1)}{1} = 0.$$

4. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie, dass es  $c_\Omega > 0$  gibt derart, dass für alle  $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C_0^0(\bar{\Omega})$ :

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \left\| \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wir kommen nun zu einer zweiter Lösungsmöglichkeit, jedenfalls wenn man die schwache Version vom Randwertproblem (12.12) betrachtet. Die schwache Formulierung einer Lösung  $u$  ist wie folgt:

- Es gibt  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) dx = 0 \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Wir verwenden das folgende:

1. Der Sobolev-Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

ist ein Hilbert-Raum<sup>4</sup>.

2. Für  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in L^2(\Omega)$  definiert man das Funktional  $F(v) : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

Dieses  $F$  ist linear und stetig. Die Stetigkeit folgt aus:

$$\begin{aligned} |F(v)| &= \left| \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| |v(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq d \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

### Theorem 12.8 (Der Darstellungssatz von Riesz<sup>5</sup>)

Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und sei  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  linear und stetig. Dann gibt es  $u \in H$  derart, dass

$$\langle u, v \rangle = F(v) \text{ für alle } v \in H.$$

Wir werden diesen Satz nicht beweisen.

**Korollar 12.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Dann existiert für jede Funktion  $f \in L^2(\Omega)$  eine Funktion  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass für alle  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

<sup>4</sup>Ein Hilbertraum  $(H, \|\cdot\|_H)$  ist ein vollständiger normierter Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , für das gilt  $\langle u, u \rangle = \|u\|_H^2$  für alle  $u \in H$ .

<sup>5</sup>Frigyes Riesz, 1880 – 1956, war ein Ungarischer Mathematiker.

**Bemerkung 12.9.1** Dies ist genau die Definition einer schwachen Lösung von (12.12).

**Bemerkung 12.9.2** Das Lax-Milgram Theorem verallgemeinert dieses Theorem.

Ein Vorteil dieses Verfahrens ist, dass wir kaum Bedingungen an  $\Omega$  haben, nämlich nur die Beschränktheit. Es ist aber nicht klar und meistens auch nicht richtig, dass diese schwache Lösung  $u$  eine klassische Lösung ist. Die schwache Lösung liegt meistens nur dann in  $C^2(\bar{\Omega})$ , wenn es  $\alpha > 0$  gibt mit  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  und  $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ .

### 12.2.3 Durch Variationsrechnung

Hilbert<sup>6</sup> betrachtete das Funktional

$$J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) u(x) \right) dx$$

und konnte folgendes zeigen:

**Lösung 12.2 (Mit Hilfe der direkten Methoden der Variationsrechnung)** Für  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und  $f \in L^2(\Omega)$  gibt es  $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass

$$J(u_0) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u).$$

<sup>6</sup>David Hilbert, 1862 Königsberg – 1943 Göttingen, war wahrscheinlich der einflussreichste Mathematiker seiner Zeit.

Weil es  $C_\Omega > 0$  gibt derart, dass

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C_\Omega \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \text{ für all } u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

findet man mit Hilfe von Cauchy-Schwarz, dass für  $\varepsilon = \frac{1}{2}C_\Omega^{-1}$  gilt

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x) u(x) \right) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (12.18)$$

- Also ist  $J(u)$  für  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  nach unten beschränkt und es folgt, dass das Infimum existiert.

Um zu zeigen, dass dieses Infimum auch angenommen wird, das heißt, ein Minimum ist, nimmt man eine minimierende Folge.  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  ist eine minimierende Folge, wenn

$$J(u_n) \rightarrow \inf \{J(u); u \in W_0^{1,2}(\Omega)\}.$$

- Die Koerzitivität. Man bemerkt, dass aus (12.18) folgt:

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \rightarrow \infty \text{ impliziert } J(u) \rightarrow \infty.$$

Also sind minimierende Folgen beschränkt: Es gilt für irgendein  $R \in \mathbb{R}^+$ , dass

$$\|u_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq R.$$

- Aus Funktionalanalysis: Beschränkte Folgen in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  haben schwach konvergente Teilfolgen.

Es gibt  $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $u_\infty \in W_0^{1,2}(\Omega)$  mit für  $k \rightarrow \infty$ , dass

$$\int_{\Omega} \nabla u_{n_k} \cdot \nabla v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u_\infty \cdot \nabla v \, dx \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Man schreibt:  $u_{n_k} \rightharpoonup u_\infty$  in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Leider haben wir im Allgemeinen nicht, dass  $u_{n_k}$  nach  $u_0$  konvergiert in Norm. Was uns rettet, ist Folgendes:

- $J$  ist schwach unterhalb stetig:

$$v_k \rightharpoonup v \text{ in } W_0^{1,2}(\Omega) \text{ impliziert } \lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) \geq J(v).$$

Für eine solche Funktion  $u_\infty \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt also

$$J(u_\infty) \leq J(u) \text{ für alle } u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

und dann auch, dass

$$J(u_\infty) \leq J(u_\infty + \varepsilon\psi) \text{ für alle } \psi \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ und } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für die erste Variation

$$\partial J(u_\infty, \psi) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(u_\infty + \varepsilon\psi),$$

dass für alle  $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$0 = \partial J(u_\infty, \psi) = \int_{\Omega} (\nabla u_\infty(x) \cdot \nabla \psi(x) - f(x) \psi(x)) \, dx$$

und damit, dass die Funktion  $u_\infty$ , die  $J$  minimalisiert in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , eine schwache Lösung ist.

## 12.2.4 Ein Beispiel

Die verschiedenen Lösungstypen geben auch tatsächlich unterschiedliche Ergebnisse. Man betrachte für  $n \geq 2$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < |x| < 1\}$$

und das Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.19)$$

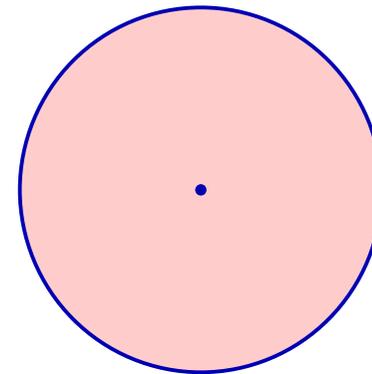


Abbildung 12.1: Eine punktierte Kreisscheibe

**Behauptung 12.10** Problem (12.19) hat keine Lösung in  $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ .

Wenn es eine solche Lösung  $u_0$  gibt, ist auch die rotierte Funktion  $u_\varphi = u_0 \circ R_\varphi$  eine Lösung mit  $R_\varphi$  irgendeine Rotation um 0. Sogar  $u_{rad} := \frac{1}{\omega_n} \int_{\varphi \in \partial B_1(0)} u_0(R_\varphi x) \, d\varphi$  wäre

eine Lösung. Weil  $u_{rad}$  radialsymmetrisch ist, findet man für  $U(|x|) = u_{rad}(x)$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r U(r) = 1.$$

Man hat  $\partial_r r^{n-1} \partial_r U(r) = -r^{n-1}$  und via  $r^{n-1} \partial_r U(r) = c - \frac{1}{n} r^n$  und  $\partial_r U(r) = cr^{1-n} - \frac{1}{n} r$  folgt

$$U(r) = c_1 + c_2 r^{2-n} - \frac{1}{2n} r^2 \quad \text{für } n > 2,$$

$$U(r) = c_1 + c_2 \log r - \frac{1}{4} r^2 \quad \text{für } n = 2.$$

Es gibt aber keine derartige Funktion, die  $U(0) = 0 = U(1)$  erfüllt. Es gibt also keine Lösung  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ .

**Behauptung 12.11** Die Funktion  $u(x) = \frac{1}{2n} (1 - |x|^2)$  ist eine schwache Lösung von (12.19) in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

Eine schwache Lösung ist hier eine Funktion  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , also im  $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ -Sinne durch  $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$  approximierbar, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} 1 \, v \, dx \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Wir werden diese Behauptung nicht bis ins Detail beweisen. Wir zeigen nur, dass der Funktionswert in einem Punkt nicht wahrgenommen wird im Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $n \geq 2$ .

Dies sieht man am folgenden Beispiel. Wir werden zeigen, dass die Funktionenfolge

$$\varphi_k(x) = \frac{\log(1+k|x|)}{\log(1+k)} (1 - |x|^2)$$

in  $W_0^{1,2}(B_1(0))$  gegen  $\varphi_\infty(x) = 1 - |x|^2$  konvergiert, wenn  $n \geq 2$ . Trotzdem gilt

$$\varphi_k(0) = 0 \neq 1 = \varphi_\infty(0).$$

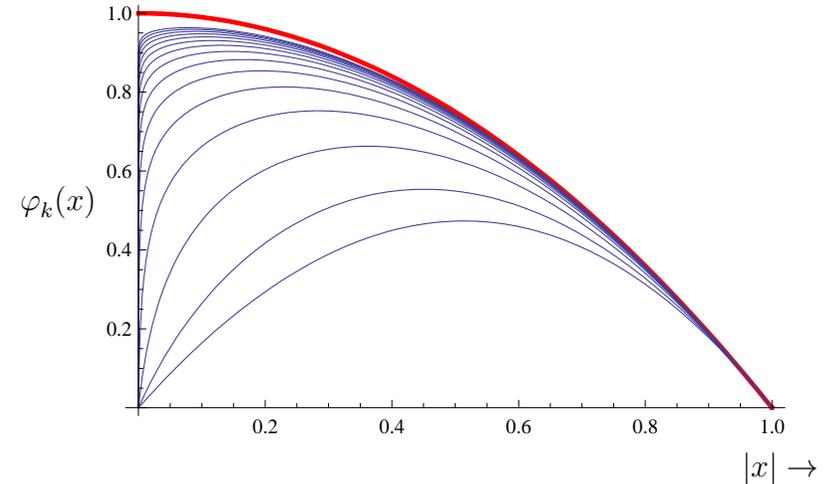


Abbildung 12.2:  $\varphi_k$  konvergiert gegen  $1 - |\cdot|^2$  in  $W_0^{1,2}(B_1(0))$  und nicht in  $C(\bar{B}_1(0))$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} & \|\varphi_k(\cdot) - (1 - |\cdot|^2)\|_{W_0^{1,2}(B_1)}^2 \\ &= \int_{B_1(0)} \left| \nabla \left( \left( \frac{\log(1+k|x|)}{\log(1+k)} - 1 \right) (1 - |x|^2) \right) \right|^2 dx = \\ & \omega_n \int_{r=0}^1 \left| \frac{k(1-r^2)}{(1+kr)\log(1+k)} - \left( \frac{\log(1+kr)}{\log(1+k)} - 1 \right) 2r \right|^2 r^{n-1} dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \omega_n \int_{r=0}^1 2 \left( \left| \frac{k(1-r^2)}{(1+kr)\log(1+k)} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \left( \frac{\log(1+kr)}{\log(1+k)} - 1 \right) 2r \right|^2 \right) r^{n-1} dr \\ &= \dots = \mathcal{O} \left( \frac{\log(1+k^2)}{(\log(1+k))^2} \right) = \mathcal{O} \left( \frac{1}{\log(k)} \right) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zu den Pünktchen bemerken wir folgendes: Für  $n \geq 2$  und auch nur dann gilt, dass

$$\left( \frac{k(1-r^2)}{(1+kr)\log(1+k)} \right)^2 r^{n-1} \leq \frac{2}{(\log(1+k))^2} \frac{k^2 r}{1+k^2 r^2}$$

und

$$\int_0^1 \frac{2k^2 r}{1+k^2 r^2} dr = \log(1+k^2).$$

Der Rest des Integrals lässt sich einfacher abschätzen.

**Aufgabe 12.5** Die Auslenkung  $u$  einer dünnen eingeklemmten Platte der Form  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  durch das Eigengewicht, wird beschrieben durch eine Lösung von:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n} u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.20)$$

1. Berechnen Sie für  $\Omega = B_1(0)$  die eindeutige klassische Lösung  $u$ .

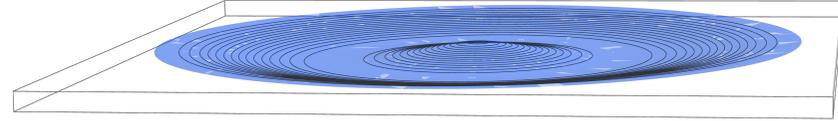


In der Skizze ist die positive Richtung nach unten.

2. Zeigen Sie, dass

$$u_0(x) = \frac{1}{64} (|x|^4 - |x|^2 - 2|x|^2 \log|x|)$$

eine Lösung ist für  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$ .



3. Zeigen Sie, dass  $u_0 \in W^{2,2}(B_1(0))$ .
4. Stimmt es, dass  $u_0 \in W_0^{2,2}(B_1(0))$ ?
5. Für welche  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in [0, 1]$  gilt  $u_0 \in C^{k,\gamma}(\overline{B_1(0)})$ ?

Eine schwache Lösung von (12.20) wird definiert als eine Funktion  $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} (\Delta u(x) \Delta \varphi(x) - 1 \varphi(x)) dx = 0$$

für alle  $\varphi \in W_0^{2,2}(\Omega)$ .

6. Ist  $u_0$  eine schwache Lösung von (12.20) für  $\Omega = B_1(0)$ ?
7. Welche Differentialgleichung erfüllt  $u_0$  im Sinne von Distributionen auf  $B_1(0)$ ?

## Ordnung und Existenz bei Laplace

### 13.1 Greensche Funktionen auf Halbraum und Kugel

Bevor wir die oben genannten Lösungsmethoden anschauen, werden ein paar Fälle vorgestellt, bei denen man eine fast explizite Lösung geben kann.

**Beispiel 13.1** Für einige  $f$  ist es möglich eine Formel für eine Lösung auf dem Halbraum zu geben:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ u = 0 & \text{auf } \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Man definiert

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \dots & \text{für } x \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ -f(-x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{für } x \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases}$$

und setzt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \tilde{f}(y) dy. \quad (13.1)$$

Wenn  $f \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ , dann gilt

$$\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Hat  $f$  auch noch einen kompakten Träger oder fällt die Funktion  $f$  genügend schnell für  $|x| \rightarrow \infty$ , dann folgt mit Proposition 12.3, dass

$$-\Delta u = \tilde{f} = f \text{ auf } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Man findet aus Symmetriegründen, dass

$$u(-x_1, x_2, \dots, x_n) = -u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Wenn  $f$  die Bedingungen von Lemma 12.4 erfüllt, ist  $u$  stetig und es folgt, dass

$$u(0, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Das heißt,  $u$  in (13.1) liefert eine Lösung.

Man kann die Funktion in (13.1) noch anders schreiben.  
Wir setzen

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^* = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

und finden

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y^*) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} F_n(x-y^*) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n} G(x,y) f(y) dy \end{aligned}$$

mit

$$G(x,y) = F_n(x-y) - F_n(x-y^*) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n.$$

Man bemerke, dass nur  $x \mapsto F_n(x-y)$  eine Singularität innerhalb  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  hat, weil  $y \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ .

**Definition 13.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und betrachte

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.2)$$

für genügend nette Funktionen  $f$  wie zum Beispiel  $f \in C(\overline{\Omega})$ .  
Eine Funktion  $G_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  derart, dass

$$u(x) = \int_{\Omega} G_\Omega(x,y) f(y) dy,$$

für jede solche Funktion  $f$  eine Lösung von (13.2) gibt, nennt man eine Greensche<sup>1</sup> Funktion.

Formell hat eine Greensche Funktion folgende Eigenschaften:

- $-\Delta_x G(x,y) = \delta_y(x)$  für  $x, y \in \Omega$ ;
- $G(x,y) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $y \in \Omega$ .

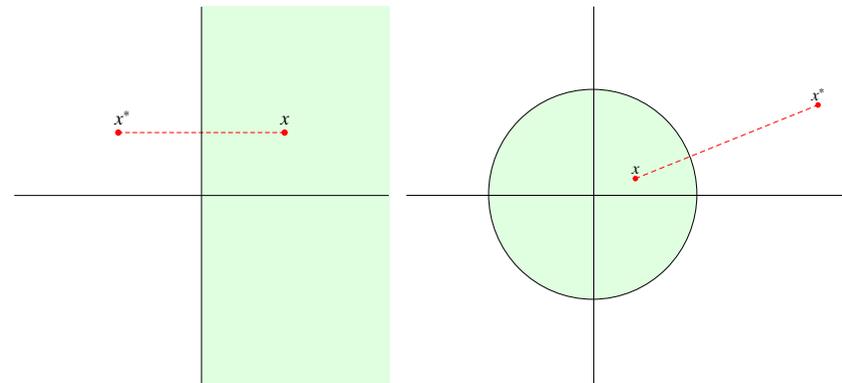


Abbildung 13.1: Halbraum und Kugel haben explizite Greensche Funktionen.

**Beispiel 13.3** Betrachte das Gebiet  $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Definiere die Kelvin-Spiegelung von  $B_R(0) \setminus \{0\}$  zu  $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$  durch

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2} x.$$

<sup>1</sup>Georg Green, 1793 – 1841, Britischer Mathematiker.

Dann ist

$$G_{B_R(0)}(x, y) = F_n(x - y) - F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right) \quad (13.3)$$

eine Greensche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_R(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_R(0). \end{cases} \quad (13.4)$$

Für  $y \in B_R(0)$  folgt  $|y^*| > R$  und man sieht, dass  $x \mapsto F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right)$  keine Singularität für  $x \in B_R(0)$  hat. Man sollte sich fragen was passiert, wenn  $y = 0$ . Weil

$$\left|\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right|^2 = \left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|^2 = \frac{|y|^2|x|^2}{R^2} - 2x \cdot y + R^2 \quad (13.5)$$

sieht man, dass  $F_n\left(\frac{|y|}{R}(x - y^*)\right)$  für  $y = 0$  sogar unendlich glatt fortsetzbar ist durch  $F_n(R)$ .

Formell folgt, mit  $y$  als Parameter, dass

$$-\Delta G_{B_R(0)}(\cdot, y) = \delta_y - \frac{|y|^2}{R^2} \delta_{y^*} = \delta_y \quad (13.6)$$

für Funktionen mit Träger innerhalb  $\Omega$ .

Weil (13.5) gilt, kann man  $x$  und  $y$  vertauschen, es folgt

$$G_{B_R(0)}(x, y) = F_n(x - y) - F_n\left(\frac{|x|}{R}(y - x^*)\right),$$

und wegen

$$\lim_{|x| \uparrow R} \frac{|x|}{R}(y - x^*) = y - x,$$

findet man

$$G_{B_R(0)}(x, y) = 0 \text{ für } x \in \partial B_R(0) \text{ und } y \in B_R(0). \quad (13.7)$$

Die Gleichungen (13.6) und (13.7) lassen vermuten, dass  $(x, y) \mapsto G_{B_R(0)}(x, y)$  tatsächlich eine Greensche Funktion ist für (13.4). Man verwende dazu die Ergebnisse aus Abschnitt 12.1.

**Aufgabe 13.1** Wir betrachten das unbeschränkte Gebiet  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$ . Auch hier gibt es eine Greensche Funktion, die eine Lösung liefert für (13.2), jedenfalls wenn  $f$  einen kompakten Träger hat. Geben Sie diese Greensche Funktion an.

## 13.2 Greensche Funktionen auf beliebigen Gebieten

In Sektion 13.1 haben wir eine Lösungsformel für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_R(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_R(0). \end{cases}$$

gefunden:

$$u(x) = \int_{B_R(0)} G_{B_R(0)}(x, y) f(y) dy \quad (13.8)$$

mit

$$G_{B_R(0)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \ln \left( 1 + \frac{(R^2 - |x|^2)(R^2 - |y|^2)}{R^2|x-y|^2} \right) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)} \left( |x-y|^{2-n} - \left| \frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y \right|^{2-n} \right) & \text{für } n \geq 3. \end{cases} \quad (13.9)$$

Die erste Formel in (13.9) ergibt sich übrigens direkt durch (13.5) und die Eigenschaften vom Logarithmus.

Eine Greensche Funktion existiert für allgemeinere Gebiete. Sucht man eine solche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.10)$$

das heißt

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) dy$$

ist eine Lösung (13.10), dann kann man sagen, dass

$$G_{\Omega}(x, y) = F_n(x - y) - h(x, y)$$

mit  $h(\cdot, y)$  eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta h(\cdot, y) = 0 & \text{in } \Omega, \\ h(\cdot, y) = F_n(\cdot - y) & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (13.11)$$

Im Moment führen diese Überlegungen uns nicht weiter. Für die Existenz einer Greenschen Funktion auf  $\Omega$  müsste man erst mal (13.11) lösen können. Nur im Fall einer Kugel hatten wir eine explizite Funktion. Für diesen Fall kann man die

folgenden Eigenschaften zeigen. Auch für andere beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\partial\Omega \in C^1$  gibt es eine Greensche Funktion mit diesen Eigenschaften. Das werden wir hier nicht zeigen.

**Behauptung 13.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^1$ . Eine Greensche Funktion für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.12)$$

hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $G_{\Omega} - F_n \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega)$ , also folgt

$$G_{\Omega} \in C^{\infty}(\Omega \times \Omega \setminus D_{\Omega});$$

2.  $G_{\Omega} \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus D_{\bar{\Omega}})$ ;

3.  $\Delta_x G_{\Omega}(x, y) = 0$  für  $(x, y) \in \Omega \times \Omega \setminus D_{\Omega}$ ;

4.  $G_{\Omega}(x, y) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und  $y \in \Omega$ .

5.  $G_{\Omega}(x, y) = G_{\Omega}(y, x)$  für  $(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus D_{\bar{\Omega}}$ .

Hier ist  $D_A = \{(x, x); x \in A\}$  die Diagonale von  $A \times A$ .

**Bemerkung 13.4.1** Die Eigenschaften 1, 3 und 4 legen die Funktion fest.

**Bemerkung 13.4.2** Für beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gibt es höchstens eine Greensche Funktion für (13.12). Wenn es zwei solcher Funktionen geben würde, sagen wir  $G_1$  und  $G_2$ , dann gibt es ein  $f$  derart, dass  $u_1 = \int_{\Omega} G_1(\cdot, y) f(y) dy$  und  $u_2 = \int_{\Omega} G_2(\cdot, y) f(y) dy$  unterschiedlich sind. Die Differenz

dieser beiden Funktionen ist harmonisch auf  $\Omega$  und für beschränkte Gebiete wird das Maximum und das Minimum von harmonischen Funktionen auf dem Rand angenommen. Also folgt  $u_1 - u_2 = 0$  in  $\Omega$  und der Widerspruch.

Nehmen wir an,  $\Omega$  hat eine solche Greensche Funktion  $G_\Omega$  und dass außerdem gilt

$$y \mapsto G(x, y) \in C^1(\bar{\Omega} \setminus \{x\}) \text{ für alle } x \in \Omega. \quad (13.13)$$

Verwenden wir die Greensche Formel

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial \Omega} (u \partial_\nu v - v \partial_\nu u) d\sigma \quad (13.14)$$

für  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  mit  $-\Delta u = f$  und  $v = G_\Omega(x, \cdot)$  auf  $\Omega \setminus B_\varepsilon(x)$  statt  $\Omega$ , so finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} (u(y) \Delta_y G_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y) \Delta u(y)) dy = \\ \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(x))} (u(y) \partial_{\nu_y} G_\Omega(x, y) - G_\Omega(x, y) \partial_\nu u(y)) d\sigma_y. \end{aligned} \quad (13.15)$$

Aus Eigenschaften 3 und 4 folgt

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} u(y) \Delta_y G_\Omega(x, y) dy = 0$$

und

$$\int_{\partial \Omega} G_\Omega(x, y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y = 0.$$

Aus Eigenschaft 1 folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \partial_{\nu_{\text{in}}} G_\Omega(x, y) d\sigma_y = \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y) \partial_{\nu_{\text{in}}} F_n(x - y) d\sigma_y = u(x), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} G_\Omega(x, y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y = \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} F_n(x - y) \partial_\nu u(y) d\sigma_y = 0. \end{aligned}$$

Kombinieren wir diese Gleichungen mit (13.15) so folgt mit  $\varepsilon \downarrow 0$ , dass

$$\int_{\Omega} G_\Omega(x, y) f(y) dy = u(x) + \int_{\partial \Omega} u(y) \partial_{\nu_y} G_\Omega(x, y) d\sigma_y. \quad (13.16)$$

Dies bedeutet, wir haben eine Darstellungsformel für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial \Omega, \end{cases} \quad (13.17)$$

bekommen.

**Proposition 13.5** Sei  $G_\Omega$  eine Greensche Funktion für  $\Omega$  mit Eigenschaften wie in Behauptung 13.4 und sei (13.13) erfüllt. Dann ist der Poisson-Kern

$$K_\Omega(x, y) = -\partial_{\nu_y} G_\Omega(x, y) \quad (13.18)$$

wohldefiniert für  $y \in \partial\Omega$  und  $x \in \bar{\Omega} \setminus \{y\}$ . Wenn (13.17) eine Lösung hat, wird sie dargestellt durch

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{\Omega}(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} K_{\Omega}(x, y) \varphi(y) d\sigma_y. \quad (13.19)$$

**Bemerkung 13.5.1** Für viele Gebiete  $\Omega$  ist (13.19) sogar eine Lösungsformel für (13.17). Die Formel in (13.19) folgt aus (13.16).

### 13.3 Tricks für Greensche Funktionen auf speziellen Gebieten

Durch (Kelvin-)Spiegelungen kann man auf einigen Gebieten explizite Greensche Funktionen konstruieren. Wir geben ein paar Beispiele.

**Beispiel 13.6** Die Halbkugel

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0 \text{ und } |x| < 1\}$$

hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = F_n(x - y) - F_n(|y|(x - y^*)) - F_n(x - \bar{y}) + F_n(|y|(x - \bar{y}^*))$$

mit  $y^* = |y|^{-2}y$  und  $\bar{y} = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

**Beispiel 13.7** Der Streifen  $S = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_1 < \ell\}$  hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (F_n(x - y + 2k\ell \mathbf{e}_1) - F_n(x - \bar{y} + 2k\ell \mathbf{e}_1))$$

mit  $\bar{y} = (-y_1, y_2, \dots, y_n)$  und  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ .

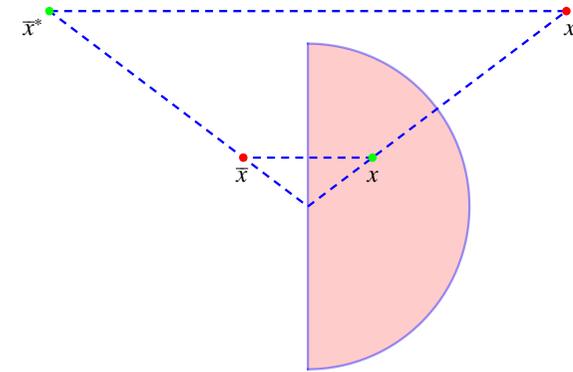


Abbildung 13.2: Konstruktion der Greenschen Funktion auf der Halbkugel.

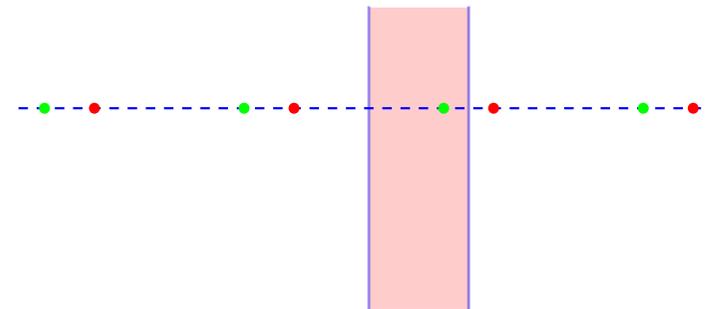


Abbildung 13.3: Konstruktion der Greenschen Funktion auf einem Streifen.

**Beispiel 13.8** Das Tortenstück

$$T = \{(r \cos \phi, r \sin \phi) \in \mathbb{R}^2; r > 0 \text{ und } 0 < \phi < \frac{1}{6}\pi\}$$

hat als Greensche Funktion

$$G_D(x, y) = \sum_{k=0}^5 \left( F_2(x - R_{\pi/3}^k y) - F_2(x - R_{\pi/3}^k \bar{y}) + F_2(|y|(x - R_{\pi/3}^k \bar{y}^*)) - F_2(|y|(x - R_{\pi/3}^k y^*)) \right),$$

wobei  $R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}$ .

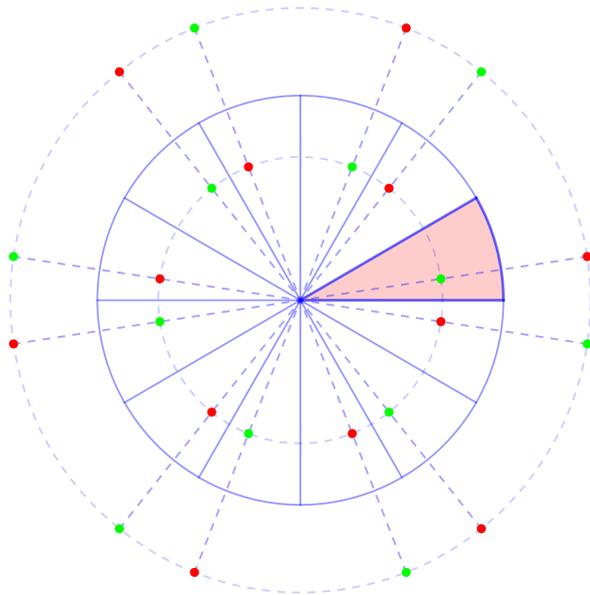


Abbildung 13.4: Konstruktion der Greenschen Funktion auf einem Tortenstück.

## 13.4 Konforme Abbildungen in 2 Dimensionen

**Definition 13.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Eine differenzierbare Abbildung  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt winkeltreu, wenn für alle  $p \in \Omega$  und jedes paar differenzierbare Kurven  $\gamma, \rho$  in  $\Omega$ , die sich in  $p$  schneiden, die Bildkurven  $h \circ \gamma$  und  $h \circ \rho$  sich in  $h(p)$  mit gleichem Winkel schneiden.

Also, wenn  $\tilde{\gamma} = h \circ \gamma$ ,  $\tilde{\rho} = h \circ \rho$  und  $p = \gamma(t_\gamma) = \rho(t_\rho)$ , dann gilt

$$\angle(\gamma'(t_\gamma), \rho'(t_\rho)) = \angle(\tilde{\gamma}'(t_\gamma), \tilde{\rho}'(t_\rho)).$$

Für  $n \geq 3$  gibt es sehr wenige solche winkeltreue Abbildungen. Die einzigen nicht-affinen<sup>2</sup> Abbildungen enthalten da eine Inversion:

$$x \mapsto \frac{x}{|x|^2}.$$

In 2 Dimensionen gibt es viel mehr konforme Abbildungen und da ist es dann schon interessant. Meistens betrachtet man da nur die winkeltreuen Abbildungen, die eine positive Orientierung haben. Die Inversion in 2 Dimensionen hat keine positive Orientierung, aber mit einer zusätzlichen Spiegelung dann schon:

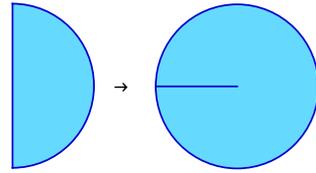
$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{(x_1, -x_2)}{|(x_1, x_2)|^2}.$$

<sup>2</sup>Affine Abbildungen sind Zusammenstellungen von Translationen, Drehungen, Spiegelungen und Skalierungen.

**Aufgabe 13.2** Zeigen Sie, dass  $D = \{(x, y) \in B_1(0); x > 0\}$  durch die Abbildung

$$h(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

bijektiv und winkeltreu auf der Einheitskreisscheibe mit einem Schlitz abgebildet wird.



Man findet

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(t) &= \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}'_1(t) \\ \tilde{\gamma}'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h_1 \circ \gamma)'(t) \\ (h_2 \circ \gamma)'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(\gamma(t)) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(\gamma(t)) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(\gamma(t)) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und für winkeltreue Abbildungen folgt, dass diese Matrix,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

wenn die Abbildung außerdem positiv orientiert ist, an jeder Stelle eine Drehskalierung sein muss:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial h_2}{\partial y}(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial h_2}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial h_1}{\partial y}(x, y) \quad (13.20)$$

Hat man Funktionentheorie gehört, erkennt man hier die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

**Lemma 13.10** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet und sei  $h : \Omega \rightarrow h(\Omega)$  bijektiv und differenzierbar. Wenn  $h$  die Cauchy-Riemann-Gleichungen erfüllt, ist  $h$  konform auf  $\Omega$ .

Für einfach zusammenhängende Gebiete in  $\mathbb{R}^2$  kann man den Riemannschen Abbildungssatz verwenden. Dieser Satz besagt, dass es für jedes solche Gebiet  $\Omega$  eine bikonforme Abbildung  $h : \Omega \rightarrow B_1(0)$  gibt, das heißt,  $h$  ist konform auf  $\Omega$  und hat eine konforme Inverse auf  $B_1(0)$ .

Wenn der Rand von  $\Omega$  eine Jordan-Kurve ist, dann kann man  $h$  erweitern zu einer bijektiven stetigen Funktion  $h : \bar{\Omega} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ .

**Lemma 13.11** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit  $\partial\Omega$  eine Jordan-Kurve und  $h : \bar{\Omega} \rightarrow \overline{B_1(0)}$  eine bijektive stetige Abbildung, die konform von  $\Omega$  auf  $B_1(0)$  ist. Dann gilt

$$G_\Omega(x, y) = G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) \quad \text{für } x, y \in \Omega.$$

**Bemerkung 13.11.1** Eine Jordan-Kurve ist eine injektive Kurve  $\gamma : \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Bemerkung 13.11.2** Der Riemannsche Abbildungssatz besagt zwar, dass es immer so eine bikonforme Abbildung gibt, aber nicht gerade, ob und wie man diese Abbildung berechnen kann. Schwarz und Christoffel<sup>3</sup> waren zwei Mathematiker, die sich beschäftigt haben mit expliziten Konstruktionen solcher Abbildungen, die heute dann auch bekannt sind als Schwarz-Christoffel Abbildungen.

**Beweis.** Man findet mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen in (13.20), dass für  $(x, y) \in \Omega$  und  $u \in$

<sup>3</sup>Elwin Bruno Christoffel, Monschau 1829 – Straßburg 1900, Schüler am Friedrich-Wilhelm-Gymnasium in Köln

$C^2(B_1(0))$  und  $h \in C^2(\Omega; B_1(0))$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ h) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (u \circ h) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (u \circ h) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} u_1 \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial x} u_2 \circ h \right) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} u_1 \circ h + \frac{\partial h_2}{\partial y} u_2 \circ h \right) \\
&= \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 u_{11} \circ h + 2 \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} u_{12} \circ h + \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 u_{22} \circ h \\
&\quad + \frac{\partial^2 h_1}{\partial x \partial x} u_1 \circ h + \frac{\partial^2 h_2}{\partial x \partial x} u_2 \circ h + \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 u_{11} \circ h \\
&\quad + 2 \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} u_{12} \circ h + \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 u_{22} \circ h \\
&\quad + \frac{\partial^2 h_1}{\partial y \partial y} u_1 \circ h + \frac{\partial^2 h_2}{\partial y \partial y} u_2 \circ h \\
&= \left( \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 \right) u_{11} \circ h + \\
&\quad \left( \left( \frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 \right) u_{22} \circ h + \\
&\quad 2 \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} \right) u_{12} \circ h + \\
&\quad (\Delta h_1) u_1 \circ h + (\Delta h_2) u_2 \circ h. \quad (13.21)
\end{aligned}$$

Aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen folgt

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_1}{\partial y} \right)^2 &= \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x}, \\
\left( \frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h_2}{\partial y} \right)^2 &= \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x}, \\
\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial y} &= 0,
\end{aligned}$$

und  $\Delta h_1 = 0 = \Delta h_2$ . Kombinieren wir dies mit (13.21) so folgt

$$\begin{aligned}
\Delta(u \circ h) &= \left( \frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial h_1}{\partial y} \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) ((\Delta u) \circ h) \\
&= J_h (\Delta u) \circ h. \quad (13.22)
\end{aligned}$$

Hier ist  $J_h$  genau die Jacobi-Matrix zu der Abbildung  $h$ , die man bei der Integraltransformation durch  $h$  finden würde.

Im oberen Abschnitt waren  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  Koordinaten innerhalb von  $\Omega$ . Nächstens werden wir wieder mit  $x = (x_1, x_2)$  und  $y = (y_1, y_2)$  Koordinatenpaare in  $\Omega$  beschreiben.

Setzt man

$$v(x) = \int_{y \in \Omega} G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) f(y) dy \text{ für } x \in \Omega,$$

so folgt mit  $\tilde{x} = h(x)$  und der Substitution  $\tilde{y} = h(y)$ , unter

Verwendung von (13.22), dass

$$\begin{aligned} -\Delta v(x) &= -\Delta_x \left( \int_{y \in \Omega} G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) f(y) dy \right) \\ &= -J_h(x) \Delta_{\tilde{x}} \left( \int_{y \in \Omega} G_{B_1(0)}(\tilde{x}, h(y)) f(y) dy \right) \\ &= J_h(x) (-\Delta_{\tilde{x}}) \left( \int_{\tilde{y} \in B_1(0)} G_{B_1(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) f(h^{inv}(\tilde{y})) J_{h^{inv}}(\tilde{y}) d\tilde{y} \right) \\ &= J_h(x) f(h^{inv}(\tilde{x})) J_{h^{inv}}(\tilde{x}) = f(x). \end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile haben wir

$$-\Delta_{\tilde{x}} \int_{\tilde{y} \in B_1(0)} G_{B_1(0)}(\tilde{x}, \tilde{y}) g(\tilde{y}) d\tilde{y} = g(\tilde{x})$$

benutzt, und für die letzte Zeile erinnert man sich, dass  $J_h(x) = (J_{h^{inv}}(h(x)))^{-1}$ .

Weil  $x \in \partial\Omega$  durch  $h$  auf  $\partial B_1(0)$  abgebildet wird, ist auch die Randbedingung erfüllt:

$$G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega \text{ und } y \in \Omega.$$

Anders gesagt, es gilt  $G_{B_1(0)}(h(x), h(y)) = G_\Omega(x, y)$ . ■

Es folgt, dass wenn man eine bikonforme Abbildung  $h : \Omega \rightarrow B_1(0)$  kennt, man die Randwertprobleme

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -\Delta u = \tilde{f} & \text{in } B_1(0), \\ u = 0 & \text{auf } \partial B_1(0), \end{cases} \quad (13.23)$$

ineinander überführen kann durch

$$u = v \circ h^{inv} \text{ und } \tilde{f} = J_{h^{inv}}(\cdot) (f \circ h^{inv})(\cdot),$$

beziehungsweise

$$v = u \circ h \text{ und } f = J_h(\cdot) (\tilde{f} \circ h)(\cdot).$$

**Bemerkung 13.11.3** In höheren Dimensionen gibt es nur sehr wenige konforme Abbildungen, nämlich nur die Abbildungen sind konform, die sich zusammensetzen lassen aus Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen (orthogonale Abbildungen), Skalierungen und Inversionen. Inversionen sind genau die Kelvin-Spiegelungen. Außerdem gilt dies in höheren Dimensionen (13.22) so nicht.

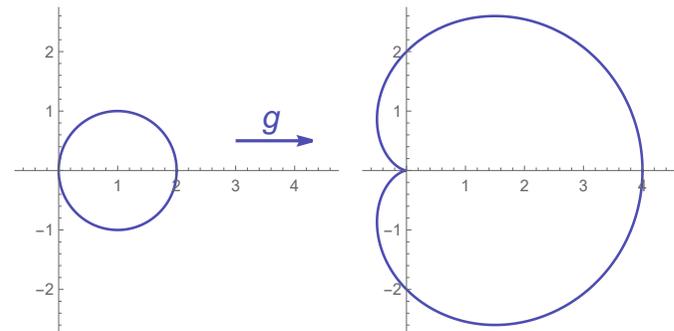


Abbildung 13.5: Kardioide als Bild vom Kreis

**Aufgabe 13.3** Die Kardioide  $K$  findet man, wenn man das Bild von der Einheitskreisscheibe mit  $(1,0)$  als Zentrum unter  $g(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$  betrachtet. Geben Sie die Greensche Funktion an für

$$\begin{cases} -\Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) & \text{für } x \in K, \\ u(x_1, x_2) = 0 & \text{für } x \in \partial K. \end{cases}$$

**Aufgabe 13.4** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Die Funktion

$$h_\alpha(x_1, x_2) = (\operatorname{Re}(x_1 + ix_2)^\alpha, \operatorname{Im}(x_1 + ix_2)^\alpha)$$

erfüllt die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen und man kann Sie verwenden, um eine Greensche Funktion für ein beliebiges Tortenstück  $T$ , wie in Beispiel 13.8, zu finden. Wenn das Tortenstück den Winkel  $\beta \in (0, 2\pi)$  hat, welches  $\alpha$  nehmen Sie und mit der Greenschen Funktion für welches Gebiet fangen Sie an?

**Aufgabe 13.5** Geben Sie 2 Ansätze, wie man eine Greensche Funktion für (13.2) konstruieren kann, wenn  $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ .

## 13.5 Folgen der Greenschen Funktion auf der Kugel

**Lemma 13.12** Sei  $u$  harmonisch auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , dann gilt für jede Kugel  $B_R(x_0)$  mit  $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ , dass

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y \quad (13.24)$$

**Bemerkung 13.12.1** Für  $x = x_0$  finden wir den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen, Proposition 4.4:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (13.25)$$

**Bemerkung 13.12.2** Man sieht, dass  $G_{B_R(0)}(x, y) > 0$  für  $(x, y) \in B_R(0) \times B_R(0)$  und auch, dass

$$K_{B_R(0)}(x, y) > 0 \text{ für } (x, y) \in B_R(0) \times \partial B_R(0).$$

**Beweis.** Weil

$$\nabla_y G_{B_R(0)}(x, y) = \frac{-1}{\omega_n} \left( \frac{y - x}{|x - y|^n} - \frac{\left(\frac{|x|}{R}\right)^2 y - x}{\left|\frac{|x|}{R}y - \frac{R}{|x|x}\right|^n} \right)$$

folgt für  $|y| = R$  und  $\nu = R^{-1}y$ , dass

$$-\partial_{\nu_y} G_{B_R(0)}(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{\left(1 - \left(\frac{|x|}{R}\right)^2\right) y}{|x - y|^n} \cdot \frac{y}{R} = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n |x - y|^n}.$$

Die Greensche Funktion für  $B_R(x_0)$  folgt aus (13.9), wenn man sie um  $x_0$  verschiebt, das heißt

$$K_{B_R(x_0)} = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n |x - y|^n},$$

und mit Proposition 13.5 folgt das Lemma.  $\blacksquare$

### 13.5.1 Das starke Maximum-Prinzip

**Theorem 13.13 (Das starke Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen)** Sei  $u$  harmonisch auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Wenn  $u$  ein Maximum oder Minimum innerhalb hat, dann ist  $u$  konstant.

**Beweis.** Nehmen wir an,  $u$  hat ein Maximum in  $x_0 \in \Omega$ . Aus dem Mittelwertsatz, Lemma 13.12 mit  $x = x_0$  folgt, dass  $u = u(x_0)$  gilt auf jeder Sphäre innerhalb  $\Omega$  mit  $x_0$  als Zentrum. Weil  $\Omega$  zusammenhängend ist, kann man für jedes  $x^*$  einen Weg innerhalb  $\Omega$  finden, der  $x_0$  mit  $x^*$  verbindet, und das Ergebnis folgt, wenn man diesen Weg mit passenden Kugeln überdeckt.  $\blacksquare$

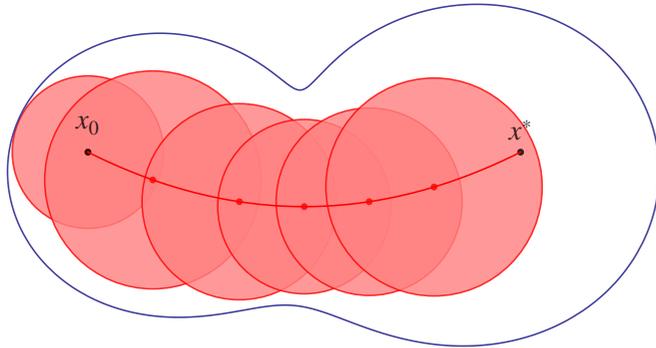


Abbildung 13.6: Man argumentiert von Kugel zu Kugel.

**Korollar 13.14** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u \in C(\bar{\Omega})$  harmonisch innerhalb  $\Omega$ . Dann nimmt  $u$  sein Maximum und sein Minimum an auf  $\partial\Omega$ .

**Beweis.** Eine stetige Funktion auf der kompakten Menge  $\bar{\Omega}$  hat ein Maximum (und ein Minimum) und wegen des letzten Theorems kann es nicht im Innern liegen. ■

**Korollar 13.15** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Dann hat

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.26)$$

höchstens eine Lösung  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

**Beweis.** Wenn es zwei Lösungen gäbe, verwende man das letzte Korollar für die Differenz beider Lösungen. ■

**Theorem 13.16 (Die Ungleichung von Harnack<sup>4</sup> auf einer Kugel)** Sei  $u$  harmonisch und positiv auf  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

$$\frac{(R - |x|) R^{n-2}}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{(R + |x|) R^{n-2}}{(R - |x|)^{n-1}} u(0).$$

**Beweis.** Man verwendet für den Integralkern in (13.24) mit  $x_0 = 0$ , dass für  $|y| = R$  folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{n-1}} &= \frac{R^2 - |x|^2}{(R + |x|)^n} \leq \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \\ &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{(R - |x|)^n} = \frac{R + |x|}{(R - |x|)^{n-1}}. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Kombiniert man (13.24) mit  $x_0 = 0$ , (13.27) und

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) d\sigma_y$$

und die Annahme, dass  $u \geq 0$  gilt, so folgt das Ergebnis. ■

**Aufgabe 13.6** Beweisen Sie mit Theorem 13.16, dass eine positive harmonische Funktion auf  $\mathbb{R}^n$  konstant ist. Hinweis:  $R \rightarrow \infty$ .

**Theorem 13.17 (Die Ungleichung von Harnack)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u$  positiv und harmonisch innerhalb  $\Omega$ . Dann gibt es für jede zusammenhängende offene Teilmenge  $A$  mit  $\bar{A} \subset \Omega$  eine Konstante  $c_A$  derart, dass

$$\sup_{x \in A} u(x) \leq c_A \inf_{x \in A} u(x).$$

<sup>4</sup>Carl Gustav Axel Harnack, Tartu (damals Russland, heute Estland) 1851 – Dresden 1888.

**Beweis.** Weil  $\bar{A}$  kompakt ist und  $u$  stetig ist in  $\Omega$ , gibt es  $x_0, x^* \in \bar{A}$  mit

$$u(x_0) = \inf_{x \in A} u(x) \text{ und } u(x^*) = \sup_{x \in A} u(x).$$

Weil  $A$  zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve, die  $x_0$  mit  $x^*$  innerhalb von  $A$  verbindet. Man nehme auf diese Kurve Punkte  $x_1, \dots, x_k = x^*$  derart, dass  $|x_i - x_{i+1}| < r$  für  $i = 1, \dots, k$  und derart, dass  $\bigcup_{i=0}^k \overline{B_{2r}(x_i)} \subset \Omega$  für ein  $r > 0$ . Dass so etwas geht, folgt aus der Kompaktheit. Durch Anwendung von Theorem 13.16 auf  $B_{2r}(x_i)$  findet man, dass

$$u(x_{i+1}) \leq \frac{(r + \frac{1}{2}r) r r^{n-2}}{(r - \frac{1}{2}r)^{n-1}} u(x_i) = 3 \cdot 2^{n-2} u(x_i).$$

Nach  $k$  Schritte folgt  $u(x^*) \leq (3 \cdot 2^{n-2})^k u(x_0)$  und das gewünschte Ergebnis. ■

### 13.5.2 Harmonisch auf Kugeln

**Lemma 13.18** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und sei  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ . Dann gilt  $u \in C^\infty(\Omega)$  und für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gibt es  $C_{k,n}$  derart, dass

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_{k,n}}{\omega_n r^{n+k}} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy$$

für jede Kugel  $B_r(x_0) \subset \Omega$  und  $k = |\alpha|$  mit  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

**Beweis.** Für  $|\alpha| = 0$  folgt diese Aussage aus dem Mittelwertsatz. Durch Lemma 13.12 gilt

$$u(x) = \frac{(\frac{1}{2}r)^2 - |x - x_0|^2}{\frac{1}{2}r\omega_n} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y$$

und wenn man  $x \in B_{r/4}(x_0)$  nimmt, gilt

$$\begin{aligned} |D^\alpha u(x)| &= \sum_{\beta \leq \alpha} \left| D_x^\beta \left( \frac{(\frac{1}{2}r)^2 - |x - x_0|^2}{\frac{1}{2}r\omega_n} \right) \right| \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \left| D_x^{\alpha-\beta} \left( \frac{1}{|x-y|^n} \right) \right| |u(y)| d\sigma_y \\ &\leq C_{|\alpha|} \sum_{\ell \leq 2} r^{1-\ell} \int_{\partial B_{r/2}(x_0)} \frac{1}{r^{n+|\alpha|-\ell}} |u(y)| d\sigma_y \\ &\leq C'_{|\alpha|} r^{-|\alpha|} \|u\|_{L^\infty(\partial B_{r/2}(x_0))}. \end{aligned} \tag{13.28}$$

Aus (4.14) folgt für  $z \in \partial B_{r/2}(x_0)$ , dass  $B_{r/2}(z) \subset B_r(x_0)$  und

$$\begin{aligned} |u(z)| &= \left| \frac{n}{\omega_n (r/2)^n} \int_{B_{r/2}(z)} u(y) dy \right| \\ &\leq \frac{n}{\omega_n (r/2)^n} \int_{B_r(x_0)} |u(y)| dy. \end{aligned} \tag{13.29}$$

Kombiniert man (13.28) und (13.29) so folgt das Ergebnis. ■

**Theorem 13.19 (Liouville<sup>5</sup>)** Wenn  $u$  harmonisch und beschränkt ist auf  $\mathbb{R}^n$ , dann ist  $u$  konstant.

**Beweis.** Aus dem letzten Lemma folgt

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{C_1}{R^{n+1}} \int_{B_R(x)} |u(y)| dy$$

und wenn  $u$  beschränkt ist, folgt  $|\nabla u(x)| \leq C_1 \omega_n \|u\|_\infty R^{-1}$  für alle  $R > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Das bedeutet  $|\nabla u(x)| = 0$  und  $u$  ist konstant. ■

<sup>5</sup>Joseph Liouville, Französischer Mathematiker, 1809 – 1882

**Proposition 13.20** Sei  $G_{B_R(0)}$  die Greensche Funktion für  $B_R(0)$  wie in (13.9) und sei  $K_{B_R(0)}(x, y) = -\partial_{\nu_y} G_{B_R(0)}(x, y)$ . Dann ist

$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{für } x \in \partial B_R(0), \\ \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) \varphi(y) d\sigma_y & \text{für } x \in B_R(0), \end{cases}$$

die eindeutige Lösung in  $C(\overline{B_R(0)}) \cap C^\infty(B_R(0))$  von

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } B_R(0), \\ u = \varphi & \text{auf } \partial B_R(0), \end{cases} \quad (13.30)$$

für  $\varphi \in C(\partial B_R(0))$ .

**Beweis.** Die Eindeutigkeit folgt aus dem Maximumprinzip. Die Tatsache, dass

$$\Delta K_{B_R(0)}(x, y) = 0 \text{ für } x \in B_R(0)$$

kontrolliert man direkt; singuläre Stellen von  $x \mapsto K_{B_R(0)}(x, y)$  findet man nur für  $x \in \partial B_R(0)$ . Man soll nur noch beweisen, dass  $u$  stetig ist beim Rand. Dazu bemerkt man erst, dass

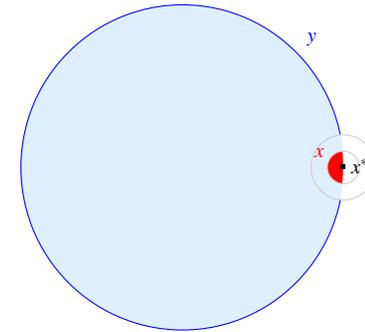
$$\int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y = 1.$$

Diese Identität folgt aus der Darstellungsformel, weil  $u(x) = 1$  eine Lösung ist von (13.30) mit  $\varphi = 1$ . Sei nun  $x_* \in \partial B_R(0)$  und sei  $\delta > 0$  derart, dass

$$y \in \partial B_R(0) \text{ und } |x_* - y| < \delta \implies |\varphi(x_*) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} |u(x) - u(x_*)| &= |u(x) - \varphi(x_*)| \\ &= \left| \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) (\varphi(y) - \varphi(x_*)) d\sigma \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| < \delta}} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y + \\ &\quad 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| \geq \delta}} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y \\ &\leq \varepsilon \int_{\partial B_R(0)} K_{B_R(0)}(x, y) d\sigma_y + \\ &\quad 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\substack{\partial B_R(0) \\ |x_* - y| \geq \delta}} \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n |x - y|^n} d\sigma_y = (*). \end{aligned}$$



Wenn  $|x - x_*| < \frac{1}{2}\delta$  und  $|x_* - y| \geq \delta$  gilt, folgt

$$|x - y| \geq |x_* - y| - |x - x_*| \geq \delta - \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta$$

und

$$\begin{aligned}
 (*) &\leq \varepsilon + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n \left(\frac{1}{2}\delta\right)^n} d\sigma_y \\
 &\leq \varepsilon + 2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} (R^2 - |x|^2) R^{n-2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n.
 \end{aligned}$$

Weil  $(R^2 - |x|^2) = (R + |x|)(R - |x|) \leq 2R(|x_*| - |x|) \leq 2R|x - x_*|$  gilt, können wir  $x$  genügend nahe an  $x_*$  nehmen um  $2 \|\varphi\|_{L^\infty(\partial B_R(0))} (R^2 - |x|^2) R^{n-2} \left(\frac{2}{\delta}\right)^n$  beliebig klein zu bekommen. Genügend klein wie zum Beispiel  $|u(x) - u(x_*)| < 2\varepsilon$ . Weil  $\varepsilon > 0$  beliebig ist, ist  $u$  stetig in  $x_*$ . ■

**Theorem 13.21** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $u \in C(\Omega)$ . Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

- $u$  ist harmonisch.
- für alle  $B_R(x)$  mit  $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$  gilt

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y.$$

**Beweis.** Die eine Richtung ist der Mittelwertsatz. Für die andere Richtung verwenden wir, dass wir eine Lösungsformel haben für harmonische Funktionen auf Kugeln bei vorgeschriebenen stetigen Randwerten. Das heißt, für jede Kugel  $B_R(x_0)$  mit  $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$  ist

$$w(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y$$

harmonisch innerhalb  $B_R(x_0)$  und stetig auf  $\overline{B_R(x_0)}$ .

Man hat also  $w - u \in C(\overline{B_R(x_0)})$  und sogar

$$w(x) - u(x) = 0 \text{ für } x \in \partial B_R(x_0). \quad (13.31)$$

Dann hat  $w - u$  die folgende Mittelwerteigenschaft auf jeder Sphäre  $\partial B_r(x_*)$  innerhalb  $B_R(x_0)$ :

$$w(x_*) - u(x_*) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_*)} (w(y) - u(y)) d\sigma_y,$$

und das bedeutet, dass  $w - u$  kein Extrem in  $x_*$  haben kann. Anders gesagt, die Funktion  $w - u$  kann ihr Maximum und Minimum nur auf dem Rand  $\partial B_R(x_0)$  annehmen. Wegen (13.31) bedeutet es  $w = u$  auf  $\overline{B_R(x_0)}$  und dass  $u$  harmonisch ist. ■

**Korollar 13.22** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$  harmonisch auf  $\Omega$ . Wenn  $u_k$  lokal gleichmäßig zu  $u$  konvergiert, so ist auch  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ .

**Beweis.** Wenn  $u_k \rightarrow u$  konvergiert, dann gilt für jede Kugel in  $\Omega$ , dass

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u_k(y) d\sigma_y \\
 &= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(y) d\sigma_y \\
 &= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y.
 \end{aligned}$$

Wegen Theorem 13.21 ist  $u$  harmonisch. ■

**Korollar 13.23** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$  harmonisch auf  $\Omega$ . Nehme an, dass die Funktionen lokal gleichmäßig beschränkt sind. Dann existiert eine Teilfolge  $\{u_{k_\ell}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $u$  konvergiert und die harmonisch ist auf  $\Omega$ .

**Beweis.** Lemma 13.18 zeigt, dass auf jeder Kugel  $B_R(x_1)$  mit  $\overline{B_R(x_1)} \subset \Omega$  die Ableitungen  $\nabla u_k$  gleichmäßig beschränkt sind. Wegen der Offenheit von  $\Omega$  gibt es  $r_1 > 0$  mit  $B_{R+2r_1}(x_1) \subset \Omega$  und man wende das Ergebnis an auf  $B_{r_1}(x_0)$  für  $x_0 \in \overline{B_R(x_1)}$ . Dann folgt, dass die  $u_k$  gleichgradig stetig sind auf  $\overline{B_R(x_1)}$ . Der Satz von Arzelá-Ascoli besagt, dass es eine konvergente Teilfolge gibt. Korollar 13.22 liefert die gewünschte Teilfolge. ■

**Aufgabe 13.7** Wir betrachten die Funktionen  $u_k : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ , definiert durch

$$u_k(r \cos \varphi, r \sin \varphi) := r^k \cos(k\varphi).$$

1. Zeigen Sie,  $u_k(1, 0) = 1$ .
2. Zeigen Sie,  $u_k$  ist stetig auf  $B_1(0)$ .
3. Zeigen Sie,  $u_k$  ist harmonisch auf  $B_1(0)$ .
4. Zeigen Sie,  $u_k$  ist gleichmäßig beschränkt auf  $B_1(0)$ .
5. Zeigen Sie,  $u_k$  konvergiert auf  $B_1(0)$ .
6. Ist diese Konvergenz gleichmäßig auf  $B_1(0)$ ?

## Existenz nach Perron

### 14.1 Das Theorem von Perron

Wie schon angekündigt liefert die Methode von Perron für

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (14.1)$$

eine Lösung  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , angenommen  $\varphi$  ist stetig und  $\Omega$  genügend „nett“. Wir haben auch gesehen, dass  $\Omega = B_1(0) \setminus \{0\}$  kein nettes Gebiet ist. Es wird Zeit für eine Bedingung, die uns  $\Omega$  genügend nett sein läßt.

**Bedingung 14.1** Ein Gebiet  $\Omega$  erfüllt die äußere Kugelbedingung, wenn es für jedes  $x^* \in \partial\Omega$  eine Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  gibt mit  $x^* \in \partial B$ .

**Bemerkung 14.1.1** Diese äußere Kugelbedingung läßt sich leicht als ausreichende Bedingung verwenden. Tatsächlich kann man diese Bedingung abschwächen. Eine äußere Kegelbedingung (e statt u!) reicht auch. Leider wird der Beweis aufwendiger.

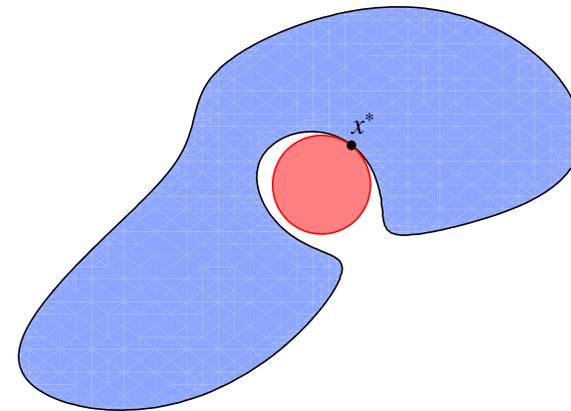


Abbildung 14.1: Die äußere Kugelbedingung.

**Bemerkung 14.1.2** Isolierte Punkte als Teil des Randes erfüllen klar weder die äußere Kugelbedingung noch eine äußere Kegelbedingung. Derartige Ränder sind jedoch nicht die einzigen, die Schwierigkeiten bereiten. Henri Lebesgue hat gezeigt, dass es auch zusammenhängende Ränder gibt, die keine Lösung in  $C(\bar{\Omega})$  zulassen. Sein Gegenbeispiel in drei Dimensio-

nen in der Form einer hineingerichteten Spitze ist als das „Lebesgue thorn“ bekannt geworden.

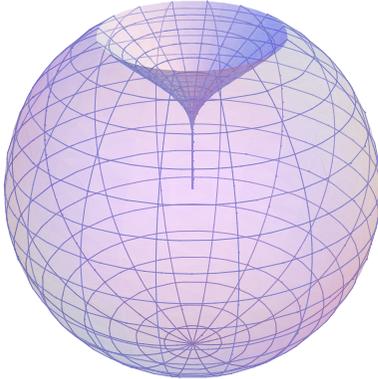


Abbildung 14.2: Bild einer Kugel mit einem „Lebesgue thorn“. Das Horn (oder der Dorn) ist hier wie folgt definiert:  $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < \exp(-1/z) \text{ für } z > 0\}$ . Also gilt  $\Omega = B_1(0) \setminus D$ .

**Aufgabe 14.1** Wir setzen  $u(x, y, z) := 1 + z \ln(x^2 + y^2)$ .

1. Berechnen Sie  $\Delta u(x, y, z)$ .
2. Zeigen Sie, dass  $u(x, y, z) < 0$  genau dann, wenn  $(x, y, z) \in D$  mit  $D$  dem Lebesguen Thorn.
3. Ist  $u$  eine positive harmonische Funktion auf  $\Omega$  von Abbildung 14.2?

**Theorem 14.2 (Perron)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, das die äußere Kugelbedingung erfüllt. Dann gibt es für jedes  $\varphi \in C(\partial\Omega)$  eine eindeutige Lösung  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  zu (14.1).

## 14.2 Minimum und Infimum bei superharmonisch

Man definiert

$$S_\varphi(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C(\bar{\Omega}) ; \begin{array}{l} u \text{ superharmonisch in } \Omega \\ u \geq \varphi \text{ auf } \partial\Omega \end{array} \right\}$$

und sucht die Lösung durch

$$u(x) := \inf \{ v(x) ; v \in S_\varphi(\bar{\Omega}) \}.$$

Wir werden das Theorem in mehreren Schritten beweisen.

**Lemma 14.3**  $S_\varphi(\bar{\Omega})$  ist nicht leer und für  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  gilt  $u(x) \geq \min \{ \varphi(x) ; x \in \partial\Omega \}$ .

**Beweis.** Weil  $\varphi$  stetig ist auf einer beschränkten und abgeschlossenen Menge, existiert  $\min \{ \varphi(x) ; x \in \partial\Omega \}$  und  $\max \{ \varphi(x) ; x \in \partial\Omega \}$ . Die Konstante  $m = \max \{ \varphi(x) ; x \in \partial\Omega \}$  liefert eine konstante Funktion in  $S_\varphi(\bar{\Omega})$ . Weiter gilt es, dass

$$u(x) \geq \min \{ u(x) ; x \in \partial\Omega \} \geq \min \{ \varphi(x) ; x \in \partial\Omega \},$$

weil eine superharmonische Funktion ihr Minimum am Rand annimmt. ■

**Lemma 14.4** Sei  $u_1, u_2 \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und definiere

$$u(x) = \min(u_1(x), u_2(x)).$$

Dann gilt  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 14.4.1** Durch wiederholte Anwendung folgt auch:  $u_1, \dots, u_k \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  impliziert

$$x \mapsto \min(u_1(x), \dots, u_k(x)) \in S_\varphi(\bar{\Omega}).$$

**Beweis.** Sei  $x_0 \in \Omega$  und nehme an,  $u(x_0) = u_1(x_0)$ . Dann gilt für  $B_r(x_0) \subset \Omega$ , dass

$$\begin{aligned} u(x_0) = u_1(x_0) &\geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u_1(y) d\sigma_y \\ &\geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Die Bedingung  $u \geq \varphi$  ist direkt erfüllt. ■

**Aufgabe 14.2** Ist die Funktion  $(x, y) \mapsto |x + y| + |x - y|$  sub- oder superharmonisch auf  $\mathbb{R}^2$ ?

**Lemma 14.5** Sei  $u \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und sei  $B_R(x_0) \subset \Omega$ . Definiere

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \bar{\Omega} \setminus B_R(x_0), \\ \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{u(y)}{|x - y|^n} d\sigma_y & \text{für } x \in B_R(x_0). \end{cases} \quad (14.2)$$

Dann gilt  $\tilde{u} \leq u$  und  $\tilde{u} \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ .

**Bemerkung 14.5.1** Die Änderung einer superharmonischen Funktion  $u$  zu  $\tilde{u} \leq u$  nennt man „harmonic lowering“ von  $u$ . Besser bekannt ist die ähnliche Änderung einer subharmonischen Funktion  $u$  zu  $\tilde{u} \geq u$ , die als „harmonic lifting“ von  $u$  bezeichnet wird.

**Beweis.** Die Funktion  $u - \tilde{u}$  ist superharmonisch und identisch 0 auf  $\partial B_R(x_0)$ . Wegen Proposition 13.20 ist  $\tilde{u}$  und darum auch  $u - \tilde{u}$  stetig. Es folgt  $u - \tilde{u} \geq 0$  in  $B_R(x_0)$ . Außerhalb gilt  $u - \tilde{u} = 0$ . ■

**Proposition 14.6** Sei  $\Omega$  beschränkt und  $\varphi \in C(\partial\Omega)$ . Dann ist die Funktion

$$u(x) := \inf \{v(x); v \in S_\varphi(\bar{\Omega})\}. \quad (14.3)$$

harmonisch.

**Beweis.** Sei  $x_0 \in \Omega$  und sei  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset S_\varphi(\bar{\Omega})$  derart, dass  $u_k(x_0) \rightarrow u(x_0)$ . Setzen wir

$$U_k(x) := \min \{u_1(x), \dots, u_k(x)\},$$

so ist  $\{U_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge für alle  $x \in \Omega$ . Sei  $B_R(x_0) \subset \Omega$  und definiere  $\tilde{U}_k$ , wie in (14.2). Auf  $B_R(x_0)$  sind die Funktionen  $\tilde{U}_k$  harmonisch. Korollar 13.23 liefert eine Teilfolge, die gegen eine harmonische Funktion  $U$  auf  $B_{R/2}(x_0)$  konvergiert. Aus dieser Konstruktion folgt  $U(x_0) = u(x_0)$  und  $U(x) \geq u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Wir wollen zeigen, dass  $U(x) = u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Nehmen wir an, dass es  $x_1 \in B_{R/2}(x_0)$  gibt mit  $U(x_1) > u(x_1)$ . Dann gibt es  $v \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  mit

$$U(x_1) > v(x_1) \geq u(x_1). \quad (14.4)$$

Ähnlich wie vorhin betrachten wir

$$V_k(x) := \min \{v(x), u_1(x), \dots, u_k(x)\}$$

und finden eine harmonische Funktion  $V$  auf  $B_{R/2}(x_0)$  mit

$$U(x_0) = V(x_0)$$

und  $U(x) \geq V(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ . Dann folgt aus der Mittelwerteeigenschaft, Proposition 4.4, dass  $U = V$  auf  $\overline{B_{R/2}(x_0)}$  im Widerspruch zu (14.4). Also gilt  $U(x) = u(x)$  auf  $B_{R/2}(x_0)$ , und  $u$  ist harmonisch in  $B_{R/2}(x_0)$ . Weil  $x_0$  beliebig ist, ist  $u$  harmonisch auf  $\Omega$ . ■

### 14.3 Beweis mit Barrieren am Rand

Wir müssen noch zeigen, dass diese Lösung  $u$  stetig auf  $\bar{\Omega}$  ist. Wenn  $u \in C(\bar{\Omega})$ , dann folgt aus dem Maximum Prinzip, dass die Lösung eindeutig ist.

**Definition 14.7** Eine Funktion  $b \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Barrierenfunktion bezüglich  $x^* \in \partial\Omega$ , wenn

1.  $b$  ist superharmonisch in  $\Omega$ ;
2.  $b(x^*) = 0$ ;
3.  $b(x) > 0$  für  $x \in \bar{\Omega} \setminus \{x^*\}$ .

**Lemma 14.8** Wenn  $\Omega$  die äußere Kugelbedingung erfüllt an der Stelle  $x^* \in \partial\Omega$ , dann existiert eine Barrierenfunktion bezüglich  $x^* \in \partial\Omega$ .

**Beweis.** Sei  $B_r(x_1)$  eine solche Kugel. Dann definiere für  $n \geq 3$  die Funktion

$$b(x) = r^{2-n} - |x - x_1|^{2-n}.$$

Die Funktion ist sogar harmonisch. Die beiden anderen Eigenschaften in Definition 14.7 zeigt man direkt.

Für  $n = 2$  setzt man

$$b(x) = \log|x - x_1| - \log r$$

als Barrierenfunktion. ■

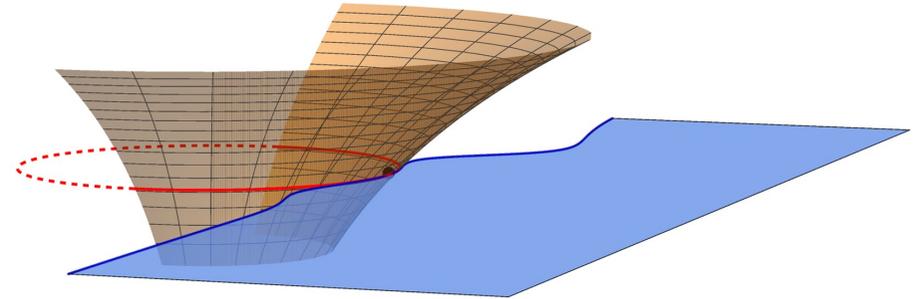


Abbildung 14.3: Barrierenfunktion an einem Randpunkt vom blauen  $\Omega$  mit in rot  $\partial B_r(x_0)$

**Aufgabe 14.3** Zeigen Sie, dass für  $\Omega = B_1(0)$  an jedem Randpunkt  $x_0$  die Funktion

$$f(x) = 1 - x \cdot x_0$$

eine Barrierenfunktion ist.

In zwei Dimensionen kann man Barrierenfunktionen konstruieren, die lokal nur eine äußere Kugelbedingung voraussetzen mit Hilfe der Funktionen, die in Abbildung 2.2 dargestellt sind.

**Proposition 14.9** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet, das die äußere Kugelbedingung erfüllt an der Stelle  $x^* \in \partial\Omega$ . Dann gilt für die Funktion  $u$  in (14.3), dass

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^* \\ x \in \Omega}} u(x) = \varphi(x^*). \quad (14.5)$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $\delta > 0$  derart, dass

$$|x - x^*| < \delta \text{ und } x \in \partial\Omega \implies |\varphi(x) - \varphi(x^*)| < \varepsilon.$$

Man nehme  $k_1 > 0$  derartig, dass

$$|x - x^*| \geq \delta \text{ und } x \in \partial\Omega \implies k_1 b(x) > \varphi(x) - \varphi(x^*).$$

Dann gilt für die Funktion  $\bar{w}$ , definiert durch

$$\bar{w}(x) := \varphi(x^*) + \varepsilon + k_1 b(x)$$

dass  $\bar{w} \in S_\varphi(\bar{\Omega})$ . Es gilt also, dass

$$u(x) \leq \bar{w}(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}. \quad (14.6)$$

Auf ähnliche Art kann man auch eine harmonische Funktion  $n(x)$  finden durch

$$n(x) := -\inf \{v(x); v \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})\}. \quad (14.7)$$

Für  $v_1 \in S_\varphi(\bar{\Omega})$  und  $v_2 \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})$  folgt  $v_1 + v_2 \in S_0(\bar{\Omega})$  und weil  $v_1 + v_2$  superharmonisch ist, dass  $v_1 + v_2 \geq 0$  auf  $\bar{\Omega}$ . Anders gesagt

$$v_1 \geq -v_2 \text{ auf } \bar{\Omega}.$$

Es folgt dann auch, dass für  $x \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} u(x) &= \inf \{v_1(x); v_1 \in S_\varphi(\bar{\Omega})\} \\ &\geq \sup \{-v_2(x); v_2 \in S_{-\varphi}(\bar{\Omega})\} = n(x). \end{aligned} \quad (14.8)$$

Auch hier kann man zeigen, dass es  $k_2 > 0$  gibt mit der Funktion

$$\underline{w}(x) := \varphi(x^*) - \varepsilon - k_2 b(x)$$

derart, dass

$$\underline{w}(x) \leq n(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}. \quad (14.9)$$

Aus (14.6-14.8-14.9) folgt

$$\underline{w}(x) \leq n(x) \leq u(x) \leq \bar{w}(x) \text{ für } x \in \bar{\Omega}$$

und dass es  $\delta_1 > 0$  gibt so, dass für  $x \in \bar{\Omega}$  und  $|x - x^*| < \delta_1$  folgt

$$|u(x) - \varphi(x^*)| < 2\varepsilon.$$

Weil  $\varepsilon$  beliebig ist, ist (14.5) erfüllt. ■



## Laplace und Regularität

### 15.1 Bemerkungen zur Regularität

Wir haben gezeigt, dass es für  $f \in C^1(\bar{\Omega})$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit einer äußeren Kugelbedingung, eine Lösung  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  gibt zu

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.1)$$

Wenn man vergleicht mit dem eindimensionalen Randwertproblem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{für } x \in (a, b), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial(a, b), \end{cases} \quad (15.2)$$

dann folgt für (15.2), dass für  $f \in C^1([a, b])$  die Lösung  $u$  sogar in  $C^3([a, b])$  liegt. Und wenn man nur  $f \in C([a, b])$  hat, folgt immer noch eine Lösung  $u \in C^2([a, b])$ . Ganz allgemein kann man für (15.2) direkt zeigen, dass  $f \in C^{k,\gamma}([a, b])$  eine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}([a, b])$  ergibt.

Kann man ähnliches vielleicht auch für (15.1) erwarten? Eine extra Schwierigkeit hat man durch den Rand, der im eindimensionalen Fall sehr trivial ist. Wenn wir nun annehmen,

dass der Rand sehr schön ist, sagen wir  $\partial\Omega \in C^\infty$ , oder wenn wir vom Rand weg bleiben, gibt es dann ähnliches?

Die Perronsche Methode gibt uns eine Lösung zu (15.1) in zwei Schritten:

1. Man setzt

$$u_1(x) = \int_{\Omega} F_n(x-y) f(y) dy \quad (15.3)$$

und bekommt für  $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , dass  $u_1 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  mit  $-\Delta u_1(x) = f(x)$  für  $x \in \Omega$ .

2. Man findet anschließend eine Lösung  $u_2 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  von

$$\begin{cases} -\Delta u_2(x) = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u_2(x) = u_1(x) & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (15.4)$$

Die Funktion  $u = u_1 - u_2$  ist die Lösung von (15.1). Die Eindeutigkeit folgt dabei aus dem Maximum-Prinzip.

## 15.2 Regularität und Fundamentallösung

In Proposition 12.3 haben wir schon bewiesen, dass für  $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  folgt, dass für  $w$ , definiert durch

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy, \quad (15.5)$$

gilt  $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Hier ist  $F_n$  die Fundamentallösung aus Definition 12.1. Wenn  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  gilt, dann kann man wie folgt verfahren:

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} w(x) &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) f(y) dy = \\ &= \partial_{x_i} \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) f(x-z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(z) \partial_{x_i} f(x-z) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) \partial_{y_i} f(y) dy. \end{aligned} \quad (15.6)$$

Man kann also eine Ableitung durch das Integralzeichen schieben.

Für  $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\partial_i f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  und deshalb folgt aus Proposition 12.3 für (15.6), dass  $\partial_i w \in C^2(\mathbb{R}^n)$  gilt. Dies gilt für jedes  $i$ , also gilt  $w \in C^3(\mathbb{R}^n)$ . Man kann diese Schritte beliebig wiederholen und so folgt:

**Lemma 15.1** Sei  $k \in \mathbb{N}^+$ . Für  $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$  und  $w$  definiert in (15.5) gilt  $w \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ .

Mit mehr Mühe kann man sogar zeigen, dass für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1)$  gilt:

$$f \in C_0^{k,\gamma}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow w \in C^{k+2,\gamma}(\mathbb{R}^n).$$

Die Hölder-Stetigkeit der Lösung ist +2 besser als die Hölder-Stetigkeit der rechten Seite. Für  $C_0^k(\mathbb{R}^n)$  (oder  $C_0^{k,1}(\mathbb{R}^n)$ ) und Dimensionen  $n \geq 2$  gilt die Erhöhung der Differenzierbarkeit um 2 nicht:

$$f \in C_0^k(\mathbb{R}^n) \not\Rightarrow w \in C^{k+2}(\mathbb{R}^n).$$

Wir werden nun ein Beispiel geben, bei dem  $f \in C(\bar{\Omega})$  und die Lösung von (15.1) nicht zweimal stetig differenzierbar ist.

**Beispiel 15.2** Die Funktion

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \log(-\log(x_1^2 + x_2^2)) & \text{für } x \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x = (0, 0), \end{cases}$$

ist eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{für } x \in B_r(0), \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial B_r(0), \end{cases} \quad (15.7)$$

mit  $r = 1/\sqrt{e}$  und

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{4x_1 x_2 (1 - 2 \log(x_1^2 + x_2^2))}{(x_1^2 + x_2^2) (\log(x_1^2 + x_2^2))^2} & \text{für } x \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } x = (0, 0). \end{cases}$$

Die Funktion  $f$  ist stetig auf  $\overline{B_r(0)}$ , denn die rationale Teilfunktion  $\frac{4x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$  ist beschränkt und der Logarithmus hoch 2 im Nenner sorgt für Konvergenz gegen 0 für  $x \rightarrow (0, 0)$ . Man kann auch zeigen, dass  $u \in C^{1,\gamma}(\overline{B_r(0)})$  für jede  $\gamma < 1$ . Die Funktion  $u$  ist aber nicht zweimal differenzierbar in  $(0, 0)$ . Die

zweite Ableitung von  $u$  nach zum Beispiel  $x_1$  ist nicht definiert in  $(0, 0)$  und unbeschränkt bei  $(0, 0)$ :

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2} u(x_1, x_2) = \log(-\log(x_1^2 + x_2^2)) + \frac{2x_1^4 + 2x_2^4}{(x_1^2 + x_2^2)^2 \log(x_1^2 + x_2^2)} - \frac{4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2 (\log(x_1^2 + x_2^2))^2} \quad (15.8)$$

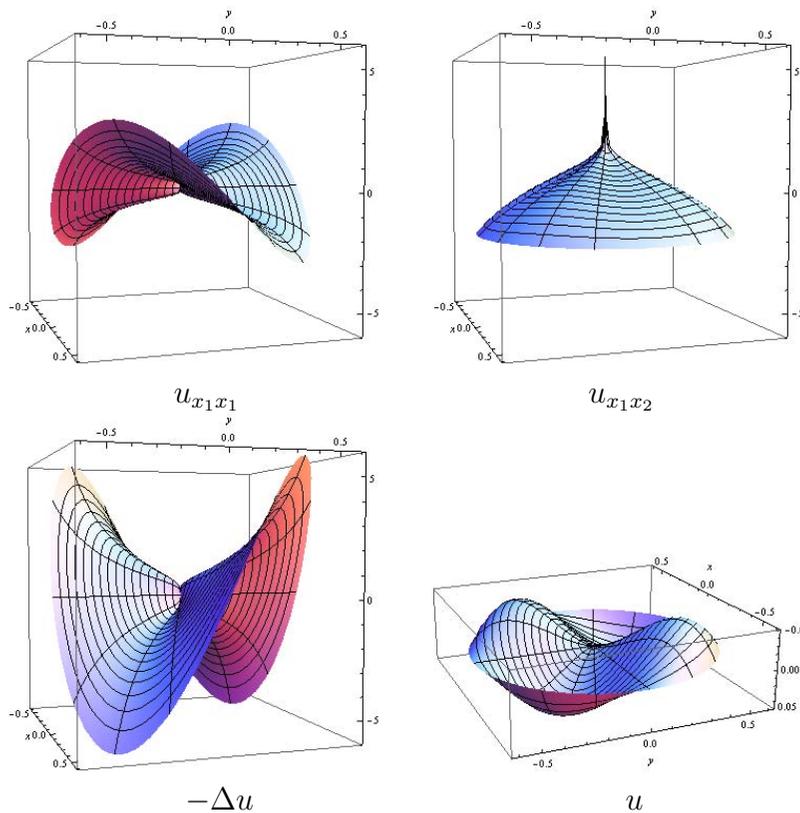


Abbildung 15.1: Skizzen zu den Funktionen aus Beispiel 15.2:

Von den drei Termen in (15.8) hat der erste eine Singularität in  $(0, 0)$ . Die zwei übrigen Termen kann man stetig durch 0 in  $(0, 0)$  fortsetzen.

Man kann sich noch fragen, ob denn dieses  $u$  tatsächlich die einzige Lösung zu (15.7) ist. Wenn es eine zweite Lösung  $u_2$  gäbe, dann betrachte man  $w = u - u_2$ . Das Maximumprinzip oder der Mittelwertsatz hat zwar als Voraussetzung, dass  $w \in C^2(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$ , doch man kann zeigen, dass  $w \in W^{2,p}(B_r(0)) \cap C(\overline{B_r(0)})$  mit  $p$  groß reicht. Es folgt so, dass  $w = 0$ .

**Aufgabe 15.1** Zeigen Sie, dass die Funktion  $v : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$v(x) = \begin{cases} x^2 \log(-\log(x)) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

in  $C^{1,\gamma}[0, \frac{1}{2}]$  liegt und nicht in  $C^2[0, \frac{1}{2}]$ .

### 15.3 Regularität und Rand

Um den soeben gezeigten Ansatz zu verwenden, müsste man  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf ( $k$  mal) stetig differenzierbare Art erweitern können.

**Lemma 15.3** Sei  $f \in C^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ . Dann gibt es eine Erweiterung  $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis.** Man definiere für  $x_1 < 0$  und  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\tilde{f}(x_1, x') = \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x')$$

mit  $a_m$  bestimmt durch

$$1 = \sum_{m=1}^{k+1} (-m)^\ell a_m \text{ für } \ell \in \{0, 1, \dots, k\}. \quad (15.9)$$

Anders gesagt,  $a_m$  erfüllt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -m-1 \\ (-1)^2 & (-2)^2 & (-3)^2 & \cdots & (-m-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^k & (-2)^k & (-3)^k & \cdots & (-m-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieser Typ von Matrix ist nach Vandermonde benannt und bekanntlich invertierbar, wenn die zweite Zeile keine gleichen Zahlen enthält. Es gibt also eine eindeutige Lösung  $a_1, \dots, a_{k+1}$ . Wenn die Gleichungen in (15.9) erfüllt sind, findet man für  $\ell + |\alpha| \leq k$ , dass

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha \tilde{f}(0, x') &= \lim_{x_1 \downarrow 0} \partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha \left( \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x') \right) \\ &= \lim_{x_1 \downarrow 0} \sum_{m=1}^{k+1} a_m (-m)^\ell (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(-mx_1, x') \\ &= \sum_{m=1}^{k+1} a_m (-m)^\ell (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(0, x') = (\partial_{x_1}^\ell \partial_{x'}^\alpha f)(0, x'). \end{aligned}$$

Dann folgt, dass

$$\tilde{f}(x_1, x') = \begin{cases} f(x_1, x') & \text{für } x_1 \geq 0, \\ \tilde{f}(x_1, x') & \text{für } x_1 < 0, \end{cases}$$

eine  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktion ist.  $\blacksquare$

**Beispiel 15.4** Eine  $C^1$ -Erweiterung von  $f \in C^1[0, \infty)$  wird auf diese Art definiert:

$$\tilde{f}(x) = a_1 f(-x) + a_2 f(-2x) \text{ für } x < 0,$$

und  $a_1, a_2$  werden bestimmt durch

$$f(0) = \lim_{x \uparrow 0} \tilde{f}(x) = (a_1 + a_2) f(0),$$

$$f'(0) = \lim_{x \uparrow 0} \tilde{f}'(x) = (-a_1 - 2a_2) f'(0).$$

Man löst  $1 = a_1 + a_2$  und  $1 = -a_1 - 2a_2$ , und man findet  $a_1 = 3$  und  $a_2 = -2$ .

**Aufgabe 15.2** Nennen wir die  $C^1$ -Erweiterung aus Beispiel 15.4  $E_1$  und die ähnlichen  $C^k$ -Erweiterungen  $E_k$ . Kann man  $E_{k+1}$  erstellen als Linearkombination von  $E_k$  und  $E_{k-1}$ ?

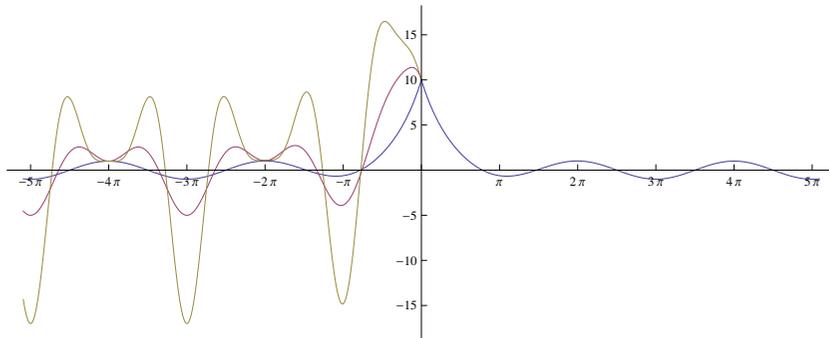


Abbildung 15.2: Die Funktion  $f(x) = 9e^{-x} + \cos(x)$  auf  $[0, \infty)$  und ihre  $C^0$ -,  $C^1$ - und  $C^2$ -Erweiterung auf  $\mathbb{R}^-$  in blau, purpur und gold.

Abbildung 15.2 zeigt, dass die Erweiterung bedeutend größer sein kann als die ursprüngliche Funktion. Man kann jedoch zeigen, dass diese Erweiterung beschränkt ist im geeigneten Raum.

Für den Operator  $E_k : C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$ , definiert durch

$$E_k(f)(x_1, x') = \begin{cases} f(x_1, x') & \text{für } (x_1, x') \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}, \\ \sum_{m=1}^{k+1} a_m f(-mx_1, x') & \text{für } (x_1, x') \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases}$$

mit  $a_m$  (abhängig von  $k$ ) als in (15.9), kann man nämlich folgendes zeigen:

**Lemma 15.5** *Es gibt  $C_k$  derart, dass für alle  $f \in C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ :*

$$\|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} \leq C_k \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})}.$$

Anders gesagt:  $E_k : C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$  ist ein beschränkter linearer Operator.

**Beweis.** Weil  $E_k(f) \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\begin{aligned} & \|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|E_k(f)\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \|E_k(f)\|_{C_b^k(\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1})} \\ &\leq \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} + \sum_{m=1}^{k+1} |a_m| \sum_{\alpha_1 + |\alpha'| \leq k} \left\| (-m)^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x'}^{\alpha'} f \right\|_{\infty} \\ &\leq \left( 1 + (k+1) \max_{m \leq k+1} \{|a_m| m^k\} \right) \|f\|_{C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})} \end{aligned}$$

für alle  $f \in C_b^k([0, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1})$ . ■

**Proposition 15.6** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$ . Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator*

$$E_{k,\Omega} : C^k(\bar{\Omega}) \rightarrow C_0^k(\mathbb{R}^n)$$

mit  $E_{k,\Omega}(f)(x) = f(x)$  für  $x \in \bar{\Omega}$  und  $f \in C^k(\bar{\Omega})$ .

**Beweis.** Wir geben nur eine Skizze. Für  $\partial\Omega$  gibt es wie in Definition 2.10 beschrieben, eine Überdeckung des Randes mit Blöcken  $\{B_i\}_{i=1}^{\ell}$ . Sei  $\{\chi_i\}_{i=0}^{\ell}$  eine Zerlegung der Eins derart, dass  $\text{support}(\chi_i) \subset B_i$  für  $i = 1, \dots, \ell$ . Auf jedem dieser Blöcke kann man den Rand in lokalen Koordinaten beschreiben durch  $x_1^{(i)} = \psi_i(x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$  und  $\Omega$  durch  $x_1^{(i)} > \psi_i(x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ . Weil  $\psi_i \in C^k$  kann man den Rand

glattbügeln durch

$$S_i \left( x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)} \right) = \left( x_1^{(i)} - \psi_i \left( x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)} \right), x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)} \right),$$

und lokal wird eine Funktion zu einer auf dem Halbraum transformiert durch

$$(S_i^* f)(y_1, y') = f(y_1 + \psi_i(y'), y').$$

Formal schreiben wir

$$E_{k,\Omega}(f) = \sum_{i=1}^{\ell} (S_i^*)^{-1} E_k S_i^* (\chi_i f)$$

und die Tatsache, dass diese Definition den gewünschten Erweiterungsoperator liefert, darf der Leser selbst überprüfen. Auch kann man sich davon überzeugen, dass  $E_{k,\Omega}(f)$  einen kompakten Träger hat, der nur abhängt von  $\{\chi_i\}_{i=1}^{\ell}$ . ■

**Korollar 15.7** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^k$ . Dann gilt für jedes  $f \in C^{k_1}(\bar{\Omega})$  mit  $k_1 \leq k$ , dass  $w \in C^{k_1+1}(\bar{\Omega})$  für

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} F_n(x-y) E_{k,\Omega}(f)(y) dy.$$

**Bemerkung 15.7.1** Für  $x \in \Omega$  gilt

$$-\Delta w(x) = E_{k,\Omega}(f)(x) = f(x).$$

Dies bedeutet, dass man eine Lösung von (15.1) bekommt, wenn man

$$\begin{cases} -\Delta u_2 = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ u_2 = w & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (15.10)$$

löst und  $u = w - u_2$  nimmt. Weil  $u_2 \in C^\infty(\Omega)$  gilt, folgt für  $f$  und  $\Omega$  wie in Korollar 15.7, dass  $u \in C^{k_1+1}(\Omega)$ . Möchte man sogar die Regularität einschließlich des Randes zeigen, kann man für Gebiete, die die äußeren Kugelbedingungen erfüllen, die Funktion  $u_2$  mit Oberlösungen und Unterlösungen annähern und mit Harnackschen Ungleichungen Abschätzungen erzeugen, die dafür sorgen, dass man  $u_2 \in C^1(\bar{\Omega})$  zeigen kann. Für höhere Regularität betrachtet man ein Problem wie (15.10) nun für  $\partial_{x_i} u_2$  usw.

## 15.4 Lösungen und Abschätzungen

In diesem Abschnitt beschreiben wir einige Ergebnisse für Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (15.11)$$

in verschiedenen Rahmen. Um diese Ergebnisse zu beweisen wäre eine Spezialvorlesung nötig.

**Theorem 15.8** Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1)$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{k+3}$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  genau eine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})$  zu (15.11).

Außerdem gibt es eine Konstante  $c_{\Omega,k,\gamma} > 0$  derart, dass für jedes  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  und die zugehörige Lösung  $u$  gilt:

$$\|u\|_{C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq c_{\Omega,k,\gamma} \|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})}.$$

Für einen Beweis schaue man nach in [7].

Wir haben in Abschnitt 12.2.2 bemerkt, aber nicht bewiesen, dass es bei einem beschränkten Gebiet  $\Omega$  für  $f \in L^2(\Omega)$  eine schwache Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt zu (15.11). Eine schwache Lösung heißt hier:  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - f v) dx = 0 \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (15.12)$$

Der Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  wurde in (12.13) definiert. Die Sobolev-Räume  $W^{k,p}(\Omega)$  findet man in Abschnitt 3.3.1.

**Theorem 15.9** *Nehmen wir  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in (1, \infty)$ . Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{k+3}$ . Sei  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  die schwache Lösung vom Typ (3.7). Wenn zusätzlich  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  gilt, dann folgt  $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ .*

*Außerdem gibt es eine Konstante  $c_{\Omega,k,p} > 0$  derart, dass für jedes  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  und für die dazugehörige Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{k+2,p}(\Omega)$  gilt:*

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p} \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Für einen Beweis schaue man bei [4, Seite 317] für  $p = 2$  oder in [7] für allgemeine  $p \in (1, \infty)$ .

Wie verhalten sich diese beiden Typen von Lösungen? Eine Richtung möge deutlich sein. Weil  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$  gilt für beschränkte Gebiete  $\Omega$  und dass es sogar  $c'_{\Omega,k,\gamma} > 0$  gibt mit

$$\|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \leq c'_{\Omega,k,\gamma} \|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} \text{ für alle } f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}),$$

findet man für  $f \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  nicht nur  $u \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ , sondern auch  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . Kann man auch in der umgekehrten Richtung eine Inklusion erwarten? Für  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  findet man

im Allgemeinen keine Lösung  $u \in C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})$  aber manchmal schon eine Lösung  $u \in C^{k+1,\gamma}(\bar{\Omega})$ . Die sogenannten Sobolev Einbettungen geben Antwort auf diese Art von Fragen.

Die Sobolevschen Einbettungssätze, die für beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gelten, die eine **innere(!)** Kegelbedingung erfüllen, geben uns die folgenden Abschätzungen:

- Wenn  $k \geq m$  und  $k - \frac{n}{p} > m - \frac{n}{q}$  dann gilt

$$\|u\|_{W^{m,q}(\Omega)} \leq c_{\Omega,k,p,m,q} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

- Wenn  $k - \frac{n}{p} > m + \gamma$  dann gilt

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq c_{\Omega,k,p,m,\gamma} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Wenn man ganz genau wäre, müsste man bei der letzten Abschätzung eigentlich sagen, dass es für jede Äquivalenzklasse  $U \in W^{k,2}(\Omega)$  einen Vertreter  $u \in C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})$  gibt mit

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq c_{\Omega,k,p,m,\gamma} \|U\|_{W^{k,2}(\Omega)}.$$

Man kann diese Ergebnisse kombinieren zur folgenden Aussage:

**Korollar 15.10** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  genau eine schwache Lösung  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  zu (15.11). Außerdem gilt  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , und es gibt  $c_{\Omega} > 0$  derart, dass für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  und die zugehörige Lösung  $u$  gilt:*

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq c_{\Omega} \|f\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

**Beweis.** Wenn  $f \in C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $f \in L^p(\Omega)$  für alle  $p \in (1, \infty)$  also auch für  $p = 2$ . Dann gibt es genau eine schwache Lösung in  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , die sogar in  $W^{2,p}(\Omega)$  liegt für alle  $p \in (1, \infty)$ . Für  $p > n$  folgt, dass  $u \in C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega})$  für  $\varepsilon \in (0, 1 - \frac{n}{p})$ . Die Abschätzungen folgen:

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} &\leq \|u\|_{C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega})} \leq c_1 \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \\ &\leq c_2 \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c_3 \|f\|_{C(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

Die Konstanten hängen nur von  $\Omega$  und  $n$  ab. Man kann  $p = 2n$  und  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  wählen. ■

Diese Überlegungen führen dazu, dass man für  $f \in C(\bar{\Omega})$  und  $\Omega \in C^3$  nur eine Lösung  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  findet, und im Allgemeinen nicht in  $C^2(\bar{\Omega})$ . Das bedeutet, dass man eine Gleichung  $-\Delta u = f$  nicht punktweise

$$-\Delta u(x) = f(x) \text{ für alle } x \in \Omega$$

lesen soll, sondern nur

$$-\Delta u = f \text{ fast überall in } \Omega.$$

## Semilineare Laplace-Gleichungen

### 16.1 Ein erweitertes Maximum-Prinzip

In diesem Abschnitt betrachten wir

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (16.1)$$

mit  $c \in C(\bar{\Omega})$ .

**Theorem 16.1 (Starkes Maximum-Prinzip)** Sei  $c \geq 0$ . Wenn  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung ist von (16.1) mit  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $p \geq 2$ , dann folgt, dass entweder  $u > 0$  in  $\Omega$  oder  $u = f = 0$  in  $\Omega$ .

Wir werden diese Aussage in mehreren Schritten beweisen. Das erste Ergebnis ist eine schwächere Version des obigen Theorems.

**Proposition 16.2 (Schwachtes Maximum-Prinzip)** Sei  $c \geq 0$ . Wenn  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung ist von (16.1) und  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $p \geq 2$ , dann folgt, dass  $u \geq 0$  in  $\Omega$ .

**Beweis.** Nehmen wir an, dass  $\min u = u(x_0) < 0$ . Weil  $u$  stetig ist, gibt es eine Kugel  $B_r(x_0)$  mit  $u(x) < 0$  für alle  $x \in B_r(x_0)$ . Wir können  $r$  sogar so groß wählen, dass es  $x_1 \in \partial B_r(x_0)$  gibt mit  $u(x_1) = 0$ . Es folgt auch, dass

$$f(x) - c(x)u(x) \geq 0 \text{ auf } B_r(x_0)$$

und damit, dass  $u$  superharmonisch ist auf  $B_r(x_0)$ . Wir finden einen Widerspruch zu  $u(x_1) = 0$ . Also folgt  $u \geq 0$  in  $\Omega$ . ■

**Lemma 16.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u \in C(\bar{\Omega})$  eine nichtnegative Funktion. Wenn es  $x_0, x_1 \in \Omega$  gibt mit  $u(x_0) > 0 = u(x_1)$ , dann gibt es  $x_4, x_5 \in \Omega$  und  $R > 0$  mit

1.  $u(x_4) = 0$  und  $x_4 \in \partial B_R(x_5)$ ;
2.  $u(x) > 0$  für  $x \in \overline{B_R(x_5)} \setminus \{x_4\}$ ;
3.  $B_{2R}(x_4) \subset \Omega$ .

**Beweis.** Weil  $\Omega$  zusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\gamma(0) = x_0$  und  $\gamma(1) = x_1$ . Setze

$$t_2 = \inf \{t \in [0, 1]; u(t) = 0\} \text{ und } x_2 = \gamma(t_2).$$

Weil  $x_2 \in \Omega$  und  $\Omega$  offen ist, gibt es  $R_2 > 0$  mit  $B_{R_2}(x_2) \subset \Omega$ . Setze

$$t_3 = \inf \{t \in [0, 1]; \gamma(t) \in B_{R_2/2}(x_2)\} \text{ und } x_3 = \gamma(t_3).$$

Es gilt  $t_3 < t_2$  und  $u(x_3) > 0$ . Weil  $u$  stetig ist, gilt  $u(x) > 0$  in einer Umgebung von  $x_3$  und

$$R_3 = \sup \{r \in [0, R_2/2]; u(x) > 0 \text{ auf } B_r(x_3)\}$$

ist derart, dass es  $x_4 \in \partial B_{R_3}(x_3)$  gibt mit  $u(x_4) = 0$ . Für  $x \in B_{R_3}(x_3)$  gilt  $u(x) > 0$ . Um zu verhindern, dass es mehrere Stellen auf  $\partial B_{R_3}(x_3)$  gibt, wo  $u(x) = 0$  gilt, brauchen wir noch einen Schritt. Setze  $x_5 = \frac{1}{2}(x_3 + x_4)$  und  $R = \frac{1}{2}R_3$ . ■

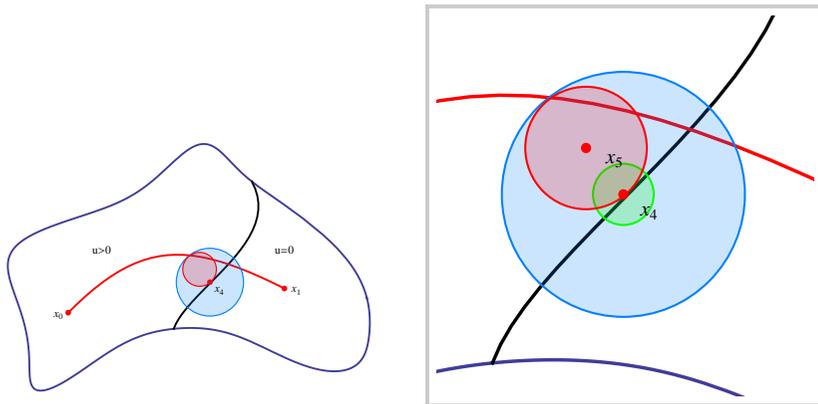


Abbildung 16.1: Die Konstruktion in Lemma 16.3 mit Detailansicht.

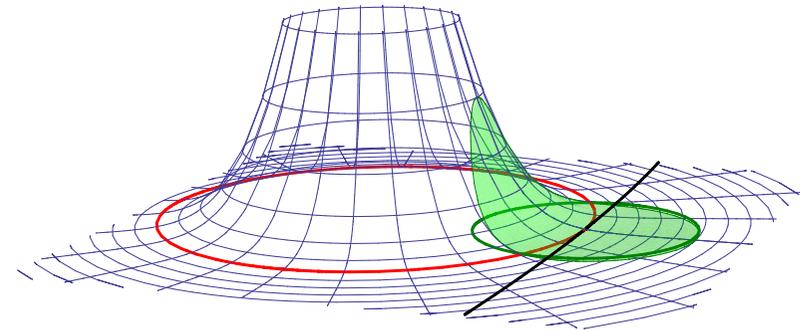


Abbildung 16.2: Die Hilfsfunktion aus dem Beweis zu Theorem 16.1. Die Funktion  $v$  ist mit dem blauen Gitter dargestellt; die Einschränkung von  $v$  auf  $B_{R/2}(x_4)$  ist grün.

**Beweis von Theorem 16.1.** Sei  $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  eine Lösung von (16.1) mit  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$ . Wegen des schwachen Maximum-Prinzips gilt  $u \geq 0$  auf  $\Omega$ . Wir nehmen an, es gibt  $x_0, x_1 \in \Omega$  mit  $u(x_0) > 0$  und  $u(x_1) = 0$ . Wir nehmen  $x_4, x_5$  und  $R$  wie in Lemma 16.3 und definieren  $r = \frac{1}{2}R$  und

$$v(x) = \frac{e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2}}{1 - e^{-\alpha r^2}},$$

wobei wir momentan  $\alpha$  noch nicht festlegen. Wir werden für  $u - \varepsilon v$  einen Widerspruch erzeugen auf  $B_r(x_4)$ .

Für  $v$  gilt:

- $v(x) > 0$  für  $|x - x_5| < r$  und  $v(x) < 0$  für  $|x - x_5| > r$ ;
- $(-\Delta + c(x))v(x) < 0$  für  $|x - x_5| > r$  und genügend

großes  $\alpha$ , denn

$$\begin{aligned} (-\Delta + c(x))v(x) &= \\ &= \frac{-\nabla \left( -2\alpha(x - x_5) e^{-\alpha|x-x_5|^2} \right) + c(x) \left( e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2} \right)}{1 - e^{-\alpha r^2}} \\ &= \frac{(2n\alpha - 4\alpha^2|x - x_5|^2) e^{-\alpha|x-x_5|^2} + c(x) \left( e^{-\alpha|x-x_5|^2} - e^{-\alpha r^2} \right)}{1 - e^{-\alpha r^2}} \\ &\leq \frac{(-4\alpha^2 r^2 + 2n\alpha + c(x)) e^{-\alpha|x-x_5|^2} - c(x) e^{-\alpha r^2}}{1 - e^{-\alpha r^2}}. \end{aligned}$$

Man wähle  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  so, dass  $-4\alpha^2 r^2 + 2n\alpha + c(x) < 0$ .

Wir müssen als nächstes  $\varepsilon$  vernünftig wählen: Für  $x \in \partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}$  gilt  $u(x) > 0$ , und weil  $\partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}$  kompakt ist und  $u$  stetig, kann man  $\varepsilon > 0$  derart wählen, dass

$$\varepsilon v(x) < u(x) \text{ für } x \in \partial B_r(x_4) \cap \overline{B_R(x_5)}. \quad (16.2)$$

Da  $v(x) \leq 0$  und  $u(x) \geq 0$  für  $x \in \partial B_r(x_4) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(x_5))$  und beide Funktionen nicht gleichzeitig 0 sind, folgt

$$u(x) - \varepsilon v(x) > 0 \text{ für } x \in \partial B_r(x_4) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_R(x_5)). \quad (16.3)$$

Kombiniert man (16.2) und (16.3), so findet man

$$u(x) - \varepsilon v(x) > 0 \text{ für } x \in \partial B_r(x_4).$$

Weil auch

$$(-\Delta + c(\cdot))(u - \varepsilon v) > 0 \text{ auf } B_r(x_4)$$

liefert das schwache Maximum-Prinzip, dass

$$u(x) - \varepsilon v(x) \geq 0 \text{ für } x \in \overline{B_r(x_4)}.$$

Sei nun  $\nu$  der auswärtige Normalenvektor in  $x_4$  an  $B_{2r}(x_5)$ . Weil  $u \in C^1(\Omega)$ , existiert  $(\partial_\nu u)(x_4)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (\partial_\nu u)(x_4) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4 + t\nu) - u(x_4)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4 + t\nu) - 0}{t} \geq 0. \end{aligned}$$

Weil  $u(x_4) = \varepsilon v(x_4) = 0$  und  $u(x) \geq \varepsilon v(x)$  gilt, folgt auch

$$\begin{aligned} (\partial_\nu u)(x_4) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{u(x_4) - u(x_4 - t\nu)}{t} \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{0 - \varepsilon v(x_4 - t\nu)}{t} < 0 \end{aligned}$$

und das gibt einen Widerspruch. ■

## 16.2 Existenz bei einer einfachen Perturbation

In diesem Abschnitt betrachten wir für  $\lambda \geq 0$ :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.4)$$

**Theorem 16.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Dann gibt es für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  und jedes  $\lambda \geq 0$  eine Lösung  $u_\lambda \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  von (16.4).

Wenn  $0 \leq f \in C(\bar{\Omega})$  und  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ , dann gilt

$$0 \leq u_{\lambda_2}(x) \leq u_{\lambda_1}(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

**Beweis.** Wenn wir für jedes  $f \in C(\bar{\Omega})$  mit  $f \geq 0$  eine Lösung  $u_\lambda$  von (16.4) finden, kann man auch für beliebige  $f \in C(\bar{\Omega})$  eine Lösung finden. Denn sei  $f \in C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $f^+ := \frac{1}{2}(|f| + f) \in C(\bar{\Omega})$  und  $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f) \in C(\bar{\Omega})$  und  $f^+, f^- \geq 0$ . Wenn  $u_1, u_2$  Lösungen von (16.4) mit rechts  $f^+$  beziehungsweise  $f^-$ , dann ist  $u = u_1 - u_2$  eine Lösung von (16.4) mit  $f$ . Wir dürfen also annehmen, dass  $f \geq 0$  gilt.

Wir definieren nun  $\mathcal{G}_\Omega : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$  als den Lösungsoperator für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.5)$$

Genauer gesagt, ist  $\mathcal{G}_\Omega f$  für  $f \in C(\bar{\Omega})$  eine Lösung von (16.5) in  $W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Wegen Korollar 15.10 gilt

$$\|\mathcal{G}_\Omega f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

und  $A_\lambda : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ , definiert durch

$$A_\lambda u = \mathcal{G}_\Omega(f - \lambda u),$$

ist für  $|\lambda|C_\Omega < 1$  mit  $C_\Omega$  aus Korollar 15.10 eine Kontraktion. Für solche  $\lambda$  liefert der Fixpunktsatz von Banach eine Funktion  $u_\lambda \in C(\bar{\Omega})$  mit

$$A_\lambda u_\lambda = u_\lambda.$$

Es gilt  $u_\lambda = \mathcal{G}_\Omega(f - \lambda u_\lambda)$  und somit ist  $u_\lambda$  eine Lösung in  $W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  von (16.4). Wenn  $\lambda \geq 0$ , besagt Proposition 16.2, dass  $u_\lambda \geq 0$ . Dies bedeutet, dass es eine Lösung  $u_\lambda \geq 0$  gibt für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  und außerdem folgt

$$-\Delta u_\lambda = f - \lambda u_\lambda \leq f \text{ in } \Omega.$$

Es gilt

$$-\Delta(u_\lambda - u_0) = f - \lambda u_\lambda - f = -\lambda u_\lambda \leq 0 \quad (16.6)$$

und durch das Maximum-Prinzip folgt dann  $u_\lambda \leq u_0$ .

- Fassen wir zusammen: Für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  hat (16.4) eine Lösung  $u_\lambda$ . Weil  $A_\lambda$  eine Kontraktion ist, ist die Lösung  $u_\lambda$  eindeutig. Wegen des Maximum-Prinzips gilt  $0 \leq u_\lambda \leq u_0$ .

Weil  $0 \leq u_\lambda \leq u_0$ , gilt auch

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\Omega \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

und wir können für  $\lambda \in [0, C_\Omega^{-1})$  unser Argument wiederholen mit  $\mathcal{G}_{\Omega,\lambda} : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$  als den Lösungsoperator für

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.7)$$

Man zeigt so, dass es eine Lösung gibt für alle  $\lambda \in [0, 2C_\Omega^{-1})$  usw.

Ähnlich wie in (16.6) findet man für  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ , dass

$$-\Delta(u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}) + \lambda_1(u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}) = (\lambda_1 - \lambda_2)u_{\lambda_2} \leq 0$$

und aufgrund des Maximum-Prinzips folgt  $0 \leq u_{\lambda_2} \leq u_{\lambda_1}$  in  $\Omega$ . ■

## 16.3 Schwach harmonisch ist harmonisch

**Theorem 16.5 (Das Weylsche Lemma<sup>1</sup>)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und sei  $u \in L^1_{lok}(\Omega)$  derart, dass

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi \, dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (16.8)$$

Dann gibt es eine Funktion  $u^* \in C^\infty(\Omega)$  mit  $\Delta u^* = 0$  und  $u = u^*$  fast überall.

**Beweis.** Wir definieren eine harmonische Funktion  $u_\varepsilon^*$  und zeigen, dass sie auf

$$\Omega_{2\varepsilon} = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}$$

mit  $u$  fast überall übereinstimmt.

Sei  $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$  mit  $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$  derart, dass

$$\chi_\varepsilon(r) = \chi_\varepsilon(-r) = \begin{cases} 1 & \text{für } |r| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \dots & \text{für } \frac{1}{2}\varepsilon < |r| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |r| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

und sei

$$F_{n,\varepsilon}(x) = \chi_\varepsilon(|x|)F_n(x)$$

mit  $F_n$  die Fundamentallösung zu  $-\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Wir definieren auch

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \\ \Delta F_{n,\varepsilon}(x) & \text{für } \frac{1}{2}\varepsilon < |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } |x| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (16.9)$$

Weil  $\Delta F_n(x) = 0$  für  $x \neq 0$  und  $\chi_\varepsilon$  wie oben definiert ist, folgt  $\Delta F_{n,\varepsilon}(x) = 0$  für  $0 < |x| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$  und auch für  $|x| \geq \varepsilon M$ . Es folgt, dass  $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Bemerke, dass  $H_\varepsilon$  radialsymmetrisch ist.

Wir setzen nun

$$u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy.$$

Weil der Träger von  $y \mapsto H_\varepsilon(x-y)$  in  $\overline{B_\varepsilon(x)}$  liegt,  $H_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt und weil  $u$  lokal integrierbar ist, folgt  $u_\varepsilon^* \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

$$\partial_x^\alpha u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} \partial_x^\alpha H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy.$$

Für  $x \in \Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$  gilt, dass der Träger von  $y \mapsto H_\varepsilon(x-y)$  innerhalb von  $\Omega$  liegt. Dann folgt aus der Annahme (16.8), dass

$$\Delta u_\varepsilon^*(x) = \int_{\Omega} \Delta H_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy = 0.$$

Die Funktion  $u_\varepsilon^*$  ist harmonisch auf  $\Omega_\varepsilon$ .

Sei  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$  und setze

$$\psi(x) = \int_{\Omega} F_{n,\varepsilon}(x-y)\varphi(y) \, dy$$

Es gilt, dass  $\psi \in C_0^\infty(\Omega_{\delta-\varepsilon}) \subset C_0^\infty(\Omega)$  und

$$\Delta \psi(x) = -\varphi(x) + \int_{\Omega_\delta} H_\varepsilon(x-y)\varphi(y) \, dy.$$

<sup>1</sup>Hermann Klaus Hugo Weyl, Elmshorn 1885 – Zürich 1955.

Wir finden

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} u(x) \Delta \psi(x) dx \\
&= \int_{\Omega} u(x) \left( -\varphi(x) + \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(x-y) \varphi(y) dy \right) dx \\
&= - \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(x-y) u(x) dx dy \\
&= - \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(y-x) u(x) dx dy \\
&= - \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} \varphi(y) u_{\varepsilon}^*(y) dy \\
&= \int_{\Omega} (u_{\varepsilon}^*(x) - u(x)) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

Weil dies für beliebige  $\varepsilon < \delta$  und  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega_{\delta})$  gilt, folgt für  $\varepsilon < \delta$ :

$$u = u_{\varepsilon}^* \text{ fast überall auf } \Omega_{\delta}.$$

Dann gilt für  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \delta$ , dass  $u_{\varepsilon_1}^* = u = u_{\varepsilon_2}^*$  fast überall auf  $\Omega_{\delta}$ . Weil diese  $u_{\varepsilon_i}^*$  harmonisch sind auf  $\Omega_{\delta}$ , sind sie stetig und es folgt  $u_{\varepsilon_1}^* = u_{\varepsilon_2}^*$  auf  $\Omega_{\delta}$ . Man kann  $\Omega$  auffüllen mit  $\Omega_{1/n}$ , das heißt  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \Omega_{1/n}$  und so ist  $u^* = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{1/n}^*$  eine wohldefinierte harmonische Funktion auf  $\Omega$  und es gilt  $u = u^*$  fast überall auf  $\Omega$ . ■

Wir haben superharmonische Funktionen auf  $\Omega$  definiert durch  $u \in C(\Omega)$  so, dass für alle  $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$

$$u(x) \geq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) d\sigma_y. \quad (16.10)$$

Man möchte auch eine schwache Version wie in (16.8) für superharmonische Funktionen bereit haben. Die gibt es, wie wir im nächsten Lemma zeigen werden.

**Lemma 16.6** Sei  $u \in C(\Omega)$ . Wenn für alle  $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  gilt, dass

$$\int_{\Omega} u (-\Delta \varphi) dx \geq 0, \quad (16.11)$$

dann ist  $u$  superharmonisch auf  $\Omega$ .

**Bemerkung 16.6.1** Selbstverständlich können wir nicht erwarten, dass eine Funktion  $u \in C(\Omega)$ , die (16.11) erfüllt in Analogie zum Weylschen Lemma, fast überall mit einer stark superharmonischen Funktion übereinstimmt. Mit „stark superharmonisch“ ist gemeint, dass  $u \in W_{lok}^{2,p}(\Omega)$  und  $-\Delta u \geq 0$  gilt. Umgekehrt, wenn  $u \in W_{lok}^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$  die Gleichung  $-\Delta u \geq 0$  erfüllt, folgt (16.11) durch partielle Integration.

**Beweis.** Wir werden (16.10) zeigen für  $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ . Sei  $\psi_{\varepsilon}$  der Mollifier aus (8.5) und definiere

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \int_{B_r(x_0)} \psi_{\varepsilon}(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy.$$

Hier ist  $G_{B_r(x_0)}(y, x)$  die Greensche Funktion auf  $B_r(x_0)$ . Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  folgt  $\varphi_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ . Auch gilt  $\varphi_{\varepsilon} \geq 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega} u(x) (-\Delta \varphi_{\varepsilon}(x)) dx \\
&= \int_{\Omega} u(x) \left( -\Delta_x \int_{B_r(x_0)} \psi_{\varepsilon}(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy \right) dx \\
&= \int_{\Omega} u(x) \left( \int_{B_r(x_0)} (-\Delta \psi_{\varepsilon})(x-y) G_{B_r(x_0)}(y, x_0) dy \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} u(x) \left( \psi_{\varepsilon}(x - x_0) - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \psi_{\varepsilon}(x - y) d\sigma_y \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(x - x_0) u(x) dx - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} \left( \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(x - y) u(x) dx \right) d\sigma_y. \quad (16.12)
 \end{aligned}$$

Weil  $u \in C(\Omega)$  gilt

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon}(x - y) u(x) dx = u(y)$$

und aus (16.12) folgt

$$0 \leq u(x_0) - \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) d\sigma_y.$$

Weil  $x_0 \in \Omega$  beliebig ist, ist so (16.10) bewiesen. ■

## 16.4 Existenz zwischen Ober- und Unterlösung

In diesem Abschnitt betrachten wir das semilineare Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (16.13)$$

wobei  $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  lokal Lipschitz-stetig in  $u$  ist:

Es gebe also für jedes  $M > 0$  eine Zahl  $L_M \in \mathbb{R}$  mit

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L_M |u_1 - u_2| \quad \text{für } x \in \bar{\Omega} \text{ und } |u_1|, |u_2| \leq M. \quad (16.14)$$

Wir werden die Existenz einer Lösung beweisen mit Hilfe einer Methode, die das Maximum-Prinzip und die damit induzierte Ordnung verwendet. Dafür brauchen wir die folgenden Definitionen.

**Definition 16.7** Eine Funktion  $\bar{u} \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Oberlösung, wenn  $\bar{u}(x) \geq 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und wenn für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  gilt

$$\int (\bar{u}(x) (-\Delta\varphi(x)) - f(x, \bar{u}) \varphi(x)) dx \geq 0. \quad (16.15)$$

Eine Funktion  $\underline{u} \in C(\bar{\Omega})$  heißt eine Unterlösung, wenn  $\underline{u}(x) \leq 0$  für  $x \in \partial\Omega$  und wenn für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  gilt

$$\int (\underline{u}(x) (-\Delta\varphi(x)) - f(x, \underline{u}) \varphi(x)) dx \leq 0. \quad (16.16)$$

**Bemerkung 16.7.1** Wenn  $\bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  oder  $\bar{u} \in W^{2,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $-\Delta\bar{u} \geq f$  auf  $\Omega$ . Solche  $\bar{u}$  nennt man starke Oberlösung.

**Lemma 16.8** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Wenn  $u \in C(\bar{\Omega})$  sowohl Ober- als auch Unterlösung zu (16.13) ist, ist  $u$  eine Lösung.

**Beweis.** Sei  $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  für genügend großes  $p$  die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ w(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.17)$$

Diese existiert, weil  $x \mapsto f(x, u(x)) \in C(\bar{\Omega})$ .

Für  $u - w$  und alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$  folgt

$$\int (u(x) - w(x)) (-\Delta\varphi(x)) dx = 0. \quad (16.18)$$

Wenn diese Gleichung gilt für alle  $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , dann gilt sie auch für  $0 \geq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Für beliebige  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  gibt es  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  und  $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$ : Man nehme für  $\varepsilon$  die Distanz zwischen  $\partial\Omega$  und dem Träger von  $\varphi$ , definiere  $\chi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$  durch

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \bar{\Omega}_\varepsilon, \\ \dots & \text{für } x \in \bar{\Omega}_{\varepsilon/2} \setminus \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{für } x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_{\varepsilon/2}, \end{cases}$$

und setze  $\varphi_1 = \|\varphi\|_\infty \chi_\varepsilon$  und  $\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ . Das heißt, dass (16.18) gilt für beliebige  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  und aus dem Weylschen Lemma folgt, dass  $u - w$  ist harmonisch auf  $\Omega$ . Wegen der Randbedingung  $u - w = 0$  folgt  $u = w$  auf  $\bar{\Omega}$ . ■

**Theorem 16.9** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^3$ . Nehme an  $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  erfüllt (16.14). Wenn es eine Oberlösung  $\bar{u}$  und eine Unterlösung  $\underline{u}$  gibt mit

$$\bar{u}(x) \geq \underline{u}(x) \text{ für alle } x \in \Omega,$$

dann gibt es eine Lösung  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  mit

$$\bar{u}(x) \geq u(x) \geq \underline{u}(x) \text{ für alle } x \in \Omega.$$

**Beweis.** Statt dieses Problem für  $f$  zu betrachten, verwendet man

$$\tilde{f}(x, u) := \begin{cases} f(x, \bar{u}(x)) & \text{für } u > \bar{u}(x), \\ f(x, u) & \text{für } \bar{u}(x) \geq u \geq \underline{u}(x), \\ f(x, \underline{u}(x)) & \text{für } \underline{u}(x) > u, \end{cases}$$

und betrachtet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \tilde{f}(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.19)$$

Für die Funktion  $\tilde{f}$  gilt sogar mit  $L = L_M$  und

$$M = \max(\|\bar{u}\|_\infty, \|\underline{u}\|_\infty),$$

dass für  $x \in \bar{\Omega}$  und  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

$$|\tilde{f}(x, u_1) - \tilde{f}(x, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|. \quad (16.20)$$

Das Randwertproblem (16.19) kann man auch schreiben als

$$\begin{cases} (-\Delta + L)u(x) = \tilde{f}(x, u(x)) + Lu(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.21)$$

Sei  $\mathcal{G}_{\Omega, L}$  der Lösungsoperator für

$$\begin{cases} (-\Delta + L)u = g & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.22)$$

Theorem 16.4 sichert die Existenz eines solchen Operators. Dann können wir (16.21) auch schreiben als

$$u(x) = \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \tilde{f}(\cdot, u(\cdot)) + Lu(\cdot) \right) (x).$$

Wir möchten einen Fixpunktsatz anwenden für

$$T : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega}) \quad \text{mit} \quad Tu = \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \tilde{f}(\cdot, u) + Lu \right).$$

Dazu zeigen wir einige Hilfsresultate.

**Behauptung 16.10** Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:

- Wenn  $u$  eine Oberlösung ist, dann gilt  $Tu \leq u$ .
- Wenn  $u$  eine Unterlösung ist, dann gilt  $Tu \geq u$ .

Man findet mit partieller Integration, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} Tu(x) (-\Delta \varphi(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} Tu(x) (-\Delta + L) \varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} ((-\Delta + L) Tu(x)) \varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \tilde{f}(x, u(x)) + Lu(x) \right) \varphi(x) dx - L \int_{\Omega} Tu(x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \tilde{f}(x, u(x)) \varphi(x) dx + L \int_{\Omega} (u(x) - Tu(x)) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Weil  $u$  eine Oberlösung ist, gilt (16.15) und man findet also

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (Tu(x) - u(x)) (-\Delta \varphi(x)) dx \\ & \leq L \int_{\Omega} (u(x) - Tu(x)) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Nehmen wir an:  $Tu(x) - u(x)$  hat ein positives Maximum in  $x_0$ . Dann gilt in einer Umgebung  $B_r(x_0)$  von  $x_0$  für alle  $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$  mit  $\varphi \geq 0$ , dass

$$\begin{aligned} & \int_{B_r(x_0)} (Tu(x) - u(x)) (-\Delta \varphi(x)) dx \\ & \leq L \int_{B_r(x_0)} (u(x) - Tu(x)) \varphi(x) dx \leq 0. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 16.6 ist  $Tu - u$  subharmonisch auf  $B_r(x_0)$  und wird somit maximal auf dem Rand  $\partial B_r(x_0)$ . Dann ist  $Tu - u$  konstant, wo  $Tu - u \geq 0$  gilt, und weil  $Tu - u \leq 0$  auf  $\partial \Omega$  ist, folgt, dass diese Konstante nur 0 sein kann. Wir haben einen Widerspruch. Ähnliche Argumente zeigen die Behauptung für eine Unterlösung.  $\square$

**Behauptung 16.11** Seien  $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:

- Wenn  $u_1 \leq u_2$  dann gilt  $Tu_1 \leq Tu_2$ .

Wegen (16.20) gilt für  $u_1 \leq u_2$ , dass

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) \\ & \leq L |u_1 - u_2| + L (u_1 - u_2) = 0. \end{aligned}$$

Aus Proposition 16.2 folgt dann, dass

$$\begin{aligned} Tu_1 - Tu_2 &= \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) \\ &= \mathcal{G}_{\Omega,L} \left( \left( \tilde{f}(\cdot, u_1) + Lu_1 \right) - \left( \tilde{f}(\cdot, u_2) + Lu_2 \right) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Die Ordnung bleibt erhalten.  $\square$

**Behauptung 16.12** Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Dann gilt folgendes:

- Wenn  $u$  eine Oberlösung ist, dann ist  $Tu$  eine starke Oberlösung.
- Wenn  $u$  eine Unterlösung ist, dann ist  $Tu$  eine starke Unterlösung.

Sei  $u$  eine Oberlösung. Dann gilt  $Tu \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  für alle  $p \in (1, \infty)$ . Weil  $u \geq Tu$  gilt, und weil

$$s \mapsto \tilde{f}(x, s) + Ls$$

eine monoton wachsende Funktion ist, folgt, dass

$$(-\Delta + L)Tu = \tilde{f}(\cdot, u) + Lu \geq \tilde{f}(\cdot, Tu) + LTu.$$

Also ist  $Tu$  eine starke Oberlösung.  $\square$

Diese drei Behauptungen zeigen, dass man mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_0 = \underline{u} \\ \underline{u}_{n+1} := T\underline{u}_n \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_0 = \bar{u} \\ \bar{u}_{n+1} := T\bar{u}_n \end{array} \right.$$

Folgen von Unter- und Oberlösungen  $\{\underline{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\bar{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  findet mit

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq \underline{u}_2 \leq \dots \leq \bar{u}_2 \leq \bar{u}_1 \leq \bar{u}_0 = \bar{u}.$$

Diese Funktionen sind gleichgradig gleichmäßig stetig und beschränkt. Wegen des Satzes von Arzela-Ascoli gibt es konvergente Teilfolgen von  $\{\underline{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\{\bar{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Weil diese Funktionen geordnet sind, konvergieren sogar die Folgen selbst. Für

$\underline{u}_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}_k(x)$  und ähnlich für  $\bar{u}_\infty(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}_k(x)$  gilt

$$\underline{u}_\infty = \mathcal{G}_{\Omega, L} \left( \tilde{f}(\cdot, \underline{u}_\infty) + L\underline{u}_\infty \right) \in W^{2,p}(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}).$$

Dann ist  $\bar{u}_\infty$  ( $\underline{u}_\infty$ ) eine Lösung von (16.19). Weil  $\underline{u}(x) \leq \underline{u}_\infty(x) \leq \bar{u}_\infty(x) \leq \bar{u}(x)$ , folgt

$$\tilde{f}(x, \underline{u}_\infty(x)) = f(x, \underline{u}_\infty(x))$$

und  $\bar{u}_\infty$  ( $\underline{u}_\infty$ ) ist dann sogar eine Lösung von (16.13). Es ist übrigens nicht unbedingt so, dass  $\underline{u}_\infty = \bar{u}_\infty$ .  $\blacksquare$

**Aufgabe 16.1** Sie  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $C^2$ -Rand. Betrachte

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 - u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.23)$$

1. Zeigen Sie, dass  $w = 1$  eine Oberlösung ist von (16.23).
2. Zeigen Sie, dass  $v = 0$  eine Unterlösung ist von (16.23).
3. Begründen Sie, dass es eine Lösung gibt von (16.23).

## 16.5 Variationelle Methoden

Auch in diesem Abschnitt betrachten wir das semilineare Problem

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x, u(x)) & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.24)$$

Wenn  $f$  bestimmte Eigenschaften hat, kann man zeigen, dass

$$J(u) = \int \left( \frac{1}{2} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - F(x, u(x)) \right) dx$$

mit

$$F(x, u(x)) = \int_{v=0}^{u(x)} f(x, v) dv$$

ein Minimum in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  besitzt. Wenn  $u_{\min}$  diese minimierende Funktion ist und  $F$  genügend nett ist (zum Beispiel falls  $f$  stetig ist und eine passende Wachstumsbedingung erfüllt), dann folgt

$$\partial_t J(u + t\varphi)|_{t=0} = 0.$$

Weil

$$\begin{aligned} \partial_t J(u + t\varphi) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{J(u + t\varphi) - J(t\varphi)}{t} \\ &= \int (\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) - f(x, u(x)) \varphi(x)) dx, \end{aligned} \quad (16.25)$$

folgt, dass  $u$  eine schwache Lösung ist.

Für zum Beispiel  $f(u) = 1 - u^3$  findet man

$$J(u) = \int \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - u + \frac{1}{4} u^4 \right) dx$$

und man kann sehen, dass  $J$  ein Infimum hat. Das gibt Hoffnung, dass  $J$  sogar ein Minimum hat.  $J$  hat ein Infimum, wenn  $J(u) \geq c$  gilt für alle  $u$ , die in Betracht kommen;  $J$  hat ein Minimum, wenn  $J(u) \geq J(u_0)$  für alle  $u$ , die in Betracht kommen.

Oft kann man nicht nur eine Lösung als Minimum des Funktionals finden, sondern erscheinen Lösungen möglicherweise auch als Sattelpunkt des Funktionals. In einem Sattelpunkt kann man auch (16.25) und eine schwache Lösung erwarten.

**Beispiel 16.13** Wir betrachten

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = u(x)^3 & \text{für } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (16.26)$$

Dann nimmt man

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - \frac{1}{4} u(x)^4 \right) dx.$$

Wenn für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (16.27)$$

dann folgt, dass

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{4} \|u\|_{L^4(\Omega)}^4 \\ &\geq \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \left( 2 - C^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

und dass  $F$  für  $u = 0$  ein lokales Minimum hat. Die Tatsache, dass  $u = 0$  eine Lösung ist, ist nicht besonders überraschend. Wenn man aber bemerkt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} J(tu) = -\infty$  für  $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}$ , dann kann man auch noch einen Sattelpunkt erwarten. Ein Sattelpunkt für eine Funktion  $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$  in endlichen Dimensionen ist relativ klar definiert. Hier haben wir jedoch eine Funktion  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $W_0^{1,2}(\Omega)$  ist ein unendlich dimensionaler Raum. Ambrosetti und Rabinowitz haben gezeigt, dass für derartige Probleme tatsächlich ein Sattelpunkt existieren kann. Dieses Ergebnis ist bekannt geworden als das Mountain-Pass Lemma<sup>2</sup>. Wir sparen die Details und geben nur die wichtigsten Bedingungen:

Wenn es  $e \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt und  $\varepsilon, \delta > 0$  mit

<sup>2</sup>Ambrosetti, Antonio; Rabinowitz, Paul H. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Functional Analysis 14 (1973), 349–381.

- $J(0) = 0$ ,
- $J(u) \geq \varepsilon > 0$  für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  mit  $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \delta$ ,
- $J(e) < 0$  mit  $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} > \delta$ ,

dann definiert man

$$m := \inf \left\{ \sup_{t>0} J(\gamma(t)); \gamma \in C([0, 1]; W_0^{1,2}(\Omega)) \right\}.$$

Diese Zahl  $m$  ist die Passhöhe;  $\gamma$  ist eine Kurve in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , die 0 und  $e$  verbindet. Anschließend betrachtet man eine Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $J(u_n) \rightarrow m$ . Dann muss man noch zeigen, dass  $u_n$  konvergiert und dazu braucht man noch einige Bedingungen, deren Beschreibung hier zu weit führen würde.

Übrigens braucht man für (16.27) noch einen Sobolev-Einbettungssatz. Die Bedingung dazu ist  $1 - \frac{n}{2} > -\frac{n}{4}$  und ist nur erfüllt, wenn  $n < 4$ .

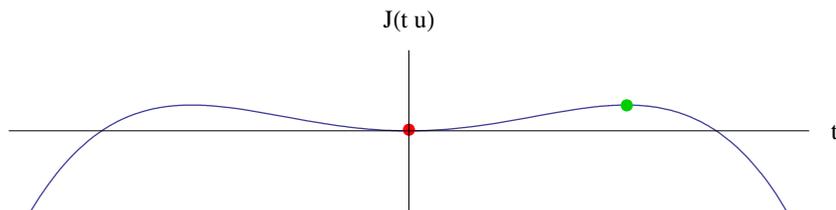


Abbildung 16.3: Lokales Minimum (rot) und ein zweiter stationärer Punkt (grün) in Dimension 1.

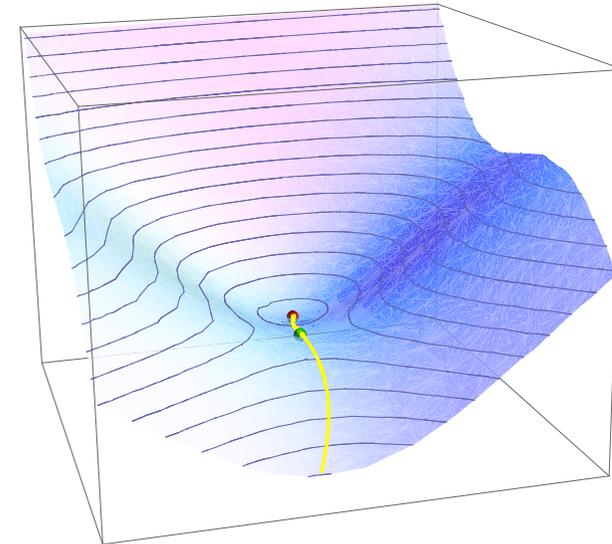


Abbildung 16.4: Lokales Minimum (rot) und ein zweiter stationärer Punkt (grün) in Dimension 2. Man sucht diesen Punkt (= Funktion für das obige Beispiel), indem man alle Wege vom roten Punkt in die Tiefe betrachtet. Auf jedem Weg  $\gamma$  gibt es ein Maximum  $m_\gamma$ . Schlussendlich nimmt man das Infimum von  $m_\gamma$  über alle Wege  $\gamma$  und versucht zu zeigen, dass dieses Infimum angenommen wird.

# Literaturverzeichnis

- [1] W. Arendt, K. Urban, Partielle Differenzialgleichungen, Springer 2010.
- [2] W.A. Strauss, Partielle Differentialgleichungen. Vieweg, 1995
- [3] E. DiBenedetto, Partial differential equations. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1995.
- [4] L.C. Evans, Partial differential equations. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [5] Y. Pinchover, J. Rubinstein, An introduction to partial differential equations. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [6] H.-Ch. Grunau, Partielle Differentialgleichungen, Skript zur Vorlesung 2008/09.
- [7] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 1983.