

Notizen zur Vorlesung  
**Variationsrechnung**



G. Sweers

Wintersemester 2024/2025



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Die Brachistochrone als Beispiel . . . . .	1
1.1.1	Zweck und Ziel der Variationsrechnung . . . . .	4
1.2	Räume stetiger Funktionen . . . . .	5
1.3	Räume differenzierbarer Funktionen . . . . .	8
1.4	Hölder-Räume . . . . .	10
1.5	Differenzierbarkeit eines Funktionals . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Die erste Variation</b>	<b>13</b>
2.1	Definition der ersten Variation . . . . .	13
2.1.1	Intermezzo zu Gauß . . . . .	15
2.2	Das erste Hauptlemma der Variationsrechnung . . . . .	17
2.3	Satz beim Minimierungsproblem . . . . .	17
2.4	Minimalfläche . . . . .	18
2.5	Eine Folge vom Hauptlemma der Variationsrechnung . . . . .	18
2.6	Regularität in einer Dimension . . . . .	20
2.6.1	Ein Satz von $C^1$ zu $C^2$ . . . . .	20
2.6.2	Einige Beispiele, mit und ohne Regularität . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Rand- und Nebenbedingungen</b>	<b>25</b>
3.1	Natürliche Randbedingungen . . . . .	25

3.2	Nebenbedingungen . . . . .	27
3.2.1	Die Vorhangschiene . . . . .	27
3.2.2	Ein Funktional als Nebenbedingung . . . . .	29
3.3	Lagrange-Multiplikator . . . . .	29
3.4	Beispiele für Randbedingungen . . . . .	32
3.4.1	Wäscheleine und Membrane oder wie die Dimension eingreift . . . . .	32
3.4.2	Natürliche Randbedingungen bei einer Plattengleichung . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Die zweite Variation und Konvexität</b>	<b>35</b>
4.1	Ein Beispiel mit mehr als nur einem Minimum . . . . .	35
4.2	Lokales und globales Minimum . . . . .	37
4.3	Konvexität . . . . .	39
4.3.1	Konvexität in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40
4.3.2	Minimum bei Konvexität . . . . .	45
4.4	Funktionale für vektorwertige Funktionen . . . . .	47
4.4.1	Das Stokes-System . . . . .	47
4.4.2	Konvexität für vektorwertige Funktionen . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Lebesgue-Räume und Funktionalanalysis</b>	<b>51</b>
5.1	Lebesgue-Integrale . . . . .	51
5.1.1	Integrale . . . . .	51
5.1.2	Definition der Lebesgue-Räume . . . . .	53
5.2	Funktionalanalytisches . . . . .	54
5.2.1	Dualraum . . . . .	54
5.3	Konvergenz . . . . .	56
5.3.1	Starke und schwache Konvergenz . . . . .	57
5.3.2	Einige Konvergenzsätze . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Sobolev-Räume</b>	<b>63</b>
6.1	Schwache Ableitung . . . . .	63
6.2	Definition der Sobolev-Räume . . . . .	67
6.2.1	Weitere Überlegungen zu $W^{k,p}(\Omega)$ . . . . .	68

6.3	Approximationen . . . . .	70
6.3.1	Konvolution, Faltung . . . . .	70
6.3.2	Approximieren mit Friedrichs . . . . .	71
6.4	Nochmals das erste Hauptlemma . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Lineare Probleme und schwache Lösungen</b>	<b>75</b>
7.1	Hilbert-Räume . . . . .	75
7.2	Schwache Lösungen . . . . .	76
7.2.1	Mehr schwache Lösungen . . . . .	77
7.3	Poincaré, Friedrichs und Wirtinger . . . . .	78
7.4	Folgen der Ungleichungen von Poincaré Friedrichs und Wirtinger . . . . .	82
7.5	Lax-Milgram . . . . .	84
<b>8</b>	<b><math>W^{k,p}</math>-Funktionen und Rand</b>	<b>87</b>
8.1	Verhalten am Rand . . . . .	87
8.1.1	Wie definiert man Regularität vom Rand? . . . . .	89
8.1.2	Intermezzo zum Träger einer Funktion . . . . .	90
8.2	Fortsetzen einer Funktion . . . . .	91
8.3	Einschränken auf dem Rand . . . . .	94
<b>9</b>	<b>Funktionsräume und ihr Zusammenhang I</b>	<b>101</b>
9.1	Hölder und Sobolev . . . . .	102
9.1.1	Eine Einbettung in einer Dimension . . . . .	102
9.1.2	Für $p < n$ von $W^{1,p}(\Omega)$ zu $L^q(\Omega)$ . . . . .	103
9.1.3	Für $p > n$ von $W^{1,p}(\Omega)$ zu $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ . . . . .	107
<b>10</b>	<b>Funktionsräume und ihr Zusammenhang II</b>	<b>111</b>
10.1	Morrey, Gagliardo, Sobolev und Nirenberg . . . . .	111
10.2	Altes und Neues zur Stetigkeit . . . . .	113
10.3	Kompakte Abbildungen . . . . .	115
10.4	Kompakte Einbettungen . . . . .	115

<b>11 Die direkten Methoden</b>	<b>121</b>
11.1 Drei Hauptbestandteile . . . . .	121
11.1.1 Koerzitiv, reflexiv und schwach unterhalbstetig . . . . .	121
11.1.2 Anwendung auf ein Dirichlet-Problem . . . . .	123
11.1.3 Ein semilineares Dirichlet-Problem . . . . .	124
11.2 A-priori Abschätzungen . . . . .	126
<b>12 Das Maximumprinzip</b>	<b>129</b>
12.1 Besonderes für Funktionale erster Ordnung . . . . .	129
12.2 A-priori Abschätzungen und Maximumprinzip . . . . .	133
12.3 Anwendung auf ein semilineares Problem . . . . .	135
<b>13 Extrema und Sattelpunkte</b>	<b>139</b>
13.1 Stationäre Stellen . . . . .	139
13.2 Lokales Minimum . . . . .	141
13.3 Sattelpunktlösungen . . . . .	143
13.4 Numerische Approximierungen . . . . .	144
13.4.1 Konstruktive Approximationen beim Minimum . . . . .	144
13.4.2 Konstruktive Approximationen beim Sattelpunkt . . . . .	146
13.5 Subkritisch und superlinear . . . . .	148
<b>14 Regularität</b>	<b>149</b>
14.1 Einleitung . . . . .	149
14.2 Regularität im Innern . . . . .	152
14.3 Regularität am Rande . . . . .	157
14.4 Regularitätsätze in Hölder- und Sobolev-Räumen . . . . .	159
<b>A Maßtheorie</b>	<b>161</b>
<b>B Integration und Konvergenz</b>	<b>163</b>
<b>C Ungleichungen</b>	<b>167</b>

**D Kompaktheit, Abgeschlossenheit**

**169**

**Literaturverzeichnis**

**171**

**Literaturverzeichnis**

**171**

**Index**

**172**



## Einführung

### 1.1 Die Brachistochrone als Beispiel

Eines der ersten Beispiele, bei der Variationsrechnung geholfen hat ein konkretes Problem zu lösen, ist die **Brachistochrone**. Wie man nachschlagen kann, heißt  $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$  (brachistos) kürzeste und  $\chi\rho\omicron\nu\omicron\varsigma$  (chronos) Zeit. Die Frage ist, wie man auf die schnellste Art nur durch die Schwerkraft von  $(x_0, z_0)$  nach  $(x_1, z_1)$  kommt (mit  $z_1 < z_0$ ), wenn man über einer Kurve zwischen diesen beiden Punkte fährt. Diese Kurve soll man bestimmen. In moderner Sprache: Welche Achterbahn ohne Reibung geht am schnellsten?

Welche dieser beiden Punkte es genau sind, ist unwichtig, aber um konkret zu bleiben nehmen wir  $(0, 0)$  und  $(6, -1)$ . Man startet mit Geschwindigkeit 0. Welche Kurve sorgt für die schnellste Verbindung?

Das Problem trennt sich in drei Teilprobleme:

I Die physikalische Herleitung. Diese Herleitung gehört nicht direkt zu Variationsrechnung, aber werden wir hier machen zur Illustration.

II Das eigentliche variationelle Problem.

III Die Lösung der Differentialgleichung. Bei diesem Beispiel sollte man die Lösung, wenn man eine Vorlesung zu DGL gehört hat, schon bestimmen können.

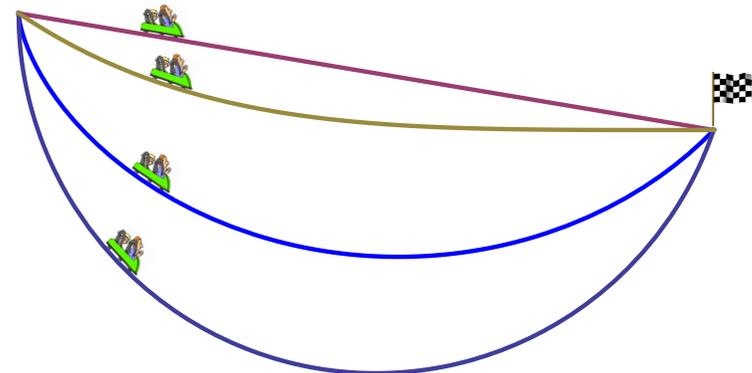


Abbildung 1.1: Welche Achterbahn führt am schnellsten zum Ziel?

### Physikalische Herleitung

Die Energiegleichung

$$E_{pot} + E_{kin} = 0$$

bringt

$$mgh + \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2) = 0, \quad (1.1)$$

wobei  $h$  die Höhe,  $m$  die Masse,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  die Geschwindigkeit und  $g$  die Gravitationskonstante ist.

Weil  $v_1 = \frac{dx}{dt}$ , gilt für die Zeit von  $x = 0$  bis  $x = 6$  mit Hilfe der inversen Funktion  $x \mapsto t(x)$ , dass

$$T = t(6) - t(0) = \int_0^6 t'(x) dx = \int_0^6 \frac{1}{v_1} dx.$$

Schreibt man an der Stelle  $x$  für die Höhe  $h = -u(x)$ , und nimmt man die Geschwindigkeiten nach rechts und nach unten positiv, so folgt  $v_2 = u'(x)v_1$  und

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{1 + (u'(x))^2} v_1.$$

Mit (1.1) finden wir

$$\frac{1}{v_1} = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2gu(x)}}.$$

Die Zeit  $T(u)$ , die man braucht um über die Kurve  $(x, u(x))$  von  $(0, 0)$  nach  $(6, 1)$  zu kommen, beträgt so

$$T(u) = \int_0^6 \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{2gu(x)}} dx, \quad (1.2)$$

wobei man sich beschränkt auf Kurven, für die gilt  $u(0) = 0$  und  $u(6) = 1$ . Man nennt eine Funktion  $T$ , die auf Funktionen wirkt, ein **Funktional**.

### Variationelle Betrachtungen

Das Funktional  $T(u)$  ist eine Funktion von Funktionen und wir wollen eine Funktion  $u$  finden, die dieses  $T$  minimal macht. Weil man innerhalb von  $T$  eine Ableitung von  $u$  findet, nehmen wir an, dass wir differenzierbare Funktionen brauchen. Um sicher zu sein, dass das Integral existiert, nehmen wir sogar an, dass  $u$  stetig differenzierbar ist.

Wenn man eine solche minimierende Funktion  $u$  hat, kann man versuchen einige Eigenschaften zu finden. Eine grobe Herleitung geht wie folgt: Stört man die minimierende Kurve  $u$  ein wenig, sagen wir durch  $\tau\varphi(x)$ , wobei  $\varphi$  eine Störungsfunktion und  $\tau \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist, dann soll gelten

$$T(u + \tau\varphi) \geq T(u).$$

Wenn man  $\tau \mapsto T(u + \tau\varphi)$  ableiten kann, folgt für dieses  $u$  und für alle  $\varphi$ , die erlaubt sind, weil diese Funktion für  $\tau = 0$  ein Minimum haben soll, dass

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T(u + \tau\varphi) = 0 \text{ für } \tau = 0.$$

Da  $u(0) = 0$  und  $u(6) = 1$  erhalten bleiben sollen für  $u + \tau\varphi$ , müssen die Randwerte  $\varphi(0) = \varphi(6) = 0$  gelten. Es folgt mit einigen direkten, jedoch technisch mühsamen Rechenschritten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} T(u + \tau\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^6 \sqrt{\frac{1 + (u'(x) + \tau\varphi'(x))^2}{u(x) + \tau\varphi(x)}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^6 \left( \frac{(u'(x) + \tau\varphi'(x))}{\sqrt{u(x) + \tau\varphi(x)} \sqrt{1 + (u'(x) + \tau\varphi'(x))^2}} \varphi'(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 + (u'(x) + \tau\varphi'(x))^2)^{\frac{1}{2}}}{2(u(x) + \tau\varphi(x))^{\frac{3}{2}}} \varphi(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Man definiert

$$\partial T(u; \varphi) := \left( \frac{\partial}{\partial \tau} T(u + \tau \varphi) \right)_{\tau=0} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^6 \left( \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}\sqrt{1+(u'(x))^2}} \varphi'(x) - \frac{(1+(u'(x))^2)^{\frac{1}{2}}}{2(u(x))^{\frac{3}{2}}} \varphi(x) \right) dx, \quad (1.3)$$

und nennt  $\varphi \mapsto \partial T(u; \varphi)$  in (1.3) die **erste Variation** von  $T$  an der Stelle  $u$ .

Wir suchen also  $u$  derart, dass  $\partial T(u; \varphi) = 0$  für alle passenden  $\varphi$ . Wenn wir jetzt annehmen, dass  $u$  sogar zweimal stetig differenzierbar ist, können wir partiell integrieren und finden

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^6 \left( \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}\sqrt{1+(u'(x))^2}} \varphi'(x) - \frac{\sqrt{1+(u'(x))^2}}{2(u(x))^{\frac{3}{2}}} \varphi(x) \right) dx \\ &= \left[ \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}\sqrt{1+(u'(x))^2}} \varphi(x) \right]_0^6 + \int_0^6 \left( - \left( \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}\sqrt{1+(u'(x))^2}} \right)' - \frac{\sqrt{1+(u'(x))^2}}{2(u(x))^{\frac{3}{2}}} \right) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Verwenden wir  $\varphi(0) = \varphi(6) = 0$ , so folgt

$$\int_0^6 \left( - \left( \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}\sqrt{1+(u'(x))^2}} \right)' - \frac{\sqrt{1+(u'(x))^2}}{2(u(x))^{\frac{3}{2}}} \right) \varphi(x) dx = 0. \quad (1.4)$$

**Lemma 1.1.1** Wenn  $v \in C(a, b)$  derartig ist, dass

$$\int_a^b v(x) \varphi(x) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(a, b), \quad (1.5)$$

dann gilt  $v \equiv 0$  auf  $(a, b)$ . Hier ist  $C_0^\infty(a, b)$  die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die außerdem einen kompakten Träger innerhalb  $(a, b)$  haben.

Dieses Lemma 1.1.1 ist eine einfache Version vom sogenannten **Hauptlemma der Variationsrechnung**.

Für (1.4) folgt mit diesem Lemma, dass

$$- \left( \frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}} \right)' - \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{2u^{3/2}} = 0, \quad (1.6)$$

wenn man annimmt, dass der Ausdruck zwischen den Klammern in (1.4) stetig ist.

Bemerke, dass die erste Variation des Funktionals  $T$  so eine Differentialgleichung geliefert hat.

### Lösung der Differentialgleichung

Um die Geschichte zu vervollständigen, zeigen wir hier noch kurz, wie man (1.6) mehr oder weniger explizit lösen kann.

Mit (1.6) findet man

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{\sqrt{u}} - \left( \frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}} \right) u' \right)' = \\ &\left( - \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{2u^{3/2}} - \left( \frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}} \right)' \right) u' = 0, \end{aligned}$$

und weil

$$\frac{\sqrt{1+(u')^2}}{\sqrt{u}} - \left( \frac{u'}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}} \right) u' = \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}}$$

gilt, folgt

$$\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+(u')^2}} = c_1 \text{ mit } c_1 \in \mathbb{R}^+.$$

Daraus wird eine trennbare Differentialgleichung:

$$\sqrt{\frac{u}{c_1^2 - u}} u' = \pm 1$$

mit Anfangswert  $u(0) = 0$ . Substituieren wir  $u = \frac{1}{2}c_1^2(1 - \xi)$ , so folgt

$$\begin{aligned} \pm 1 &= -\frac{1}{2}c_1^2 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \xi' = \frac{1}{2}c_1^2 \frac{\xi-1}{\sqrt{1-\xi^2}} \xi' \\ &= \frac{1}{2}c_1^2 \left( -\sqrt{1-\xi^2} + \arccos(\xi) \right)' \end{aligned}$$

und mit  $x = 0$  für  $\xi = 1$ , dass

$$\pm x = \frac{1}{2}c_1^2 \left( -\sqrt{1-\xi^2} + \arccos(\xi) \right).$$

Bedenkt man, dass  $x \geq 0$  und setzt man  $s = \arccos(\xi)$ , so folgt eine Lösung in Parameterform, nämlich eine Zykloide:

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} s - \sin(s) \\ 1 - \cos(s) \end{pmatrix}.$$

Witzigerweise haben wir unterwegs einige Annahmen gemacht, nämlich dass die Lösung zweimal stetig differenzierbar ist, die im Nachhinein betrachtet nur teils erlaubt waren. Zwar sind  $t \mapsto x(t)$  und  $t \mapsto u(x(t))$  stetig differenzierbar und das ist sehr angenehm, wenn man auf der Achterbahn fährt, jedoch ist  $x \mapsto u(x)$  nicht differenzierbar in 0.

**Aufgabe 1.1** Welche Kurve macht die schnellste Verbindung, wenn man anfängt mit Geschwindigkeit  $|\vec{v}| = 1$ ?

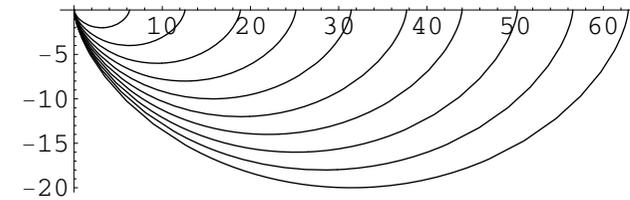


Abbildung 1.2: Aus dieser Familie sucht man sich jetzt die Funktion, bei der die Randbedingung  $u(6) = -1$  erfüllt ist ...

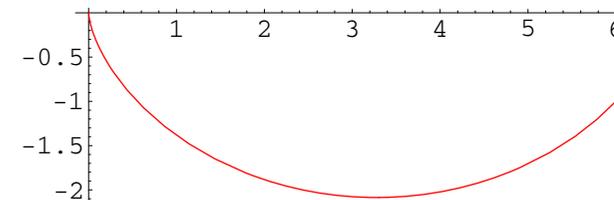


Abbildung 1.3: ... und sollte diese Funktion finden.

### 1.1.1 Zweck und Ziel der Variationsrechnung

Gegeben sei ein Funktional  $J : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx. \quad (1.7)$$

Hier sind  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B} = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ passende Funktionen}\}$  und  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  eine genügend glatte Funktion. Mit  $D$  ist die Ableitung gemeint; im mehr-dimensionalen Fall wäre es der Gradient.

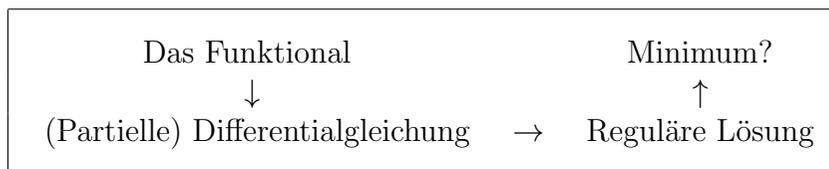
*Die generische Aufgabe in der Variationsrechnung ist es, eine solche Funktion  $u$  zu finden, dass  $J$  in*

*u einen stationären Punkt hat. Meistens sucht man ein Minimum und das passt genau zum Prinzip der minimalen Energie aus der Physik.*

Das Finden einer solchen Funktion besteht meistens nicht aus der Konstruktion einer expliziten Formel, sondern beschäftigt sich eher mit Existenz, Eindeutigkeit und möglichen Regularitätseigenschaften einer solchen Lösung.

Grob gesagt gibt es zwei Richtungen in der Variationsrechnung:

- Die klassische Variationsrechnung:



- Die direkten Methoden der Variationsrechnung:



Eine reguläre Lösung ist eine Funktion, die die Differentialgleichung im klassischen Sinne erfüllt. Bei vielen Anwendungen existiert so eine Lösung nicht. Eine schwache Lösung ist eine Verallgemeinerung des Lösungsbegriffes, die breitere Anwendungsmöglichkeiten hat aber bei der manchmal die Werte nicht punktweise definiert sind.

Man kann mit Numerik die Lösungen bei variationellen Problemen versuchen zu approximieren. Für eine Differentialgleichung, die man bei der klassischen Variationsrechnung versucht zu finden, sind *Finite Differenzen* eine oft verwendete Methode. Währenddessen werden *Finite Elemente* oft verwendet bei diskreten Approximationen in den direkten Methoden.

## 1.2 Räume stetiger Funktionen

Weil in der Variationsrechnung Funktionale betrachtet werden, braucht man genaue Absprachen über die Funktionsräume auf dem diese Funktionale wirken. Wir fangen an mit stetigen Funktionen, die definiert sind auf (einer Teilmenge von)  $\mathbb{R}^n$ . Man verwendet in der Notation das  $C$  von *continuous* und einen Index für spezielle Bedingungen.

**Notation 1.2.1** Sei  $A$  eine Menge.

1.  $C(A) = \{u : A \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ stetig}\}$  ist der Vektorraum der stetigen Funktionen von  $A$  nach  $\mathbb{R}$ .
2.  $C_b(A) = \{u \in C(A) \text{ und } \|u\| < \infty\}$  ist der Raum der beschränkten stetigen Funktionen. Dieser Teilraum von  $C(A)$  ist derart, dass es für jedes  $u$  ein  $M_u \in \mathbb{R}$  gibt mit  $|u(x)| \leq M_u$  für alle  $x \in A$ .
3.  $C_c(A) = \{u \in C(A) \text{ und } \text{supp}(u) \Subset A^\circ\}$ , also der Teilraum von  $C(A)$  der Funktionen  $u$  für die der **Träger**

$$\text{supp}(u) := \overline{\{u(x) \neq 0\}}$$

kompakt innerhalb von  $A^\circ$  liegt.

4.  $C_0(A) = \{u \in C(A) \text{ und } \lim_{x \rightarrow \partial A \text{ oder } \|x\| \rightarrow \infty} u(x) = 0\}$   
 ist der Vektorraum der stetigen Funktionen  $u$ , die ‘am Rand’ 0 werden: Wenn  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  eine Folge ist mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \in \partial\Omega \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \infty,$$

dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = 0$ .

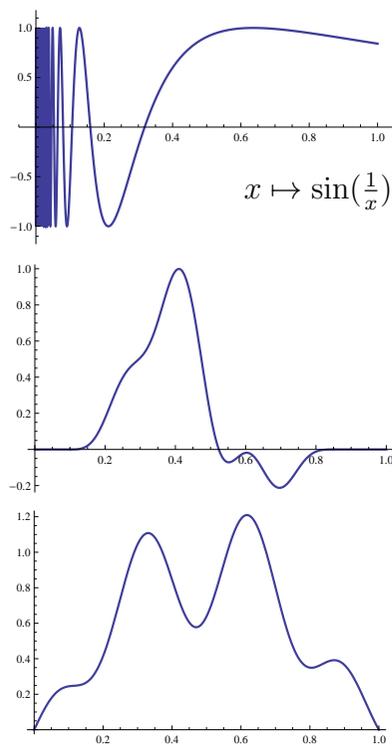


Abbildung 1.4: Graphen typischer Funktionen aus  $C_b((0,1))$ ,  $C_c([0,1])$  bzw.  $C_0([0,1])$ .

**Bemerkung 1.2.2** In der Literatur sind die Notationen nicht eindeutig. Manchmal wird mit  $C(A)$  eigentlich  $C_b(A)$  gemeint und mit  $C_0(A)$  oder  $C_{00}(A)$  der Raum  $C_c(A)$ . Manchmal macht man Unterschiede für  $A$  kompakt,  $A$  offen und beschränkt und  $A$  offen und unbeschränkt.

Wenn nur bekannt ist, dass  $A \subset \mathbb{R}^n$ , dann hat  $C(A)$  noch wenig Struktur. Wenn jedoch  $A$  kompakt ist, dann weiss man, dass jede stetige Funktion auf  $A$  beschränkt und gleichmäßig stetig ist. Auf ein Kompaktum ist das Supremum einer stetigen Funktion auch das Maximum. Weil das Supremum so endlich ist, kann man so eine Norm definieren und sogar beweisen, dass dieser normierte Raum gute Eigenschaften hat:

**Theorem 1.2.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet<sup>1</sup>. Dann ist der normierte Vektorraum  $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})})$  mit Norm definiert durch

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} := \|u\|_{\infty} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$$

sogar ein Banachraum.

**Bemerkung 1.2.4**  $\|\cdot\|_X : X \rightarrow [0, \infty)$  heißt eine **Norm** auf  $X$ , wenn

1.  $\|u\|_X \geq 0$  und  $\|u\|_X = 0 \Leftrightarrow u = 0$  für alle  $u \in X$ ;
2.  $\|cu\|_X = |c| \|u\|_X$  für alle  $u \in X$  und  $c \in \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ );

<sup>1</sup>Die Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heißt ein Gebiet (in Englisch *domain*), wenn  $\Omega$  offen und zusammenhängend ist. Beschränkt heißt  $\Omega \subset B_R(0)$  für eine Zahl  $R$ . Mit  $\bar{\Omega}$  ist der Abschluss von  $\Omega$  gemeint, also mit Rand:  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

3.  $\|u + v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X$  für alle  $u, v \in X$ .

**Bemerkung 1.2.5** Ein normierter Vektorraum ist vollständig, wenn jede Cauchy-Folge auch konvergent ist mit Grenzwert in dem Raum. Einen vollständigen normierten Vektorraum nennt man **Banachraum**.

**Beweis.** Zuerst soll man zeigen, dass  $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})})$  ein normierter Vektorraum ist, und der erste Schritt dabei ist, zu zeigen, dass die Norm wohldefiniert ist. Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$ . Weil  $\bar{\Omega}$  kompakt ist, existiert  $\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$  in  $\mathbb{R}$  und

$$\|u\|_{\infty} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| < \infty.$$

Die weiteren Eigenschaften der Norm zeigt man sofort.

Die Vollständigkeit von  $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})})$  braucht mehrere Schritte.

- Eine Cauchy-Folge konvergiert punktweise: Nehmen wir eine Cauchy-Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es  $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  derart, dass  $n, m \geq N_{\varepsilon}$  impliziert  $\|u_n - u_m\|_{\infty} < \varepsilon$ . Dann ist auch  $\{u_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge, diesmal in  $\mathbb{R}$ , und weil  $\mathbb{R}$  vollständig ist, existiert

$$U(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

- Der Limes ist stetig: Nehmen wir an,  $U$  ist nicht stetig auf  $\bar{\Omega}$ . Dann gibt es  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , und eine Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $|U(x_n) - U(x)| > \varepsilon_0$ . Im ersten Schritt legen wir  $n_1 \in \mathbb{N}$  wie folgt fest:  $n_1$  ist derart, dass für  $n, m \geq n_1$  gilt  $\|u_n - u_m\|_{\infty} < \varepsilon_0/4$ . Weil  $u_{n_1}$

stetig ist, gibt es  $\delta_0$  derart, dass für  $|x_n - x| < \delta_0$  gilt  $|u_{n_1}(x_n) - u_{n_1}(x)| < \varepsilon_0/4$ . Man findet für  $|x_n - x| < \delta_0$  und alle  $k, m \geq n_1$ , dass

$$\begin{aligned} |u_k(x_n) - u_m(x)| &\leq \\ &\leq |u_k(x_n) - u_{n_1}(x_n)| + |u_{n_1}(x_n) - u_{n_1}(x)| \\ &\quad + |u_{n_1}(x) - u_m(x)| < \frac{3}{4}\varepsilon_0. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun ein solches  $x_n$  mit  $|x_n - x| < \delta_0$  und weil  $u_k(x_n) \rightarrow U(x_n)$  für  $k \rightarrow \infty$  und weil auch  $u_m(x) \rightarrow U(x)$  für  $m \rightarrow \infty$ , folgt  $|U(x_n) - U(x)| < \frac{3}{4}\varepsilon_0$ , ein Widerspruch.

- $U$  ist der punktweise Limes. Ist es auch der Limes in der Norm? Zu zeigen ist, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U - u_n\| = 0$ . Auch dies folgt aus der Dreiecksungleichung: für jedes  $x \in \bar{\Omega}$  findet man

$$\begin{aligned} |U(x) - u_n(x)| &\leq |U(x) - u_m(x)| + |u_m(x) - u_n(x)| \\ &\leq |U(x) - u_m(x)| + \|u_m - u_n\|. \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0$ , nehme  $N$  derart, dass für  $n, m \geq N$  folgt  $\|u_m - u_n\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Als Nächstes bläst man  $m$  auf, um  $|U(x) - u_m(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$  zu finden. Für jedes  $x \in \bar{\Omega}$  und  $n \geq N$  folgt  $|U(x) - u_n(x)| < \varepsilon$ , also auch  $\|U - u_n\| < \varepsilon$ . ■

Es sei nochmals bemerkt, dass Normkonvergenz eine stärkere Bedingung ist als die punktweise Konvergenz. Betrachten Sie die Funktionenfolge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C[0, 1]$  definiert durch  $u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ . Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$  für alle  $x \in [0, 1]$  aber auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - 0\| = |u_n(\frac{1}{n})| = \frac{1}{2}.$$

Diese Folge konvergiert nicht bezüglich der Norm. Wenn ein Grenzwert  $u_\infty$  bezüglich der Norm existieren würde, würde aus  $\|u_\infty - u_n\| \rightarrow 0$  folgen, dass  $|u_\infty(x) - u_n(x)| \rightarrow 0$  und man findet, dass auch nur  $u_\infty = 0$  als Grenzwert in Frage käme.

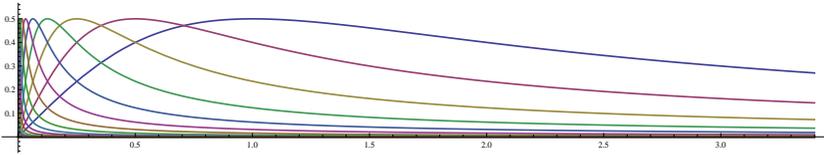


Abbildung 1.5: Die Funktionenfolge  $x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$  konvergiert nicht in der  $\|\cdot\|_{C([0,1])}$ -Norm.

**Aufgabe 1.2** Wieso ist  $\|\cdot\|_\infty$  keine Norm für die stetigen Funktionen auf ein unbeschränktes  $\bar{\Omega}$ ?

**Aufgabe 1.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein unbeschränktes Gebiet. Ist  $\|\cdot\|_\infty$  eine Norm für  $C_b(\bar{\Omega})$ ?

### 1.3 Räume differenzierbarer Funktionen

Für einen Multiindex  $\alpha$ , das heißt  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , setzt man für  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \\ D^\alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}, \\ |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n. \end{aligned}$$

Um die Formulierungen für ein und allemal festzulegen, geben wir die folgenden Definitionen. Auch hier ist  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ ;  $\bar{\Omega}$  ist die zugehörige abgeschlossene Menge.

**Definition 1.3.1** Vektorräume stetiger und differenzierbarer Funktionen auf offenen Mengen.

1.  $C^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \begin{array}{l} u \text{ ist differenzierbar und} \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega) \text{ für } i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$ .
2.  $C^k(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \begin{array}{l} u \text{ ist differenzierbar und} \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega) \text{ für } i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$ .

**Bemerkung 1.3.2** Manchmal sieht man auch  $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$ . Mit  $C_c^\infty(\Omega)$  sind die Funktionen in  $C^\infty(\Omega)$  gemeint, die einen kompakten Träger innerhalb  $\Omega$  haben. Manchmal findet man diese Funktionen in der Literatur auch notiert als  $C_0^\infty(\Omega)$ .

**Definition 1.3.3** Vektorräume stetiger und differenzierbarer Funktionen auf abgeschlossenen Mengen.

1.  $C^1(\bar{\Omega}) = \left\{ u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; \begin{array}{l} u \text{ ist differenzierbar und} \\ \exists g_i \in C(\bar{\Omega}) \text{ mit } \frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ in } \Omega \text{ für } i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$ .
2.  $C^k(\bar{\Omega}) = \left\{ u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; \begin{array}{l} u \text{ ist differenzierbar und} \\ \exists g_i \in C^{k-1}(\bar{\Omega}) \text{ mit } \frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ in } \Omega \text{ für } i = 1, \dots, n \end{array} \right\}$ .

Auch hier kann man wieder die Buchstaben  $b, c$  oder  $0$  unten anhängen. Zum Beispiel definiert man, wenn  $\Omega$  beschränkt ist,

$$C_0^1(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^1(\bar{\Omega}); u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ und } |\nabla u|_{|\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Schreibt man  $C^0(\bar{\Omega})$ , dann ist  $C(\bar{\Omega})$  gemeint.

Auf Intervallen braucht man auch mal Funktionen, die stetig und stückweise differenzierbar sind. Zum Beispiel

$$C_{pc}^2[a, b] = \left\{ u \in C^1[a, b]; \exists a = a_0 < a_1 < \dots < a_{k+1} = b \right. \\ \left. \text{mit } u|_{[a_i, a_{i+1}]} \in C^2[a_i, a_{i+1}] \text{ für } i = 0, \dots, k \right\}.$$

**Lemma 1.3.4** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ . Einige normierte Vektorräume sind:

1.  $(C^1(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^1(\bar{\Omega})})$  als die stetig differenzierbaren Funktionen mit der Norm definiert durch

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} = \|u\|_{\infty} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{\infty},$$

und iterativ:

2.  $(C^k(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k(\bar{\Omega})})$  als die  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit der Norm definiert durch

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \|u\|_{\infty} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{C^{k-1}(\bar{\Omega})}. \quad (1.8)$$

Die Ableitungen sind hier wie in Definition 1.3.3 definiert. Man kontrolliert sofort, dass die Eigenschaften einer Norm erfüllt sind für  $\|\cdot\|_{C^k(\bar{\Omega})}$ .

**Theorem 1.3.5** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(C^k(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k(\bar{\Omega})})$  ein Banachraum.

Um dieses Ergebnis zu beweisen, verwendet man Theorem 1.2.3. Zusätzlich soll man jedoch noch zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} u_n(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \right).$$

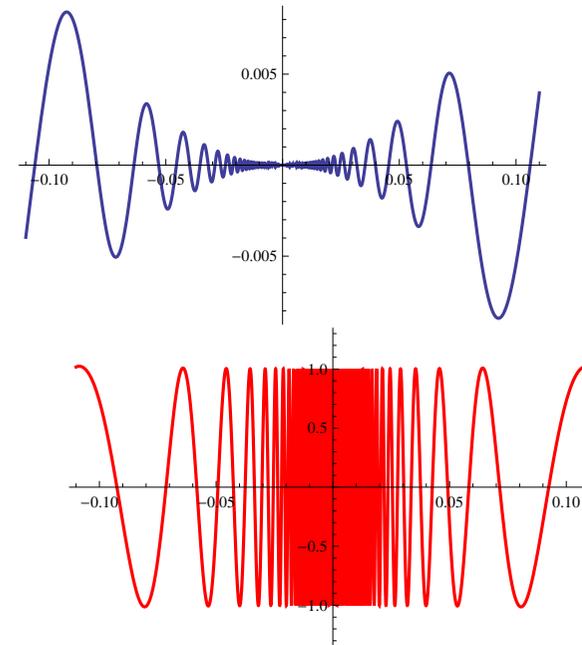


Abbildung 1.6: Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  für  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$  und  $f(0) = 0$  ist zwar differenzierbar, weil jedoch die Ableitung nicht stetig ist, folgt  $f \notin C^1([-1, 1])$ . Oben ist  $f$  dargestellt und unten  $f'$ .

## 1.4 Hölder-Räume

Zwischen  $C^k(\bar{\Omega})$  und  $C^{k+1}(\bar{\Omega})$  liegen auch noch die **Hölder-Räume** :

**Definition 1.4.1** Für  $\gamma \in (0, 1]$  und  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man die Seminorm<sup>2</sup>:

$$[u]_\gamma = \sup_{x \neq y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}. \quad (1.9)$$

1.  $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega}) = \left\{ u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ stetig und } [u]_\gamma < \infty \right\}$ .
2.  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) = \left\{ u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; u \in C^k(\bar{\Omega}) \text{ und } D^\alpha u \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega}) \text{ für } |\alpha| = k \right\}$ .

**Bemerkung 1.4.2**  $C^{0,1}(\bar{\Omega})$  sind die Lipschitz-stetigen Funktionen.

**Lemma 1.4.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  mit  $\alpha < \beta$ . Dann gilt

$$C^{k+1}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,1}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,\beta}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset C^k(\bar{\Omega})$$

und alle Inklusionen sind strikt.

**Bemerkung 1.4.4** Man sagt  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ , d.h. der Rand ist gleichmäßig Lipschitz, wenn es endlich viele cartesische Koordinatensysteme  $(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})_{m=1}^k$  gibt, so dass:

<sup>2</sup>Eine Seminorm ist nichtnegativ und erfüllt Eigenschaft 2 und 3 einer Norm wie in Bemerkung 1.2.4.

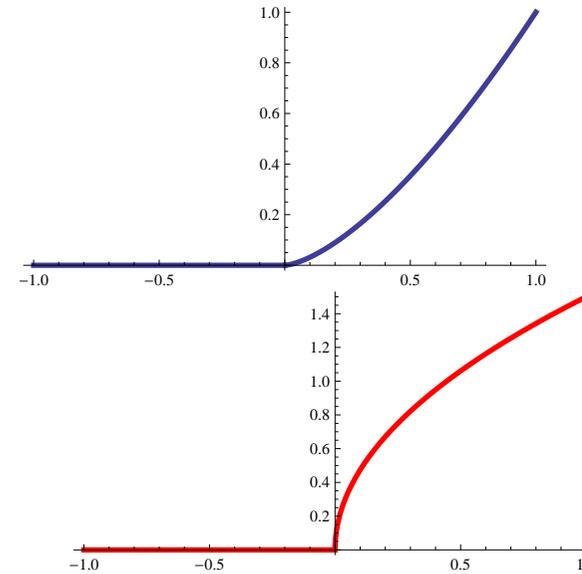


Abbildung 1.7: Oben  $f(x) = (\max(0, x))^{3/2}$  und unten  $f'$ . Es gilt  $f \in C^{1, \frac{1}{2}}([-1, 1])$  und  $f' \in C^{0, \frac{1}{2}}([-1, 1])$ .

1.  $\partial\Omega \subset \bigcup_{m=1}^k B_m$  mit

$$B_m := \bigcup \left\{ x^{(m)} \in \mathbb{R}^n; a_i^{(m)} < x_i^{(m)} < b_i^{(m)} \right\},$$

2.  $\Omega \cap B_m = \left\{ x^{(m)} \in B_m; \psi^{(m)}(x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}) < x_1^{(m)} \right\}$ ,  
und

3.  $\psi^{(m)} \in C^{0,1}(\mathbb{R}^{n-1})$  für  $m = 1, \dots, k$ .

**Beweis.** Um die Inklusionen zu zeigen, benutzt man für kon-

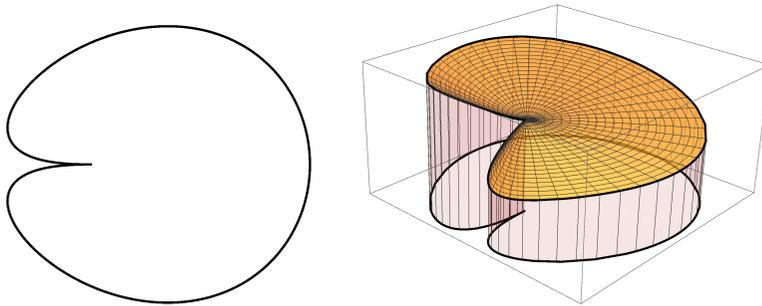


Abbildung 1.8: Auf dem Gebiet links, das die Lipschitz-Bedingung bei der Spitze in  $(0, 0)$  nicht erfüllt, sind  $C^1(\bar{\Omega})$ -Funktionen nicht unbedingt  $C^{0,1}(\bar{\Omega})$ -Funktionen, wie die differenzierbare Funktion  $|x|^2 \operatorname{Arg}(x_1 + ix_2)$  rechts zeigt. Man nehme  $x$  und  $y$  symmetrisch an gegenüberliegenden Stellen an dem Schlitz und läßt die beiden zur Spitze gehen. Wenn der Schlitz genügend spitz ist, dann wird der zugehörige Differenzenquotient beliebig groß.

vexe Gebiete die folgenden Ungleichungen:

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \leq |\nabla u(\theta)| \text{ für ein } \theta \in [x, y]$$

und

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta} |x - y|^{\beta - \alpha} \\ &\leq \operatorname{diam}(\Omega)^{\beta - \alpha} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\beta}. \end{aligned}$$

Wenn ein Gebiet nicht konvex ist, jedoch schon diese Lipschitzbedingung erfüllt, dann gibt es eine Konstante  $C_\delta > 0$  so, dass es für jedes Paar  $x, y \in \Omega$  mit  $|x - y| < \delta$  einen

Polygonzug  $P_{xy}$  von  $x$  nach  $y$  innerhalb  $\Omega$  gibt mit Länge  $\ell_{x,y} \leq C|x - y|$ . Es folgt, dass

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \leq C|\nabla u(\theta)| \text{ für ein } \theta \in P_{xy}.$$

Beispiele, die zeigen, dass die Inklusionen strikt sind, bekommt man für Funktionen auf  $[-1, 1]$ , indem man den Exponent  $p$  in  $x \mapsto \max(0, x)^p$  geschickt wählt. ■

Das nächste Ergebnis werden wir nicht beweisen.

**Theorem 1.4.5** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in (0, 1]$ . Dann ist der normierte Vektorraum  $(C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})})$ , mit der Norm definiert durch

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_\infty + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_\gamma, \quad (1.10)$$

ein Banachraum. Man nennt  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  den Hölder-Raum der Ordnung  $(k, \gamma)$ .

## 1.5 Differenzierbarkeit eines Funktional

Wie man bei der Brachistochrone gesehen hat, war es der erste Schritt, um ein Minimum für

$$J(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x)) \, dx \quad (1.11)$$

zu finden, die Gleichung  $\frac{\partial}{\partial \tau} J(u + \tau \varphi)|_{\tau=0} = 0$  anzuschauen.

**Definition 1.5.1** Das Funktional  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Gateaux-differenzierbar** in  $u \in X$ , wenn

1.  $\frac{\partial}{\partial \tau} J(u + \tau\varphi)|_{\tau=0}$  existiert für alle  $\varphi \in X_0$  und
2.  $J'(u) := (\varphi \mapsto \frac{\partial}{\partial \tau} J(u + \tau\varphi)|_{\tau=0} : X_0 \rightarrow \mathbb{R})$  stetig ist.

Hier ist  $X_0 \subset X$  so gewählt, dass  $\varphi \in X_0$  impliziert, dass wenn  $u \in X$  eine zulässige Funktion ist, auch  $u + \varphi$  eine zulässige Funktion ist.

Statt  $J'(u)(\varphi)$  schreibt man auch  $\partial J(u; \varphi)$ .

**Bemerkung 1.5.2** Bedingung 2. soll man wie folgt lesen:  $\varphi \mapsto J'(u)(\varphi) : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig. Es hat nichts mit möglicher Stetigkeit von  $u \mapsto J'(u)$  zu tun. Manchmal wird Bedingung 2. auch weggelassen und bekommt dann eine schwächere Version von Gateaux-Differenzierbarkeit.

**Bemerkung 1.5.3** Wenn  $u$  und  $u + \varphi$  beide die gleichen Randbedingungen erfüllen müssen, dann kann es sein, dass  $\varphi$  am Rande gleich 0 sein muss, wie wir bei der Brachistochrone gesehen haben. In dem Fall liegt  $\varphi$  in einem Teilraum  $X_0 \subset X$ .

**Definition 1.5.4** Hat man zusätzlich, dass  $\varphi \mapsto \partial J(u; \varphi) : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$  eine (stetige) lineare Abbildung ist derart, dass die Bedingung

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0 \text{ in } X} \frac{|J(u + \varphi) - J(u) - \partial J(u; \varphi)|}{\|\varphi\|_X} = 0,$$

erfüllt ist, dann heißt  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  **Fréchet-differenzierbar** in  $u$ .

**Bemerkung 1.5.5** Gateaux-differenzierbar kann man beschreiben wie:  $J$  ist in  $u$  differenzierbar in jede Richtung  $\varphi$  mit  $J'(u)(-\varphi) = -J'(u)(\varphi)$  und diese Richtungsableitungen sind stetig abhängig von der Richtung. In endlich dimensionalen Räumen ist Fréchet-differenzierbar die übliche Differenzierbarkeit.

## Die erste Variation

### 2.1 Definition der ersten Variation

Wenn man eine stationäre Stelle, wie zum Beispiel ein Minimum für das Funktional in (1.11) sucht, dann würde man, wie bei Funktionen, die Stelle suchen, wo die Ableitung gleich 0 ist. Das schauen wir uns als Nächstes genauer an.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und sei  $J$  als Funktion von  $C^1(\bar{\Omega})$  nach  $\mathbb{R}$  definiert durch

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx. \quad (2.1)$$

Wenn eine Funktion  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  das Funktional  $J$  minimiert, dann findet man ein Minimum für jede passende Störungsrichtung  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ . Das bedeutet, dass die Funktion

$$\tau \mapsto J(u + \tau\varphi) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2)$$

ein Minimum hat für  $\tau = 0$  und wenn  $J$  Gateaux-differenzierbar ist, bedeutet das, dass die Funktion in (2.2)

in 0 einen stationären Punkt hat, also gilt

$$\frac{\partial}{\partial \tau} J(u + \tau\varphi)|_{\tau=0} = 0.$$

Dies ist die Ableitung von  $J$  an der Stelle  $u$  in Richtung  $\varphi$  und die berechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} J(u + \tau\varphi)|_{\tau=0} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{J(u + \tau\varphi) - J(u)}{\tau} = \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{F(x, u(x) + \tau\varphi(x), \nabla u(x) + \tau\nabla\varphi(x)) - F(x, u(x), \nabla u(x))}{\tau} dx &= (*). \end{aligned}$$

Wenn man für ein konkretes  $F$  begründen kann, dass man den Limes und das Integral vertauschen kann, folgt

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\Omega} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(x, u(x) + \tau\varphi(x), \nabla u(x) + \tau\nabla\varphi(x)) - F(x, u(x), \nabla u(x))}{\tau} dx \\ &= \int_{\Omega} \left( F_u(x, u, \nabla u(x))|_{u=u(x)} \varphi(x) + F_p(x, u(x), p)|_{p=\nabla u(x)} \cdot \nabla\varphi(x) \right) dx \end{aligned}$$

mit  $F_p(x, u, p) = \left( \frac{\partial}{\partial p_1} F(x, u, p), \dots, \frac{\partial}{\partial p_n} F(x, u, p) \right)$ .

Kurzgefasst wird dies

$$\frac{\partial}{\partial \tau} J(u + \tau \varphi)|_{\tau=0} = \int_{\Omega} (F_u(x, u, Du)\varphi + F_p(x, u, Du) \cdot D\varphi) dx. \quad (2.3)$$

Es ist üblich, dass man für die Variablen aus  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  die Notation  $(x, u, p)$  verwendet.

**Definition 2.1.1** Wenn das Funktional  $\varphi \mapsto \partial J(u; \varphi)$ , definiert durch

$$\partial J(u; \varphi) := \frac{\partial}{\partial \tau} J(u + \tau \varphi)|_{\tau=0}$$

existiert, heißt es die erste Variation von  $J$ . In dem Fall nennt man  $\partial J(u; \varphi)$  die **erste Variation** in der Richtung  $\varphi$ .

**Bemerkung 2.1.2** Damit (2.1) und (2.3) eine Bedeutung haben, braucht man Folgendes:

1. Die Ableitungen  $\nabla u$  und  $\nabla \varphi$  sind wohl-definiert, zum Beispiel für  $u, \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ . Auch der Raum  $W^{1,2}(\Omega)$ , den wir in Kapitel 5 betrachten werden, könnte reichen.
2. Das Integral in (2.1) ist wohldefiniert und erlaubt

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\Omega} \dots dx = \int_{\Omega} \lim_{\tau \rightarrow 0} \dots dx.$$

3. Die Funktion  $(u, p) \mapsto F(x, u, p)$  ist differenzierbar und das Integral in (2.3) ist wohldefiniert.

4. Die Funktion  $\varphi$  ist so gewählt, dass eine Randwertbedingung für  $u$  auch für  $u + \tau \varphi$  erfüllt ist. Wenn zum Beispiel  $u$  auf dem Rand von  $\Omega$  vorgegeben wird, dann soll  $\varphi = 0$  auf  $\partial\Omega$  gelten.

**Bemerkung 2.1.3** Wir haben hier  $D$  für Ableitung verwendet. In einer Dimension gilt  $D\varphi = \varphi'$ ; in mehreren ( $n \geq 2$ ) Dimensionen gilt  $D\varphi = \nabla \varphi$ , wobei  $\nabla$  **der Gradient** ist. Das Symbol  $\nabla$  wird „nabla“ genannt<sup>1</sup>:

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \varphi \end{pmatrix}.$$



Der Spaltenvektor  $\nabla \varphi$  wird aus Platzgründen oft als Zeilenvektor geschrieben.

Es gibt auch **die Divergenz**  $\nabla \cdot$ :

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Für  $\nabla \cdot$  schreibt man oft auch einfach  $\nabla$  und aus dem Kontext muss man herausfinden, ob Gradient oder Divergenz gemeint ist.

Wenn die Funktion  $u$  ein Minimum von  $J$  liefert und  $J$  Gateaux-differenzierbar ist, dann folgt  $\partial J(u; \varphi) = 0$  oder anders gesagt, es gilt die Identität

$$\int_{\Omega} (F_u(x, u, Du)\varphi + F_p(x, u, Du) \cdot D\varphi) dx = 0. \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Nabla soll ein hebräisches Wort für eine Art von Harfe sein und diese Harfe sieht aus wie  $\nabla$ .

Abhängig vom Problem gilt (2.4) für alle Funktionen  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$  oder  $\varphi \in C_0^1(\bar{\Omega})$  oder sogar nur für  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Die Integralgleichung (2.4) für alle  $\varphi$  aus der Klasse der Testfunktionen wird *die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung* für  $J$  genannt.

Wie gesagt, die Klasse von Funktionen  $\varphi$  ist abhängig vom Problem, zum Beispiel von den Randwerten. Bei der Brachistochrone waren die Randwerte von  $u$  festgelegt und es wäre  $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$  passend.  $C_c^\infty(\Omega)$  ist eine Teilmenge davon und wir werden zeigen, dass diese Funktionen meistens schon reichen, um vom Variationsproblem zur Differentialgleichung zu gelangen.

Wenn wir annehmen, dass die betreffenden Funktionen genügend glatt sind, kann man (2.4) mit dem Satz von Gauß partiell integrieren:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (F_u(x, u, Du)\varphi + F_p(x, u, Du) \cdot D\varphi) \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} F_p(x, u, Du) \varphi \vec{\nu} d\sigma + \\ & \int_{\Omega} \left( F_u(x, u, Du) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \left( \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, u, Du) \right) \right) \varphi \, dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

mit  $\vec{\nu}$  dem auswärtigen Normalenvektor. Wenn  $\varphi = 0$  gilt auf  $\partial\Omega$ , ist das Randintegral gleich 0 und es folgt aus (2.4-2.5), dass

$$\int_{\Omega} \left( F_u(x, u, Du) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \left( \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, u, Du) \right) \right) \varphi \, dx = 0$$

Nehmen wir an, die Formel zwischen den Klammern ist stetig,

dann folgt

$$F_u(x, u, Du) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \left( \frac{\partial F}{\partial p_i}(x, u, Du) \right) = 0, \quad (2.6)$$

die sogenannte *starke Form der Euler-Lagrange Gleichung* für  $J$ .

**Bemerkung 2.1.4** Man kann (2.6) weiter ausschreiben. In einer Dimension wird es

$$F_u(x, u, u') - F_{px}(x, u, u') - u' F_{pu}(x, u, u') - u'' F_{pp}(x, u, u') = 0$$

und in mehreren Dimensionen

$$\begin{aligned} F_u(x, u, Du) - \sum_{i=1}^n F_{p_i x_i}(x, u, Du) - \sum_{i=1}^n u_{x_i} F_{p_i u}(x, u, Du) \\ - \sum_{i,j}^n u_{x_i x_j} F_{p_i p_j}(x, u, Du) = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit  $u = u(x)$  etc.

### 2.1.1 Intermezzo zu Gauß

Die ein-dimensionale **partielle Integration**

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

führt via den Satz von Fubini-Tonelli, der besagt

$$\begin{aligned} \int_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]} u(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \\ \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1, \end{aligned}$$

also mehrdimensionales Integral gleicht wiederholte ein-dimensionale Integrale, zu

$$\int_{x' \in A} \int_a^b u(x_1, x') \frac{\partial}{\partial x_1} v(x_1, x') dx_1 dx' = \int_{x' \in A} [u(x_1, x') v(x_1, x')]_{x_1=a}^b dx' - \int_{x' \in A} \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x') v(x_1, x') dx dx'. \quad (2.8)$$

Das erste Integral nach dem Gleichheitszeichen in (2.8) ist ein  $(n-1)$ -dimensionales Integral und wird ein Randintegral, wenn man auch allgemeinere Gebiete zulässt. Dies führt zu dem folgenden Ergebnis:

**Theorem 2.1.5 (Satz von Gauß)** Sei  $\vec{\nu}$  der auswärtige Normalenvektor auf  $\partial\Omega$ . Dann gilt für einmal stetig differenzierbare Funktionen  $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , dass

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu_i d\sigma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx.$$

Hier gehört  $dx$  zu dem  $n$ -dimensionalen Integral und  $d\sigma$  zu dem  $(n-1)$ -dimensionalen Flächenintegral.

Man kann es auch formulieren für  $\vec{w} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und verwendet dann die Divergenz:

$$\int_{\Omega} \vec{w} \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v (\vec{w} \cdot \vec{\nu}) d\sigma - \int_{\Omega} v (\nabla \cdot \vec{w}) dx$$

und mit  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$  und zweimaligem Anwenden, dass

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\partial\Omega} (\nabla u v - u \nabla v) \cdot \vec{\nu} d\sigma + \int_{\Omega} u \Delta v dx.$$

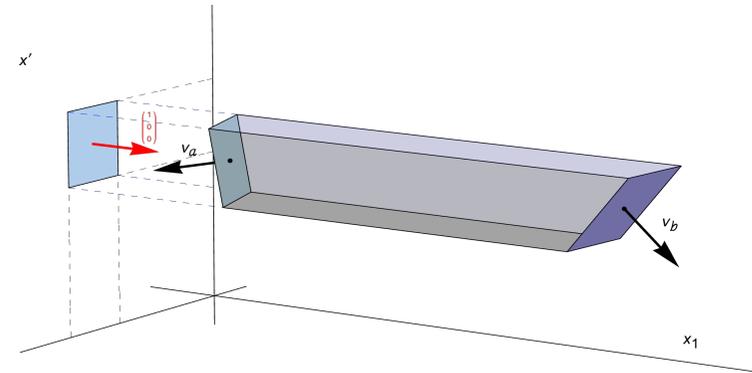


Abbildung 2.1: Um von (2.8) nach Gauß zu gelangen vergleicht man den Flächeninhalt vom Quadrat  $F_Q$  ganz links mit denen der beiden Parallelepipeden  $F_a$  und  $F_b$  links und rechts am skizzierten Stab. Man findet, wenn die linke oder die rechte Seite nicht gerade sind:

$$F_Q = \left( -\nu_a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) F_a = \left( \nu_b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) F_b$$

und dies führt hier bei dem Randintegral zu

$$„dx' = dx_2 dx_3 = -\nu_{a,1} d\sigma_a = \nu_{b,1} d\sigma_b“$$

mit  $\nu$  dem auswärtigen Normalenvektor.

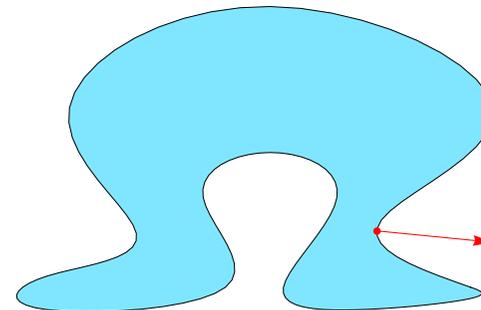


Abbildung 2.2:  $\Omega$  mit einem auswärtigen Normalenvektor

Weil  $\nabla u \cdot \vec{\nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu}$  gilt, kann man die letzte Gleichung auch wie folgt schreiben:

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\partial \Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial \nu} v - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{\Omega} u \Delta v \, dx.$$

Für Beweise suche man in der Literatur nach Gauß und Green.

## 2.2 Das erste Hauptlemma der Variationsrechnung

Schon ein paar Mal haben wir aus einer Integralgleichung mit Testfunktionen eine punktweise Gleichung hergeleitet. Wir formulieren das als Nächstes. Auch hier ist  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ , das heißt,  $\Omega$  ist offen und zusammenhängend.

**Lemma 2.2.1** Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$  und nehme an, dass

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) \, dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (2.9)$$

Dann gilt  $u \equiv 0$ .

**Bemerkung 2.2.2** Dieses Lemma gilt auch noch unter wesentlich schwächeren Bedingungen. Statt  $u \in C(\bar{\Omega})$  reicht schon  $u \in L^p(\Omega)$ .

**Beweis.** Nehme an,  $u(x_0) > 0$  gilt für ein  $x_0 \in \Omega$ . Weil  $u$  stetig ist, gibt es eine Umgebung  $B_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < \varepsilon\}$  mit  $B_{2\varepsilon}(x_0) \subset \Omega$  und  $u(x) \geq \frac{1}{2}u(x_0) > 0$  auf  $B_\varepsilon(x_0)$ . Definiere die **Testfunktionen**

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} & \text{für } x \in B_\varepsilon(x_0), \\ 0 & \text{für } x \in \Omega \setminus B_\varepsilon(x_0). \end{cases} \quad (2.10)$$

Man zeigt, dass  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  und weil

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) \, dx &= \int_{B_\varepsilon(x_0)} u(x)\varphi(x) \, dx \\ &\geq \frac{1}{2}u(x_0) \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi(x) \, dx > 0 \end{aligned}$$

gilt, folgt der Widerspruch. ■

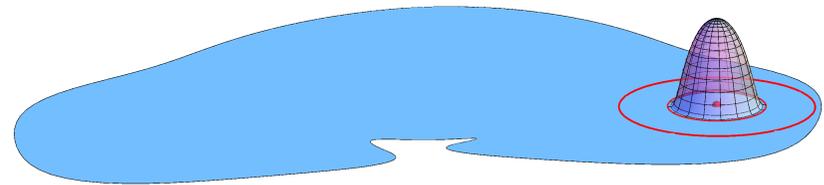


Abbildung 2.3:  $\Omega$ ,  $B_\varepsilon(x_0)$ ,  $B_{2\varepsilon}(x_0)$  und Testfunktion  $\varphi$ .

**Aufgabe 2.1** Zeige, dass die Funktion  $\varphi$  aus (2.10) in  $C_c^\infty(\Omega)$  liegt.

## 2.3 Satz beim Minimierungsproblem

**Theorem 2.3.1** Sei  $F \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  und definiere für  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  das Funktional

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u, Du) \, dx.$$

Sei  $\mathcal{C} \subset C^1(\bar{\Omega})$  derart, dass es für jedes  $u \in \mathcal{C}$  und  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $u + t\varphi \in \mathcal{C}$  für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Wenn  $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  ein globales Minimum in  $\tilde{u}$  hat und  $\tilde{u} \in C^2(\bar{\Omega})$ , dann erfüllt  $\tilde{u}$  die **Euler-Lagrange Gleichung**:

Für alle  $x \in \bar{\Omega}$  gilt

$$\nabla_x \cdot F_p(x, \tilde{u}(x), D\tilde{u}(x)) - F_u(x, \tilde{u}(x), D\tilde{u}(x)) = 0. \quad (2.11)$$

**Beweis.** Man folge der Geschichte vom Paragraph 2.1 und benutze Lemma 2.2.1. ■

## 2.4 Minimalfläche

Wenn man den Flächeninhalt einer durch

$$\Psi(x, y) = (x, y, u(x, y)) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

parametrisierten Oberfläche betrachtet, dann wird dieser Inhalt gegeben durch

$$I(u) = \int_{\Omega} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{pmatrix}} dx dy.$$

Man berechnet sofort, dass

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = (1, 0, u_x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = (0, 1, u_y),$$

und findet

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \end{pmatrix} &= (1 + u_x^2)(1 + u_y^2) - (u_x u_y)^2 \\ &= 1 + |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Also folgt

$$I(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx dy.$$

Nehmen wir an, diese Oberfläche ist fixiert am Rand  $\partial\Omega$  durch  $u = v$ .

Die erste Variation an der Stelle  $u$  ist

$$\frac{\partial}{\partial \tau} I(u + \tau \varphi)|_{\tau=0} = \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx dy.$$

Weil  $u$  am Rand fixiert ist, können wir nur im Innern variieren. Nehmen wir  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$ , so folgt für ein Minimum  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , dass

$$0 = \int_{\Omega} \frac{\nabla u \cdot \nabla \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} dx dy = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \varphi dx dy.$$

Dies liefert die Differentialgleichung für eine Minimalfläche:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0.$$

Für radialsymmetrische Randwertprobleme findet man eine gewöhnliche Differentialgleichung, die man sogar explizit lösen kann.

## 2.5 Eine Folge vom Hauptlemma der Variationsrechnung

Obwohl wir hier an einer Dimension interessiert sind, geben wir das nächste Lemma gleich für ein Gebiet  $\Omega$  in mehreren Dimensionen.

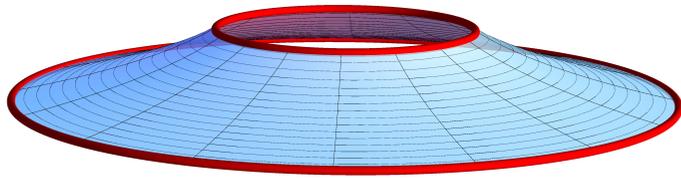


Abbildung 2.4: Bild zu der Minimalfläche zwischen zwei horizontalen Ringen, zentriert um die  $z$ -Achse.

**Lemma 2.5.1** Sei  $u \in C(\bar{\Omega})$  und nehme an, dass für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  und  $i = 1, \dots, n$  gilt

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = 0. \quad (2.12)$$

Dann gibt es  $c \in \mathbb{R}$  mit  $u \equiv c$ .

**Bemerkung 2.5.2** Wenn man wüsste, dass  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  gilt, könnte man partiell integrieren und findet dann, dass

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = 0.$$

Mit Lemma 2.2.1 bekäme man  $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = 0$  und auch, dass  $x_i \mapsto u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  konstant wäre. Wenn dies in jede Richtung gilt, folgt das gewünschte Ergebnis.

**Beweis.** In einer Dimension geht es wie folgt: Fixiere irgendeine Funktion  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ , die die folgenden Eigenschaften hat:

$$\left. \begin{aligned} \chi(x) = 0 \text{ für } x \leq \frac{1}{10}, \quad \chi(x) = 1 \text{ für } x \geq \frac{9}{10} \\ \text{und } \chi'(x) \geq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

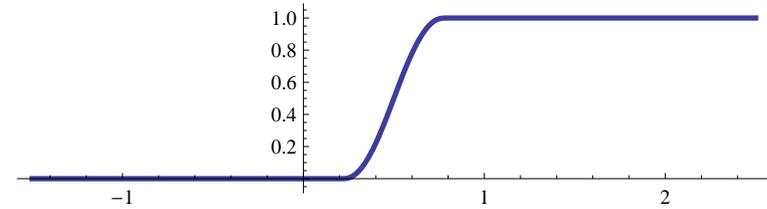


Abbildung 2.5: ein Bild von  $\chi$ .

Sei  $\varphi \in C_c^\infty(a, b)$  und definiere

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(s) ds - \chi\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \int_a^b \varphi(s) ds.$$

Dann folgt  $\psi(a) = 0 = \psi(b)$  und sogar, dass der Träger von  $\psi$  innerhalb  $(a, b)$  liegt. Also gilt auch  $\psi \in C_c^\infty(a, b)$ . Weiter hat man

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b u(x) \psi'(x) dx \\ &= \int_a^b u(x) \left( \varphi(x) - \chi'\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(s) ds \right) dx \\ &= \int_a^b \left( u(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b \chi'\left(\frac{s-a}{b-a}\right) u(s) ds \right) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

und es folgt mit Lemma 2.2.1, dass

$$u(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \chi'\left(\frac{s-a}{b-a}\right) u(s) ds = \text{konstant.}$$

In mehreren Dimensionen betrachtet man erst ein Rechteck  $R$  innerhalb  $\Omega$ , und setze  $R := [a, b] \times R' \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Für

$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  nimmt man analog wie vorher,

$$\psi(x_1, x') = \int_a^{x_1} \varphi(s, x') ds - \chi\left(\frac{x_1-a}{b-a}\right) \int_a^b \varphi(s, x') ds.$$

Auch der Träger von  $\psi$  liegt innerhalb  $R$  und auf ähnliche Art wie vorher folgt, dass  $u$  nicht von  $x_1$  abhängig ist, denn

$$u(x_1, x') = \frac{1}{b-a} \int_a^b \chi'\left(\frac{s-a}{b-a}\right) u(s, x') ds.$$

Genauso ist  $u$  auch nicht abhängig von den anderen Variablen; also gilt  $u = c$  auf jedem Rechteck. Weil  $\Omega$  offen und zusammenhängend ist, kann man  $\Omega$  füllen mit offenen Rechtecken und es folgt, dass  $u$  konstant ist auf  $\Omega$ . ■

**Aufgabe 2.2** Konstruiere eine explizite Funktion  $\chi$  derart, dass (2.13) erfüllt ist.

## 2.6 Regularität in einer Dimension

In der Formulierung des Theorems stört die Annahme  $\tilde{u} \in C^2(\bar{\Omega})$ . Für  $J$  braucht man ja nur  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  und es wäre schöner, wenn diese Eigenschaft folgen würde aus der Tatsache, dass  $\tilde{u}$  ein Minimum ist.

### 2.6.1 Ein Satz von $C^1$ zu $C^2$

In einer Dimension können wir zeigen, dass ein Minimum in  $C^1([a, b])$  unter einigen Annahmen bezüglich des Funktional automatisch in  $C^2([a, b])$  liegt. Wir schreiben  $I = (a, b)$ .

**Theorem 2.6.1** Sei  $F \in C^2(\bar{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ . Für  $u \in C^1(\bar{I})$  betrachten wir das Funktional

$$J(u) = \int_I F(x, u, u') dx.$$

Sei  $\mathcal{C} \subset C^1(\bar{I})$  derart, dass es für jedes  $u \in \mathcal{C}$  und  $\varphi \in C_c^\infty(I)$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $u + t\varphi \in \mathcal{C}$  für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Wenn  $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  ein globales Minimum  $\tilde{u} \in C^1(\bar{I})$  hat und  $F_{pp}(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) \neq 0$  gilt, dann folgt  $\tilde{u} \in C^2(\bar{I})$ .

**Bemerkung 2.6.2** Wenn man den Beweis genau anschaut, sieht man, dass es schon reicht, statt  $F \in C^2(\bar{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  anzunehmen, dass

$$F, F_p, F_u, F_{px}, F_{pu}, F_{pp} \in C(\bar{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

**Bemerkung 2.6.3** In  $\mathcal{C}$  steckt man die Randwerte. Wenn  $u(a) = 1$  und  $u(b) = 2$ , dann nimmt man

$$\mathcal{C} = \{u \in C^1(\bar{I}); u(a) = 1, u(b) = 2\}.$$

**Beweis.** Wie vorher zeigt man, dass für das Minimum die folgende Gleichung erfüllt ist für alle  $\varphi \in C_c^\infty(I)$

$$\int_a^b (F_u(x, \tilde{u}, \tilde{u}') \varphi + F_p(x, \tilde{u}, \tilde{u}') \varphi') dx = 0.$$

Weil wir nicht wissen, dass  $\tilde{u}'$  differenzierbar ist, können wir nicht partiell integrieren wie bei der Herleitung der starken Euler-Lagrange Gleichung. In einer anderen Richtung partiell integrieren geht schon und wir finden dann:

$$\int_a^b (F_p(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) - \int_a^x F_u(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}'(s)) ds) \varphi'(x) dx = 0.$$

Mit Lemma 2.5.1 gibt es eine Konstante  $c$  so, dass für alle  $x \in I$ :

$$F_p(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) - \int_a^x F_u(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}'(s)) ds = c. \quad (2.14)$$

Wegen der Stetigkeit gilt (2.14) sogar auf  $\bar{I}$ . Setzen wir

$$q(x) = c + \int_a^x F_u(s, \tilde{u}(s), \tilde{u}'(s)) ds.$$

Weil  $F_u$  und  $\tilde{u}, \tilde{u}'$  stetig sind, gilt  $x \mapsto F_u(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) \in C(\bar{I})$  und es folgt  $q \in C^1(\bar{I})$ . Durch (2.14) findet man

$$(x \mapsto F_p(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x))) \in C^1(\bar{I}). \quad (2.15)$$

Weil man auch angenommen hat, dass  $F_{pp}(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) \neq 0$ , kann man für jedes  $x_0 \in \bar{I}$  die Gleichung

$$F_p(x, \tilde{u}(x), p) - q(x) = 0 \quad (2.16)$$

implizit lösen in einer Umgebung von  $(x_0, p_0)$  mit  $p_0 = \tilde{u}'(x_0)$ , sagen wir  $p = P(x)$  ist derart, dass  $F_p(x, \tilde{u}(x), P(x)) - q(x) = 0$ . Der Satz über implizite Funktionen besagt sogar, dass  $P \in C^1((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$  für  $\varepsilon > 0$  genügend klein und dass das Folgende gilt für all diese  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ :

$$P'(x) = \frac{F_u(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x)) - F_{px}(x, \tilde{u}(x), P(x)) - F_{pu}(x, \tilde{u}(x), P(x))\tilde{u}'(x)}{F_{pp}(x, \tilde{u}(x), P(x))}.$$

Weil  $p = P(x)$  die eindeutige Lösung von (2.16) in der Nähe von  $(x_0, p_0)$  ist und weil  $p = \tilde{u}'(x)$  eine Lösung von (2.16) ist, folgt

$$\tilde{u}'(x) = P(x)$$

und  $\tilde{u}' \in C^1((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$  für jedes  $x_0 \in \bar{I}$ . Wir finden, dass  $\tilde{u} \in C^2(I)$ . Um zu zeigen, dass  $\tilde{u} \in C^2(\bar{I})$  gilt, kann man sich überlegen, dass es auch eine einseitige Version des Satzes über implizite Funktionen gibt, die man in den Randpunkten anwenden kann. ■

Etwas eigenartig in dem Beweis ist schon, dass erst bewiesen wird, dass

$$(x \mapsto F_p(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x))) \in C^1(\bar{I}),$$

obwohl man apriori bloß  $\tilde{u}'(x) \in C^0(\bar{I})$  hat. Im Nachhinein folgt dann erst, dass  $\tilde{u}'(x) \in C^1(\bar{I})$ .

## 2.6.2 Einige Beispiele, mit und ohne Regularität

**Beispiel 2.6.4** Für die eingespannte Saite oder Wäscheleine der Länge  $\ell$ , die durchhängt durch eine Kraftdichte  $f$ , wird folgendes Funktional verwendet:

$$J(u) = \int_0^\ell \left( \sqrt{1 + u'(x)^2} - 1 - f(x)u(x) \right) dx. \quad (2.17)$$

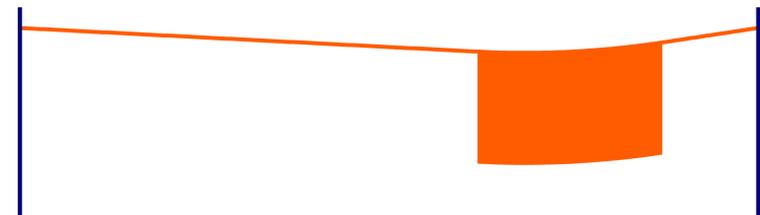


Abbildung 2.6: Die Wäscheleine wird parametrisiert durch  $x \mapsto (x, u(x))$ .

Die elastische Energie, gespeichert in der ausgedehnten Saite oder Leine, ist proportional zu der zusätzlichen Länge. Die durch diese Ausdehnung verursachte zusätzliche Länge der Kurve wird gegeben durch

$$\int_0^\ell \left( \sqrt{1 + u'(x)^2} - 1 \right) dx.$$

Für die Energie durch die Auslenkung verwendet man lokal die Energiedichte, bei der gilt Kraft  $\times$  Weg:

$$\int_0^\ell f(x)u(x) dx.$$

Mit der obigen Schreibweise hat man

$$F(x, u, p) = \sqrt{1 + p^2} - 1 - f(x) u$$

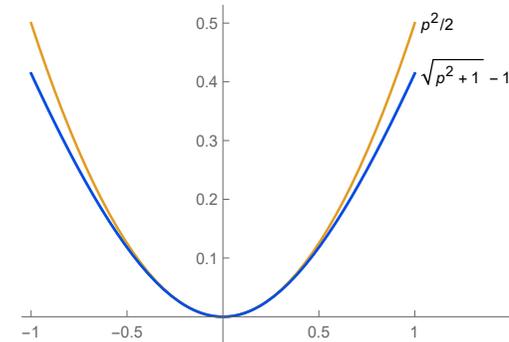
und es folgt

$$F_{pp}(x, u, p) = \frac{1}{(1 + p^2)^{3/2}} > 0.$$

Für  $f \in C[0, \ell]$  kann man Theorem 2.6.1 mit Bemerkung 2.6.2 anwenden und man findet, dass ein  $C^1[0, \ell]$ -Minimierer in  $C^2[0, \ell]$  liegt.

**Beispiel 2.6.5** Ein Funktional, das ein vereinfachtes Modell für eine Saite beschreibt, bei der seitwärts Kräfte ausgeübt werden, ist

$$J(u) = \int_0^\ell \left( \frac{1}{2}u'(x)^2 - f(x)u(x) \right) dx. \quad (2.18)$$



Dieses Funktional folgt aus (2.17), wenn man für kleine  $p$  approximiert durch

$$\sqrt{1 + p^2} - 1 \approx \frac{1}{2}p^2.$$

Die Euler-Lagrange Gleichung in schwacher Form für (2.18) ist

$$\int_0^\ell (u'(x)\varphi'(x) - f(x)\varphi(x))dx = 0$$

und aus  $u'(x) = c - \int_0^x f(s)ds$  folgt sogar für  $f \in C^0[0, \ell]$ , dass  $u \in C^2[0, \ell]$ . Bei festgelegten Endpunkten, zum Beispiel  $u(0) = u(\ell) = 0$  findet man sogar eine explizite Lösungsformel

$$u(x) = \int_0^\ell \min(x, y) (1 - \max(x, y)/\ell) f(y)dy. \quad (2.19)$$

**Aufgabe 2.3** Zeige, dass die Funktion in (2.19) eine Lösung von der zu (2.18) gehörenden Euler-Lagrange Gleichung ist.

**Beispiel 2.6.6** Die Konfiguration bei einem Kristall sorgt dafür, dass die Funktion  $F$  für die Energie nicht ein Minimum hat, sondern mehrere. So eine Funktion ist

$$F(u, p) = (1 - |p|^2)^2.$$

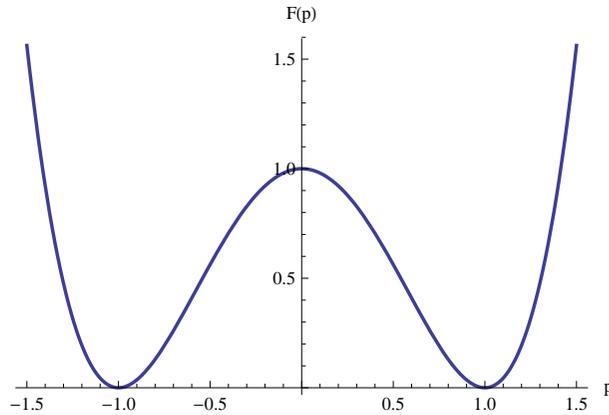


Abbildung 2.7: Skizze zu  $p \mapsto (1 - p^2)^2$ .

In dem eindimensionalen Gebiet  $(-1, 1)$  ist das zugehörige Funktional wie folgt:

$$J(u) = \int_{-1}^1 F(u(x), u'(x)) dx = \int_{-1}^1 (1 - (u'(x))^2)^2 dx. \tag{2.20}$$

Wir sind interessiert an  $\tilde{u}$  derart, dass

$$J(\tilde{u}) = \inf \{ J(u); u \in C^1[-1, 1] \cap C_0[-1, 1] \}.$$

Man sieht, dass  $p \mapsto F(p) := (1 - p^2)^2$  zwei Minima hat, nämlich für  $p = \pm 1$ . Außerdem hat man  $F(p) \geq 0$  und es folgt so direkt, dass  $J(u) \geq 0$ . Setzt man  $\partial J(u; \varphi) = 0$ , so folgt

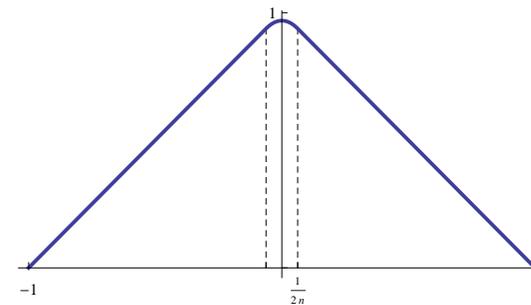
$$\partial J(u; \varphi) = -4 \int_{-1}^1 (1 - (u'(x))^2) u'(x) \varphi'(x) dx = 0,$$

und  $(1 - (u'(x))^2) u'(x) = c$ . Dies ist ein Polynom dritten Grades in  $u'(x)$  und als Lösungen findet man  $u'(x) = \tilde{c}$ . Hier ist  $\tilde{c}$  eine Nullstelle des Polynoms  $t \mapsto (1 - t^2)t - c$ . Es folgt  $u(x) = \tilde{c}x + b$ , und durch die Randbedingungen  $u(-1) = u(1) = 0$  folgt  $u(x) \equiv 0$ . Weil

$$J(0) = \int_{-1}^1 1 dx = 2$$

und es Funktionen  $v$  gibt mit  $J(v) < 2$ , ist die Null-Funktion jedoch nicht das Minimum. Wir betrachten dazu die Funktionen  $u_n$ , definiert durch

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{für } x < -\frac{1}{2n}, \\ 1 - \frac{1}{4n} - n x^2 & \text{für } |x| \leq \frac{1}{2n}, \\ 1 - x & \text{für } x > \frac{1}{2n}. \end{cases}$$



Man zeigt direkt, dass  $u_n \in C^1[-1, 1] \cap C_0[-1, 1]$  und man hat außerdem  $J(u_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Es gilt nämlich, dass

$$0 \leq J(u_n) = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} (1 - (2nx)^2)^2 dx \leq \frac{1}{n}.$$

Weil für jede Funktion  $u \in C^1[-1, 1]$  gilt, dass  $J(u) \geq 0$ , ist  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Minimalfolge. Der Limes  $u_\infty$ , definiert durch

$$u_\infty(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 1 - |x|, \quad (2.21)$$

liegt aber nicht in  $C^1[-1, 1]$ .

Übrigens, obwohl  $F_{pp}(u, p) = 4(3p^2 - 1)$  zwar ein festes Vorzeichen hat für  $p \in \{-1, 1\}$ , kann man Theorem 2.6.1 nicht anwenden, weil  $u_\infty \notin C^1[-1, 1]$ .

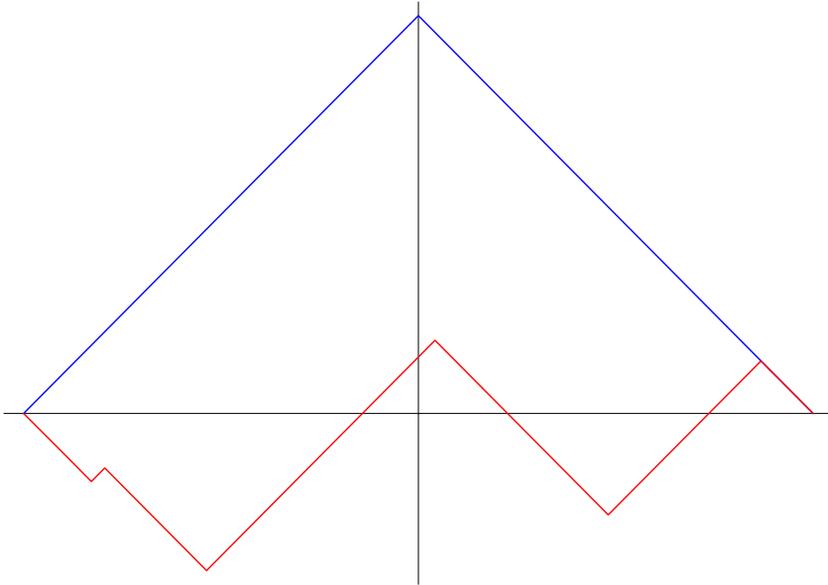


Abbildung 2.8: Zwei Funktionen  $u$  aus  $C^{0,1}([-1, 1])$ , die (2.20) minimieren, wenn man eine schwache Version der Ableitungen  $u'(\cdot)$  erlaubt.

Wenn man zeigen kann, dass das Integral  $J(u_\infty) = 0$  für  $J$  aus (2.20) und  $u_\infty$  wie in (2.21) wohldefiniert ist, zum Bei-

spiel wenn  $u' \in L^4(-1, 1)$ , könnte man  $u_\infty$  als Lösung zulassen. Dann müsste man jedoch festlegen, wie eine Ableitung  $u' \in L^4(-1, 1)$  definiert ist und welchen Lösungsbegriff man hat. Ableitungen und Lösungen punktweise betrachten, reicht dann nicht mehr.

### Rand- und Nebenbedingungen

Es tönt trivial, aber die einfachste Art wie Randbedingungen auftreten ist, dass man sie vorschreibt. In einem Anfängerkurs Differentialgleichungen hat man fast nur solche Beispiele. Auch bei der Brachistochrone haben wir Lösungen gesucht, bei denen  $u(0) = 0$  und  $u(6) = 1$  erfüllt sein soll. Damit hat man nur im Inneren des Gebietes zu variieren und es folgt, angenommen die Funktionen sind genügend regulär, eine Differentialgleichung im Inneren des Gebietes.

#### 3.1 Natürliche Randbedingungen

Wir können ein Funktional

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx \quad (3.1)$$

betrachten für Funktionen in

$$\{u \in C^1(\bar{\Omega}); u = 0 \text{ auf } \Gamma\}, \quad (3.2)$$

wobei  $\Gamma$  nur ein Teil von  $\partial\Omega$  ist. Wenn wir  $u$  auf  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  nicht vorschreiben, dann sollte man  $u$  auch da variieren. Also erlauben, dass  $\varphi \neq 0$  gilt auf  $\bar{\Omega} \setminus \Gamma$ . Wenn wir das Minimum wieder

$\tilde{u}$  nennen, wird die schwache Euler-Lagrange Gleichung wie folgt für alle  $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$  mit  $\varphi = 0$  auf  $\Gamma$ :

$$0 = \int_{\Omega} \left( F_u(x, u, \nabla u) \varphi + F_p(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \varphi \right) dx$$

Angenommen die betreffenden Funktionen sind genügend regulär, dann liefert die partielle Integration

$$0 = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \vec{\nu} \cdot F_p(x, u, \nabla u) \varphi d\sigma + \int_{\Omega} \left( F_u(x, u, \nabla u) - \nabla_x \cdot F_p(x, u, \nabla u) \right) \varphi dx. \quad (3.3)$$

Weil  $C_c^\infty(\Omega)$  eine Teilmenge ist von

$$\{\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}); \varphi = 0 \text{ auf } \Gamma\},$$

gilt (3.3) auch für  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Für solche  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  ist das Randintegral identisch 0 und (3.3) vereinfacht sich zu

$$0 = \int_{\Omega} \left( F_u(x, u, \nabla u) - \nabla_x \cdot F_p(x, u, \nabla u) \right) \varphi dx.$$

Lemma 2.2.1 liefert uns dann, dass

$$F_u(x, u, \nabla u) - \nabla_x \cdot F_p(x, u, \nabla u) = 0.$$

Wenn wir das nun haben, folgt, dass das zweite Integral in (3.3) gleich 0 ist. Deshalb gilt auch, diesmal für  $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$  mit  $\text{supp}(\varphi) \subset \bar{\Omega} \setminus \Gamma$ , dass

$$0 = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} \vec{\nu} \cdot F_p(x, u, \nabla u) \varphi \, d\sigma. \quad (3.4)$$

Wenn der Rand  $C^\infty$  ist, dann kann man jedes  $\psi \in C_c^\infty(\partial\Omega \setminus \Gamma)$  erweitern zu einem  $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$  mit  $\text{support} \varphi \subset \bar{\Omega} \setminus \Gamma$ . Also gilt (3.4) auch für alle solche  $\psi$  und man kann Lemma 2.2.1 auf  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  verwenden. So findet man eine zweite Randbedingung, nämlich

$$\vec{\nu} \cdot F_p(x, u, \nabla u) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \setminus \Gamma.$$

Das Minimierungsproblem für  $J$  führt uns zum Folgenden:

**Proposition 3.1.1** *Sei  $F$  und  $u$  genügend oft differenzierbar. Dann erfüllt ein Minimum  $u$  von (3.1) mit den Randbedingungen in (3.2) das folgende Randwertproblem:*

$$\begin{cases} F_u(x, u, \nabla u) - \nabla_x \cdot F_p(x, u, \nabla u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma, \\ \vec{\nu} \cdot F_p(x, u, \nabla u) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{cases} \quad (3.5)$$

Die zweite Gleichung in (3.5) ist die **gegebene Randbedingung** und die letzte Gleichung ist die zum Minimierungsproblem gehörende **natürliche Randbedingung**.

**Beispiel 3.1.2** *Betrachten wir nochmals das vereinfachte Modell der Saite in Beispiel 2.6.4:*

$$J(u) = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} (u')^2 - f u \right) dx.$$

*Statt an beiden Enden  $u$  vorzuschreiben, können wir zum Beispiel  $u(1)$  freilassen. Freilassen bedeutet hier nicht einfach ein Ende loslassen, denn dann erwartet man nicht, dass das Modell noch vernünftig ist. Man kann sich jedoch vorstellen, dass das rechte Ende  $x = x_e = 1$  vorgeschrieben wird ohne  $u(x_e)$  vorzuschreiben. Man kann sich dieses Problem mechanisch vorstellen durch eine Saite, die am linken Ende befestigt ist, und am rechten Ende mit einem Knoten versehen ist, der sich nur in vertikaler Richtung frei bewegen lässt. Dieser Knoten könnte zum Beispiel durch eine schmale Spalte zurückgehalten werden. Mathematisch heißt es, dass wir  $J$  minimieren über Funktionen in  $\{u \in C^1[0, 1]; u(0) = 0\}$ . Man findet mit den obigen Argumenten das folgende Randwertproblem:*

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{in } (0, 1), \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

*Die Randbedingung  $u(0) = 0$  ist gegeben und  $u'(1) = 0$  ist die natürliche Randbedingung.*

**Aufgabe 3.1** *Zu einer Seifenblase zwischen einem halben Ring und einer glatten Wand, die durch einen konstanten einseitig größeren Druck nach oben ausgedehnt ist, gehört das folgende Minimierungsproblem:*

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \sqrt{1 + |\nabla u|^2} - p u \right) dx.$$

Dabei nehmen wir  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1 \text{ und } x_1 > 0\}$ .  
Die zulässigen Funktionen sind

$$\mathcal{C} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}); u(x) = 0 \text{ für } x \in \bar{\Omega} \text{ mit } |x| = 1\}.$$

1. Beschreibe das Randwertproblem, das die Euler-Lagrange Gleichung bringt.
2. Bemerke, dass die Fortsetzung  $\bar{u}(x_1, x_2) = u(|x_1|, x_2)$  einem radialsymmetrischen Problem unterliegt.
3. Finde eine radialsymmetrische Lösung.

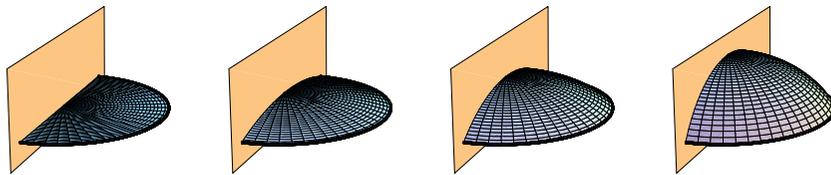


Abbildung 3.1: Auf einem Teil des Randes beim Modell einer Seifenblase zwischen Ring und glatter Wand ist die Randbedingung nicht festgelegt.

**Aufgabe 3.2** Die Frage, die bei der Brachistochrone erscheint, kann man auch wie folgt ändern: Statt zu fragen, wie man mit der Achterbahn am schnellsten von  $(0, 0)$  zu  $(6, -1)$  kommt, könnte es einem auch egal sein, auf welcher Höhe man für  $x = 6$  ankommt. Durch welche Kurve ist man am schnellsten von  $(0, 0)$  bei  $x = 6$ ?

## 3.2 Nebenbedingungen

Statt Randbedingungen kann man anderen Bedingungen begegnen. Ein paar Beispiele folgen.

### 3.2.1 Die Vorhangschiene

Ein einfaches Modell, das die Energie für einen elastischen Stab beschreibt, der eine seitwärts gerichtete Kraft mit Dichte  $f$  empfindet, ist

$$J(u) = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2} (u'')^2 - f u \right) dx.$$

Nimmt man an, der Stab ist am Rand eingespannt und in der Mitte durch einen Ring fixiert, die kleine Drehungen zulässt, dann sind die folgenden Funktionen passend:

$$\mathcal{C} = \left\{ u \in C^2[-1, 1]; \begin{array}{l} u(-1) = u(0) = u(1) = 0, \\ u'(-1) = u'(1) = 0 \end{array} \right\}$$

Dieses Funktional erscheint, wenn man ein einfaches Modell für das Durchbiegen einer Vorhangschiene sucht.



Abbildung 3.2: In der Mitte der Vorhangschiene ist die Höhe fixiert. Hier ist übrigens an den Enden  $u = u' = 0$  angedeutet.

Die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung ist

$$0 = \int_{-1}^1 (u''\varphi'' - f\varphi) dx \text{ für alle Testfunktionen } \varphi.$$

Die erste Frage, die sich aufdrängt, ist folgende: Welche Testfunktionen soll man eigentlich benutzen? Der erste Ansatz wäre, die Funktionen  $\varphi$  auch, genau wie  $u$  selber, in  $\mathcal{C}$  zu nehmen. Vielleicht reicht es aber, diesen Raum einzuschränken,

ähnlich wie wir vorher  $C_c^\infty(\Omega)$  benutzt haben. Wir zeigen mal ein paar Versuche.

- Auf den ersten Blick könnte man vermuten, dass man testen soll mit  $\varphi \in C^\infty[-1, 1]$ , für die gilt, dass der Träger die Stellen  $\{-1, 0, 1\}$  nicht enthält. Daraus würde für einen Minimierer in  $C^4[-1, 1]$  folgen

$$\begin{cases} u'''' = f \text{ in } (-1, 1), \\ u(-1) = u'(-1) = u(0) = u(1) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Leider hat man da eine Bedingung zu viel für ein wohlgestelltes Problem<sup>1</sup>. Wenn man die Bedingung  $u(0) = 0$  weglässt, hat man für jedes  $f \in C[-1, 1]$  die Lösung

$$u(x) = \int_{-1}^1 \frac{1}{12} \left( 8 - (3 - xy)(2 + x^2 + y^2) + (x - y)^2 |x - y| \right) f(y) dy$$

und  $u(0) = 0$  ist nur erfüllt, wenn

$$\int_{-1}^1 (2 - 3y^2 + |y|^3) f(y) dy = 0.$$

- Nachdem dieser Ansatz fehlgeschlagen ist, könnte man sich überlegen, ob man das Problem nicht in zwei Probleme zerlegen sollte: eins auf  $[-1, 0]$  und eins auf  $[0, 1]$ .

<sup>1</sup>**Hadamard** nannte drei Kriterien für ein **wohlgestelltes** Problem:

- Existenz: es soll mindestens eine Lösung haben.
- Eindeutigkeit: es soll höchstens eine Lösung haben.
- Robustheit: kleine Änderungen im Problem geben kleine Änderungen bei der Lösung.

Schreiben wir  $u_r = u|_{[0, 1]}$  und  $u_\ell = u|_{[-1, 0]}$ . Die Differentialgleichung folgt aus

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (u_r'' \varphi'' - f \varphi) dx = [u_r'' \varphi']_0^1 + \int_0^1 (u_r'''' - f) \varphi dx = \\ &= -u_r''(0) \varphi'(0) + \int_0^1 (u_r'''' - f) \varphi dx, \end{aligned} \quad (3.6)$$

und ähnliches für  $u_\ell$ . Wir finden mit den vorgegebenen Randbedingungen

$$\begin{cases} u_\ell'''' = f \text{ in } (-1, 0), \\ u_\ell(0) = u_\ell(-1) = u_\ell'(-1) = 0. \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} u_r'''' = f \text{ in } (0, 1), \\ u_r(0) = u_r(1) = u_r'(1) = 0, \end{cases}$$

Vierter Ordnung und drei Bedingungen bedeutet, dass links und rechts noch eine Bedingung, also insgesamt zwei Bedingungen, fehlen für eine eindeutige Lösung. Man wäre geneigt wegen (3.6) hier  $u_r''(0) = 0$  zu setzen und ähnliches für links. Man kann jedoch  $\varphi'(0)$  links und rechts nicht unabhängig wählen. Schreibt man links und rechts gemeinsam aus, so folgt nur  $u_\ell''(0) = u_r''(0)$ . Nimmt man an, dass  $u \in C^2[-1, 1]$ , dann folgt zusätzlich, dass

$$u_\ell'(0) = u_r'(0) \text{ und } u_\ell''(0) = u_r''(0).$$

Diese 8 Bedingungen sind ausreichend.

**Aufgabe 3.3** *Wir betrachten das Problem der Vorhangschiene, die in der Mitte und an den beiden Enden nur fixiert wird:*

$$u \in \mathcal{C}_1 = \{u \in C^\infty[-1, 1]; u(-1) = u(0) = u(1) = 0\}.$$

Wir nehmen an, dass  $f \in C[-1, 1]$  und dass der Minimierer folgende Eigenschaften hat:

$$\begin{aligned} u(-1) = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \\ u|_{[-1,0]} \in C^4[-1,0], \quad u \in C^2[-1,1], \quad u|_{[0,1]} \in C^4[0,1], \end{aligned} \quad (3.7)$$

und wir testen mit Funktionen in  $\varphi \in \mathcal{C}_1$ .

1. Zeige, dass man so zwei Differentialgleichungen vierter Ordnung bekommt, eine auf  $[-1, 0]$  und eine auf  $[0, 1]$ , mit insgesamt 8 Bedingungen.

Übrigens kann man sogar zeigen, dass dieses Problem für jedes  $f \in C[-1, 1]$  genau eine Lösung hat, die (3.7) erfüllt.

2. Was passiert, wenn man  $u \in C^2[-1, 1]$  in (3.7) ersetzt durch  $u \in C^3[-1, 1]$  und testet mit Funktionen in  $\{\varphi \in C^3[-1, 1]; \varphi(-1) = \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ ?

### 3.2.2 Ein Funktional als Nebenbedingung

Einen anderen Typ von Bedingung findet man im folgenden Beispiel:

**Beispiel 3.2.1** Welche Kurve von Länge 3, die  $(-1, 0)$  und  $(1, 0)$  verbindet, ergibt den maximalen Flächeninhalt zwischen der horizontalen Achse und dieser Kurve?

Wenn man diese Kurve schreiben kann durch  $x \mapsto (x, u(x))$ , mit  $u$  eine nicht-negative differenzierbare Funktion, dann kann man das Problem wie folgt formulieren: Finde das Maximum von

$$J(u) = \int_{-1}^1 u(x) dx$$

unter der Bedingung

$$I(u) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx = 3.$$

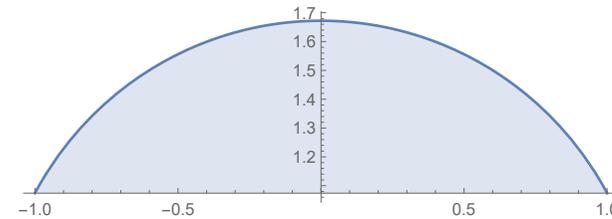


Abbildung 3.3: Die Lösung von Beispiel 3.2.1 ist ein Kreisbogen.

## 3.3 Lagrange-Multiplikator

**Beispiel 3.3.1** Wenn man das Maximum der Funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2$  finden möchte unter der Nebenbedingung  $x^2 + xy + y^2 = 1$ , dann kann man die Niveaumengen von  $f$  vergleichen mit den Nullstellen von  $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1$ . Mit Abbildung 3.4 kann man sich überzeugen, dass es zwei Maximalstellen gibt, nämlich  $(1, -1)$  und  $(-1, 1)$ . Das sind die beiden Stellen auf der roten Kurve, die außerdem auf dem größten Kreis liegen, der diese Kurve schneidet.

Diese beiden Stellen, als auch die beiden Minimalstellen in  $\pm(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$ , sind genau die Stellen, bei der die Normalvektoren auf  $g(x, y) = 0$  und  $f(x, y) = c$  die gleiche Richtung haben (i.A. ist auch umgekehrte Richtung möglich). Man erinnere sich, dass  $\nabla g$  und  $\nabla f$  diese Richtung angeben. Wenn

$\{\nabla g, \nabla f\}$  unabhängig wären an der Stelle  $(x_0, y_0)$  und insbesondere  $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , dann hätte  $f$  keinen Extremwert in  $(x_0, y_0)$ , da man dann auf der Menge  $g = 0$  eine Richtung findet, bei der  $f$  wächst. Die Funktion  $f$  fällt in der entgegengesetzten Richtung.

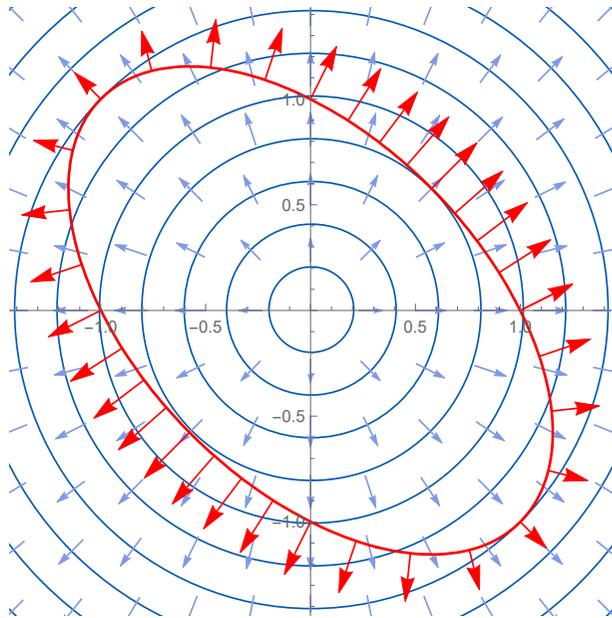


Abbildung 3.4: In blau die Niveaumengen von  $f$  und in rot  $g(x, y) = 1$ . Die Vektoren zeigen die Richtung der zugehörigen Gradienten.

Diese Überlegungen führten in Analysis 2 zu dem Lagrange-Multiplikator-Satz. Wenn  $f, g; \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind und  $f : \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) = c\}$  hat einen Extremwert in  $x_0$ , dann gilt

1.  $\nabla g(x_0) = 0$  oder
2.  $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$  für irgendein  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Ein ähnlicher **Lagrange-Multiplikator-Satz** gilt für Extremstellen von Funktionalen mit Funktionalen als Nebenbedingung.

**Theorem 3.3.2** Sei  $F, G \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  und definiere für  $u \in C^1(\bar{\Omega})$

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u, Du) dx \quad \text{und} \quad I(u) = \int_{\Omega} G(x, u, Du) dx.$$

Sei  $\mathcal{C} \subset C^1(\bar{\Omega})$  die Teilmenge mit den passenden Randwerten und sei  $\mathcal{C}_0$  die Menge der erlaubten Testfunktionen  $\varphi$ :

$$\exists \varepsilon > 0 : u + t\varphi \in \mathcal{C} \quad \text{für} \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Wenn  $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  unter der **Nebenbedingung**  $I(u) = \ell$  ein globales Minimum hat in  $\tilde{u} \in \mathcal{C} \cap C^2(\bar{\Omega})$ , dann gilt

- $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0 : \partial I(\tilde{u}; \varphi) = 0$ , oder
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  sodass  $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0 : \partial J(\tilde{u}; \varphi) = \lambda \partial I(\tilde{u}; \varphi)$ .

Die Zahl  $\lambda$  nennt man den Lagrange-Multiplikator<sup>2</sup>.

**Bemerkung 3.3.3**  $\partial J(\tilde{u}; \cdot)$  und  $\partial I(\tilde{u}; \cdot)$  sind Funktionale. Aus dem Hauptlemma folgt, dass aus der Gleichung im zweiten Punkt folgt, dass auf  $\Omega$  gilt, dass

$$\begin{aligned} F_u(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) - \nabla_x \cdot F_p(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) \\ = \lambda \left( G_u(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) - \nabla_x \cdot G_p(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

<sup>2</sup>Multiplikator = *multiplier*

**Bemerkung 3.3.4** Ist  $\tilde{u}$  eine stationäre Stelle von  $J(u)$  unter zwei **Nebenbedingungen**  $I_1(u) = \ell_1$  und  $I_2(u) = \ell_2$ , dann gilt:

- $\partial I_1(\tilde{u}, \cdot)$  und  $\partial I_2(\tilde{u}, \cdot)$  sind abhängig, oder
- es gibt  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  derart, dass

$$\partial J(\tilde{u}, \cdot) = \lambda_1 \partial I_1(\tilde{u}, \cdot) + \lambda_2 \partial I_2(\tilde{u}, \cdot).$$

Man kann selber überlegen, wie man dieses Theorem erweitert bei mehreren Nebenbedingungen  $I_i(u) = \ell_i$  für  $i = 1, \dots, k$ .

**Beweis.** Wir nehmen an, dass  $\mathcal{C} = C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$ . Bei anderen Randbedingungen kann man sich überlegen, an welchen Stellen sich der Beweis ändert.

Wir definieren

$$H(x, \lambda) = F_u(x, \tilde{u}(x), D\tilde{u}(x)) - \nabla_x \cdot F_p(x, \tilde{u}(x), D\tilde{u}(x)) - \lambda \left( G_u(x, \tilde{u}(x), D\tilde{u}(x)) - \nabla_x \cdot G_p(x, \tilde{u}(x), D\tilde{u}(x)) \right).$$

Nehmen wir an, der erste Punkt des Theorems ist nicht erfüllt. Das bedeutet, es gibt ein  $x_0 \in \Omega$  derart, dass

$$G_u(x_0, \tilde{u}(x_0), D\tilde{u}(x_0)) - \nabla_x \cdot G_p(x_0, \tilde{u}(x_0), D\tilde{u}(x_0)) \neq 0. \quad (3.9)$$

Wegen (3.9) kann man ein  $\lambda_0$  so berechnen, dass gilt:

$$H(x_0, \lambda_0) = 0. \quad (3.10)$$

Wenn (3.10) erfüllt ist für alle  $x \in \Omega$ , dann gilt (3.8) und wir sind fertig.

Wir versuchen zu einem Widerspruch zu gelangen, wenn wir annehmen, dies sei nicht so. Das heißt also, wir nehmen an, dass es ein  $x_1$  gibt mit

$$h := H(x_1, \lambda_0) \neq 0.$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt, dass

$$\begin{aligned} H(x, \lambda_0) &= o(1) && \text{für } x \rightarrow x_0, \\ H(x, \lambda_0) &= h + o(1) && \text{für } x \rightarrow x_1, \end{aligned} \quad (3.11)$$

und  $\alpha(x) = o(1)$  für  $x \rightarrow x_0$  bedeutet  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ .

Als Nächstes nehmen wir Testfunktionen  $\varphi_0$  und  $\varphi_1$ , wie in (2.10), einmal mit Träger  $B_\varepsilon(x_0)$  und einmal mit Träger  $B_\varepsilon(x_1)$  und wählen anschließend  $\varepsilon > 0$  aber genügend klein. Jetzt betrachten wir

$$f(s, t) = I(\tilde{u} + s\varphi_0 + t\varphi_1).$$

Wieder aus Stetigkeitsgründen und für  $\varepsilon$  genügend klein folgt

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial s} f(s, t) \right) \Big|_{s=0, t=0} \\ &= \int_{\Omega} \left( G_u(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) - \nabla_x \cdot G_p(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) \right) \varphi_0 \, dx \\ &= \int_{B_\varepsilon(x_0)} \left( G_u(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) - \nabla_x \cdot G_p(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) \right) \varphi_0 \, dx \neq 0. \end{aligned}$$

Der Satz über implizite Funktionen besagt dann: es gibt  $\delta > 0$  und eine Funktion  $s : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $s(0) = 0$  derart, dass  $f(s(t), t) = f(0, 0) = \ell$ . Anders formuliert, für  $t \in (-\delta, \delta)$  erfüllt  $\tilde{u} + s(t)\varphi_0 + t\varphi_1$  die Nebenbedingung  $I(\tilde{u} + s(t)\varphi_0 + t\varphi_1) = \ell$ .

Bemerke, dass die Störung durch  $s\varphi_0$  oder durch  $t\varphi_1$  nicht die Nebenbedingung erfüllt. Die Störung mittels  $s(t)\varphi_0 + t\varphi_1$  erfüllt sie jedoch!

Durch Differenzieren folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} I(\tilde{u} + s(t)\varphi_0 + t\varphi_1) = 0 \text{ für } t \in (-\delta, \delta).$$

Anschließend betrachten wir  $t \mapsto J(\tilde{u} + s(t)\varphi_0 + t\varphi_1)$  und finden mit (3.11), dass

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} J(\tilde{u} + s(t)\varphi_0 + t\varphi_1) \\ &= \int_{\Omega} \left( F_u(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) - \nabla_x \cdot F_p(\cdot, \tilde{u}, D\tilde{u}) \right) (s'(t)\varphi_0 + \varphi_1) dx \\ &= \int_{\Omega} H(\cdot, \lambda_0) (s'(t)\varphi_0 + \varphi_1) dx \\ &= s'(t) \int_{B_\varepsilon(x_0)} H(\cdot, \lambda_0) \varphi_0 dx + \int_{B_\varepsilon(x_1)} H(\cdot, \lambda_0) \varphi_1 dx \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon) \int_{B_\varepsilon(x_0)} \varphi_0(x) dx + (h + \mathcal{O}(\varepsilon)) \int_{B_\varepsilon(x_1)} \varphi_1(x) dx. \end{aligned}$$

Weil  $h$  ungleich 0 ist, ist diese Ableitung ungleich 0, und  $\tilde{u}$  ist kein Minimum, wenn man  $\varepsilon$  genügend klein wählt. ■

## 3.4 Beispiele für Randbedingungen

### 3.4.1 Wäscheleine und Membrane oder wie die Dimension eingreift

Die Minimallänge einer Wäscheleine in einer Dimension oder die Minimalfläche in zwei Dimensionen findet man durch das

Minimieren von

$$J(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx.$$

Für kleine Gradienten ist dieses Funktional fast wie  $|\Omega| + \tilde{J}(u)$ , wobei

$$\tilde{J}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 dx.$$

Wir werden jetzt die Minima von  $\tilde{J}$  suchen für radialsymmetrische  $u$ , die definiert sind auf  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; d < |x| < 2\}$  mit den Randbedingungen  $u(d) = -1$  und  $u(2) = 0$ .

Für radialsymmetrische Funktionen findet man  $|\nabla u| = \left| \frac{x}{|x|} u'(|x|) \right| = |u'|$  und

$$\tilde{J}(u) = \omega_n \int_{r=d}^2 \frac{1}{2} |u'(r)|^2 r^{n-1} dr$$

mit

$$\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma,$$

der Hyperflächeninhalt der  $n$ -dimensionalen Kugel. Die Euler-Lagrange Gleichung liefert

$$(r^{n-1} u'(r))' = 0.$$

Es folgt, wenn man die Randwerte benutzt, dass

$$u_d(r) = \begin{cases} -\frac{2-r}{2-d} & \text{für } n=1, \\ -\frac{\log(r/2)}{\log(d/2)} & \text{für } n=2, \\ -\frac{r^{2-n} - 2^{2-n}}{d^{2-n} - 2^{2-n}} & \text{für } n>2. \end{cases}$$

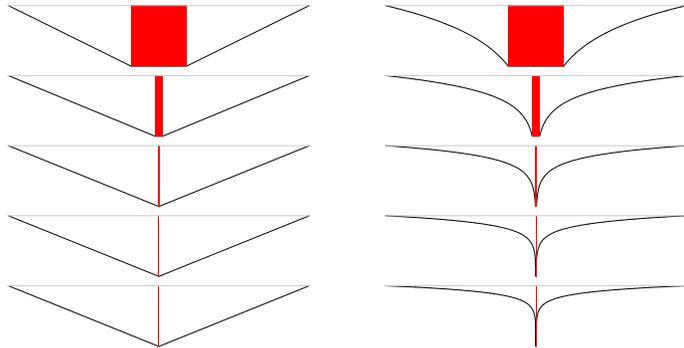


Abbildung 3.5: Minimum für  $n = 1$  und (radialsymmetrisch dargestellt) für  $n = 2$ .

Wenn man jetzt  $d \downarrow 0$  gehen lässt, konvergieren die Funktionen nur zu etwas nicht Trivialem, wenn  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} \text{für } n = 1 : \quad & \lim_{d \downarrow 0} u_d(r) = \frac{1}{2}r - 1, \\ \text{für } n \geq 2 : \quad & \lim_{d \downarrow 0} u_d(r) = 0 \text{ für } r > 0. \end{aligned}$$

Man kann so vermuten, dass die Bedingung  $u(0) = -1$  nur in einer Dimension einen Sinn ergibt.

### 3.4.2 Natürliche Randbedingungen bei einer Plattengleichung

Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein zwei-dimensionales Gebiet beschreibt und man betrachtet dieses Gebiet als elastische Platte, die durchbiegt unter vertikalen Kräften mit Dichte  $f$ , und setzen wir  $u$  für die Auslenkung, dann findet man als einfaches Modell das

folgende Energiefunktional:

$$E_\Omega(u) := \int_\Omega \left( \frac{1}{2} (\Delta u)^2 + (1 - \sigma) (u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}) + f u \right) dx dy. \quad (3.12)$$

Dabei ist  $\sigma$  die sogenannte Poissonzahl<sup>3</sup>. Man kann dabei vorgeschriebene Randbedingungen betrachten, die von verschiedenen mechanischen Konstruktionen hervorgebracht werden. Ein paar Beispiele solche **gegebene Randbedingungen für die Plattengleichung** sind:

1. Eingespannt<sup>4</sup>:  $u = \frac{\partial}{\partial n} u = 0$ .
2. Gelenkig gelagert<sup>5</sup>:  $u = 0$ .
3. Symmetrieansatz:  $\frac{\partial}{\partial n} u = 0$ .
4. Frei: keine Bedingung vorgeschrieben.

Mit eingespannt soll man das Bild eines Schraubstockes vor Augen haben. Mit gelenkig meint man, dass die Position, aber nicht der Winkel am Rand fixiert ist, so wie die Scharniere eine Tür halten.

<sup>3</sup>Leider wird im deutschen Sprachraum das Wort Poissonzahl für verschiedene Größen verwendet. Wir meinen hier die Zahl, die man auf englisch Poisson-Ratio nennt. Sie ist definiert durch  $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ , wobei  $\lambda, \mu$  vom Material abhängige Konstanten sind, die beziehungsweise mit dem Zusammendrücken/Ausrenken und mit der Torsion zu tun haben. Normalerweise hat man  $\lambda \geq 0$  und  $\mu > 0$ , und deshalb gilt meistens  $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ . Für Metalle liegt  $\sigma$  rund 0.3. Für Gummi liegt  $\sigma$  bei 0.5.

<sup>4</sup>eingespannt = *clamped*

<sup>5</sup>gelenkig gelagert = *hinged*

Übrigens findet man für  $E_\Omega(u)$  aus (3.12) die erste Variation

$$\begin{aligned} \partial E_\Omega(u; \varphi) = \int_\Omega & \left( \Delta u \Delta \varphi + \right. \\ & \left. + (1 - \sigma) (2u_{xy} \varphi_{xy} - u_{xx} \varphi_{yy} - u_{yy} \varphi_{xx}) + f \varphi \right) dx dy \end{aligned}$$

Nach partieller Integration folgt als die Euler-Lagrange Gleichung für (3.12) eine einfach aussehende Gleichung vierter Ordnung:

$$\Delta^2 u = f \text{ auf } \Omega. \quad (3.13)$$

Den Term hinter  $(1 - \sigma)$  sieht man nicht in der Differentialgleichung, jedoch hat er schon seinen Einfluss auf die natürlichen Randbedingungen, die die gegebenen Randbedingungen jeweils ergänzen. Einen solchen Term nennt man ein **Null-Lagrangian**.

**Beispiel 3.4.1** Wenn wir zum Beispiel  $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$  nehmen, eingespannt für  $y = 0$ , gelenkig gelagert für  $x = \pm 1$  und frei für  $y = 1$ . Wir nehmen  $f = 1$ , was bedeutet, dass diese homogene Platte nur durch ihr eigenes Gewicht ausgelenkt wird. Dann ist das Problem symmetrisch bezüglich  $x = 0$  und wir können sogar die „halbe“ Platte betrachten.

Setze  $\Omega^* = (0, 1)^2$  und betrachten wir also  $E_{\Omega^*}(u)$  mit

$$u \in \mathcal{C} = \{u \in C^2([0, 1]^2); Bu = 0 \text{ auf } \partial\Omega^*\}.$$

Die gegebenen Randbedingungen  $Bu$  werden dann durch

$$\begin{array}{ll} \text{I} & u(x, 0) = u_y(x, 0) = 0 \quad \text{für } 0 < x < 1 \\ \text{II} & u_x(0, y) = 0 \quad \text{für } 0 < y < 1 \\ \text{III} & \text{keine} \quad \text{für } y = 1 \text{ und } 0 < x < 1 \\ \text{IV} & u(1, y) = 0 \quad \text{für } 0 < y < 1 \end{array}$$

festgelegt. Hier sind I, II, III und IV die vier geraden Randteile.

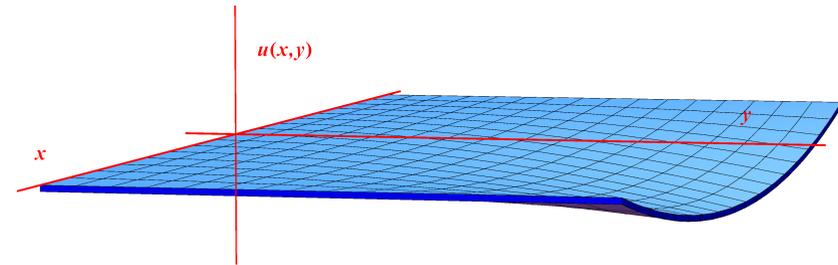


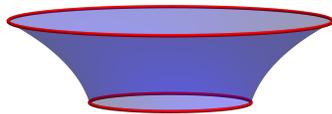
Abbildung 3.6: Vorstellung einer Platte, die durch ihr eigenes Gewicht durchbiegt. Links ist sie eingespannt, vorne und hinten ist sie gelenkig gelagert und rechts frei.

**Aufgabe 3.4** Zeigen Sie, wie (3.13) folgt. Finde auch die natürlichen Randbedingungen, die zusätzlich zu  $Bu = 0$  kommen. Was genau in den Ecken passiert, lassen wir sein.

## Die zweite Variation und Konvexität

### 4.1 Ein Beispiel mit mehr als nur einem Minimum

Betrachte zwei Ringe, zentriert um die  $z$ -Achse, den ersten auf Höhe 0 mit Radius 1 und den zweiten auf Höhe  $d$  mit Radius 2. Welche rotationssymmetrische Oberfläche, die beide Ringe verbindet, hat den kleinsten Flächeninhalt?



Das heißt, man betrachtet Oberflächen, die man parametrisieren kann durch

$$\{\phi, z\} \mapsto \Psi(\phi, z) := \{u(z) \cos(\phi), u(z) \sin(\phi), z\}.$$

Für den Flächeninhalt des betreffenden Abschnitts, also

$(\phi, z) \in R := [0, 2\pi] \times [0, d]$ , findet man durch

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \Psi_\phi \cdot \Psi_\phi & \Psi_\phi \cdot \Psi_z \\ \Psi_z \cdot \Psi_\phi & \Psi_z \cdot \Psi_z \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} u(z)^2 & 0 \\ 0 & 1 + u'(z)^2 \end{pmatrix} \\ &= u(z)^2 (1 + u'(z)^2) \end{aligned}$$

und die Integralformel für den Flächeninhalt, dass

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_R \sqrt{\det \begin{pmatrix} \Psi_\phi \cdot \Psi_\phi & \Psi_\phi \cdot \Psi_z \\ \Psi_z \cdot \Psi_\phi & \Psi_z \cdot \Psi_z \end{pmatrix}} d(z, \phi) \\ &= 2\pi \int_0^d u(z) \sqrt{1 + u'(z)^2} dz. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Randbedingungen geben uns

$$u \in \mathcal{C}_{\text{inhomogen}} = \{u \in C^1[0, d]; u(0) = 1 \text{ und } u(d) = 2\}.$$

Die erste Variation wird

$$\begin{aligned} \partial J(u; \varphi) &= \\ &= 2\pi \int_0^d \left( \frac{u'(z)u(z)}{\sqrt{1 + u'(z)^2}} \varphi'(z) + \sqrt{1 + u'(z)^2} \varphi(z) \right) dz. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die partielle Integration von  $\partial J(u; \varphi) = 0$ , angenommen  $u \in C^2[0, d]$ , liefert für  $\varphi \in C_c^1[0, d]$

$$0 = \int_0^d \left( - \left( \frac{u'(z)u(z)}{\sqrt{1+u'(z)^2}} \right)' + \sqrt{1+u'(z)^2} \right) \varphi(z) dz.$$

Es folgt die Euler-Lagrange Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= - \left( \frac{u'(z)u(z)}{\sqrt{1+u'(z)^2}} \right)' + \sqrt{1+u'(z)^2} = \\ &= - \frac{u''(z)u(z)}{(1+u'(z)^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1+u'(z)^2}} = \frac{1}{u'(z)} \left( \frac{u(z)}{\sqrt{1+u'(z)^2}} \right)' \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{u(z)}{\sqrt{1+u'(z)^2}} = c.$$

Wir finden mit  $\tilde{c} = c^{-1}$  ( $c = 0$  liefert  $u(z) = 0$  und das ist keine Lösung), dass

$$u'(z) = \pm \sqrt{\tilde{c}^2 u(z)^2 - 1}.$$

Diese Differentialgleichung ist trennbar. Als Lösung erhält man:

$$u(z) = \frac{1}{\tilde{c}} \cosh(\tilde{c}z + b).$$

Jetzt sollen wir noch die Randbedingungen erfüllen:  $u(0) = 1$  ergibt  $\tilde{c} = \cosh(b)$  und wir finden

$$u(z) = \frac{\cosh(\cosh(b)z + b)}{\cosh(b)}. \quad (4.3)$$

Die zweite Randbedingung ist nicht algebraisch lösbar. Man kann aber zeigen, dass es eine derartige Zahl  $d_0 > 0$  gibt, dass folgendes gilt:

1. Für jedes  $d \in (0, d_0)$  gibt es genau zwei Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  vom Typ (4.3). Diese zwei Lösungen sind geordnet:  $u_1 < u_2$ .
2. Für  $d = d_0$  gibt es genau eine Lösung vom Typ (4.3).
3. Für  $d > d_0$  existiert keine Lösung.

Bilder zu diesen Funktionen  $u$  findet man in Abbildung 4.1. Für eine dreidimensionale Darstellung einiger solcher Lösungen verweisen wir auf Abbildung 4.4 und 4.3.

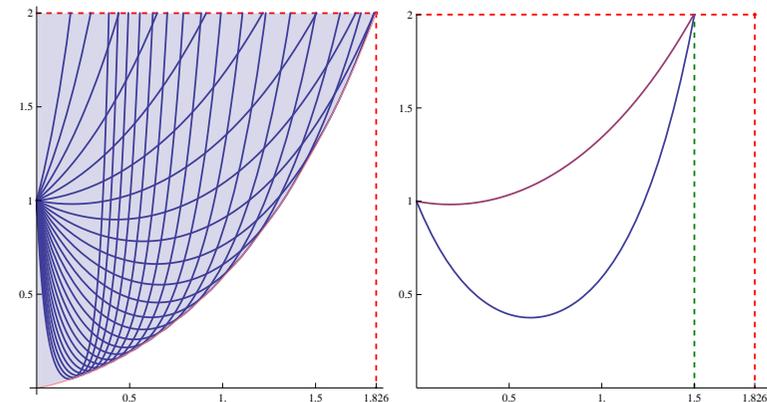


Abbildung 4.1: Für  $d > 1.82617\dots$  gibt es keine Lösungen und für  $d < 1.82617\dots$  immer zwei! Für  $d = 1.5$  sind rechts beide Lösungen  $z \mapsto u(z)$  abgebildet. Die Kurven nennt man Katenoiden oder Kettenlinien, weil sie auch die Kurve einer hängenden Kette beschreiben.

## 4.2 Lokales und globales Minimum

Wenn das Funktional  $J(u)$  in  $u$  ein Minimum hat und die Funktion  $\tau \mapsto J(u + \tau\varphi)$  für passende Störungen  $\varphi$  differenzierbar ist, folgt, dass  $\frac{\partial}{\partial \tau} J(u + \tau\varphi) = 0$ . Damit ist noch nicht sicher, dass  $u$  ein Minimum ist, denn es könnte ja auch ein Maximum oder sogar ein Sattelpunkt sein. Nehmen wir an, dass  $\tau \mapsto J(u + \tau\varphi)$  zweimal differenzierbar ist, dann sind wir schon viel weiter, wenn wir herleiten können, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} J(u + \tau\varphi)|_{\tau=0} \geq 0$$

für alle Störungen<sup>1</sup>  $\varphi$  gilt. Das Funktional

$$\partial^2 J(u; \varphi) := \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} J(u + \tau\varphi)|_{\tau=0} \quad (4.4)$$

heißt *die zweite Variation von  $J$  in Richtung  $\varphi$* .

**Lemma 4.2.1** *Wenn  $J$  in  $\bar{u}$  ein lokales Minimum hat, dann gilt für alle passenden Testfunktionen  $\varphi$ , für die die erste und zweite Variation von  $J$  in  $\bar{u}$  existiert, dass*

$$\partial J(\bar{u}; \varphi) = 0 \text{ und } \partial^2 J(\bar{u}; \varphi) \geq 0.$$

**Bemerkung 4.2.2** *Und umgekehrt? Sogar wenn  $\partial^2 J(\bar{u}; \varphi) > 0$  in  $\bar{u}$  für alle Testfunktionen  $\varphi \neq 0$  gilt, dann muss  $\bar{u}$  noch kein lokales Minimum sein. Wenn jedoch die zweite Variation für alle  $u$  in der Nähe von  $\bar{u}$  positiv ist, dann kann man zeigen, dass man ein globales Minimum hat. Die Stetigkeit von  $u \mapsto \partial^2 J(u; \cdot)$  als Funktional würde da helfen.*

<sup>1</sup>Störungen = perturbations

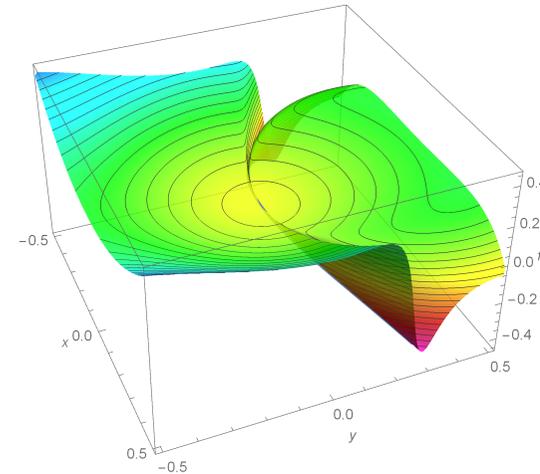


Abbildung 4.2: Skizze einer Funktion  $f$  mit erste Variation  $\partial J(0; \cdot) = 0$  und zweite Variation positiv in 0, die jedoch kein Minimum in 0 hat.

**Beispiel 4.2.3** *Betrachte die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(0,0) = 0$  und sonst*

$$f(x, y) := \frac{(y - x^2)^2 - y^4}{(y - x^2)^2 + y^4} (x^2 + y^2).$$

*Man kann zeigen, dass  $f$  stetig und differenzierbar ist. Und es gilt zwar*

$$\partial^2 f((0,0); v) = 2 > 0 \text{ für alle Richtungen } v \in \mathbb{S}^1,$$

*aber trotzdem ist  $(0,0)$  kein Minimum. Das letzte sieht man durch*

$$f(x, x^2) = -(x^2 + x^4) < 0 \text{ für } x \neq 0.$$

*Übrigens,  $f$  ist überall differenzierbar, hat jedoch keine in*

(0, 0) stetige Ableitungen. Also  $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$ . Eine Skizze findet man in Abbildung 4.2.

Für  $F \in C^2(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  mit

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) \, dx$$

wird die zweite Variation

$$\begin{aligned} \partial^2 J(u; \varphi) &= \\ &= \int_{\Omega} \left( F_{uu}(x, u, Du) \varphi^2 + 2\varphi \sum_{i=1}^n F_{p_i u}(x, u, Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n F_{p_i p_j}(x, u, Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dx. \end{aligned}$$

Der erste Teil lässt sich für  $\varphi$  mit  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$  vereinfachen zu

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left( F_{uu}(x, u, Du) \varphi^2 + 2\varphi \sum_{i=1}^n F_{p_i u}(x, u, Du) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( F_{uu}(x, u, Du) - \nabla \cdot F_{pu}(x, u, Du) \right) \varphi^2 dx. \end{aligned}$$

Wenn

1. die Matrix  $M$ , definiert durch  $\left( F_{p_i p_j}(x, \bar{u}(x), D\bar{u}(x)) \right)_{ij}$ , positiv semidefinit ist für jedes  $x \in \Omega$
2. und außerdem gilt für jedes  $x \in \Omega$ , dass

$$\left( F_{uu}(x, u, Du) - \nabla \cdot F_{pu}(x, u, Du) \right)_{u=\bar{u}(x), p=D\bar{u}(x)} \geq 0, \quad (4.5)$$

dann finden wir  $\partial^2 J(\bar{u}; \varphi) \geq 0$  für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$ .

**Beispiel 4.2.4** Für die Minimalfläche aus Paragraph 4.1 mit  $J$ , definiert in (4.1), findet man

$$\begin{aligned} \partial^2 J(u; \varphi) &:= \\ &\int_0^d \left( \frac{u(z)}{(1+u'(z)^2)^{3/2}} \varphi'(z)^2 + \frac{2u'(z)}{\sqrt{1+u'(z)^2}} \varphi'(z) \varphi(z) \right) dz. \end{aligned}$$

Der Term mit  $\varphi'(z)^2$  ist positiv, wird jedoch klein, wenn  $u(z)$  klein wird. Der zweite Term wechselt im Allgemeinen das Vorzeichen.

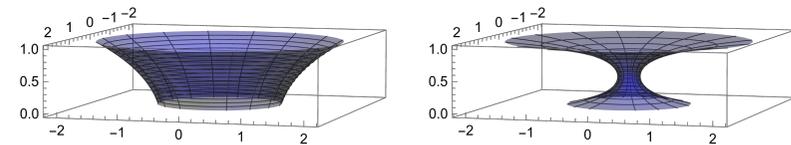


Abbildung 4.3: Dreidimensionale Vorstellungen von den beiden Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  für  $d = 1$ .

**Aufgabe 4.1** Für die Seifenhaut auf Seite 36 mit  $d \in (0, d_0)$  haben wir zwei Lösungen gefunden. Versuche zu zeigen, daß  $u_2$  ein Minimum ist und  $u_1$  nicht. Wenn  $\partial^2 J(u_2; \varphi) > 0$  für alle  $\varphi \in C_c^\infty(0, d)$  gilt, dann ist  $u_2$  ein lokales Minimum. Wenn es  $\varphi \in C_c^\infty(0, d)$  gibt derartig, dass  $\partial^2 J(u_1; \varphi) < 0$ , dann ist  $u_1$  kein Minimum. Siehe Abbildung 4.3 und 4.4.

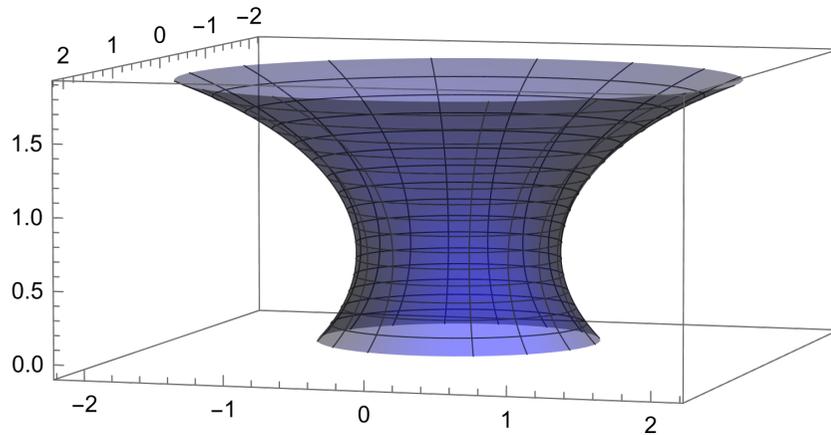


Abbildung 4.4: Dreidimensionale Vorstellung von der Lösung bei maximaler Distanz  $d_0$  zwischen den Ringen.

**Aufgabe 4.2** Wir definieren das Funktional  $J$  für  $u \in C^1[-1, 1] \cap C_0[-1, 1]$  durch

$$J(u) = \int_{-1}^1 \left( x^2 (u'(x))^2 + x (u'(x))^3 \right) dx.$$

1. Bestimmen Sie  $\partial J(u; \varphi)$  und zeigen Sie, dass für alle  $\varphi \in C^1[-1, 1] \cap C_0[-1, 1]$  gilt:

$$\partial J(0; \varphi) = 0.$$

2. Bestimmen Sie  $\partial^2 J(0; \varphi)$  und zeigen Sie, dass für alle nicht-triviale  $\varphi \in C^1[-1, 1] \cap C_0[-1, 1]$  gilt:

$$\partial^2 J(0; \varphi) > 0.$$

3. Wir definieren  $u_\varepsilon \in C^1[-1, 1] \cap C_0[-1, 1]$  für  $\varepsilon < \frac{2}{\pi}$  und  $\alpha > 0$  durch

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{1+\alpha} \cos(x/\varepsilon)^2 & \text{falls } |x| < \frac{1}{2}\pi\varepsilon, \\ 0 & \text{falls } |x| \geq \frac{1}{2}\pi\varepsilon. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass es positive Konstanten  $c_1, c_2$  gibt derart, dass

$$J(u_\varepsilon) = c_1 \varepsilon^{3+2\alpha} - c_2 \varepsilon^{2+3\alpha} \text{ für alle } \varepsilon < \frac{2}{\pi}. \quad (4.6)$$

4. Zeigen Sie, dass es für  $\alpha \in (0, 1)$  eine Zahl  $\varepsilon_\alpha > 0$  gibt derart, dass  $J(u_\varepsilon) < 0$  für alle  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\alpha)$ .
5. Zeigen Sie auch, dass dies bedeutet, dass  $u = 0$  kein lokales Minimum ist, wenn man die Entfernung zwischen Funktionen durch die  $\|\cdot\|_{C^1[-1,1]}$ -Norm definiert.

## 4.3 Konvexität

Es gibt Konvexität für Mengen und für Funktionen.

**Definition 4.3.1** Die Menge  $M$  heißt **konvex**, wenn für jedes  $x, y \in M$  und  $\theta \in (0, 1)$  gilt

$$\theta x + (1 - \theta)y \in M. \quad (4.7)$$

Sei nun  $X$  ein Vektorraum oder eine konvexe Teilmenge eines Vektorraums.

**Definition 4.3.2** Die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **konvex**, wenn für jedes  $x, y \in X$  und  $\theta \in (0, 1)$  gilt

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y). \quad (4.8)$$

Die Funktion heißt **strikt konvex**, wenn für jedes  $x \neq y \in X$  und  $\theta \in (0, 1)$  gilt

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y). \quad (4.9)$$

**Bemerkung 4.3.3** Diese Definition kann man auch für Funktionale verwenden.

**Bemerkung 4.3.4** Oft ist es bequem, auch konvexe Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, \infty]$  zu betrachten.

Bevor wir Eindeutigkeit und sogar Existenz bei Funktionale studieren können, schauen wir uns Konvexität bei Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  an.

### 4.3.1 Konvexität in $\mathbb{R}^n$

Für Anwendungen ist es oft leichter eine alternative Version von (strikter) Konvexität zu benutzen.

**Lemma 4.3.5** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

- $f$  ist **konvex**, genau dann, wenn es für jedes  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  ein  $p \in \mathbb{R}^n$  gibt so, dass

$$f(y) \geq f(y_0) + p \cdot (y - y_0) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.10)$$

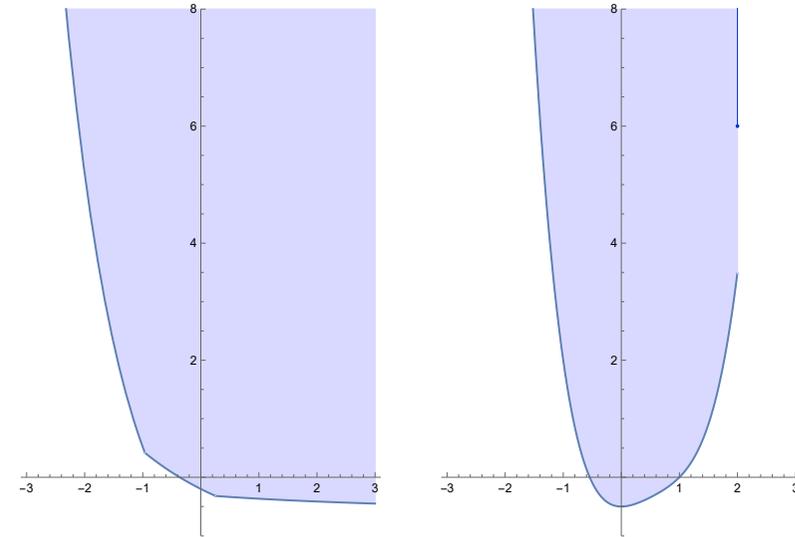


Abbildung 4.5: Links eine konvexe Funktion auf  $\mathbb{R}$  ohne Minimum und rechts eine nicht-stetige konvexe Funktion  $f$  auf  $[-3, 2]$  mit  $f(2) = 6$  und  $\lim_{x \uparrow 2} f(x) < 6$ . Übrigens ist für  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $I$  ein Intervall, die Menge  $\{(x, y); y \geq f(x) \text{ und } x \in I\}$  konvex genau dann, wenn  $f$  eine konvexe Funktion ist.

- $f$  ist **strikt konvex**, genau dann, wenn es für jedes  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  ein  $p \in \mathbb{R}^n$  gibt so, dass

$$f(y) > f(y_0) + p \cdot (y - y_0) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}^n \setminus \{y_0\}. \quad (4.11)$$

**Bemerkung 4.3.6** Sogar für eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , bei der  $X$  ein normierter Vektorraum ist, lässt sich eine ähnliche Äquivalenz zeigen mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach.

**Beweis.** (4.10)  $\Rightarrow$  (4.8) lässt sich einfach beweisen. Denn tatsächlich findet man mit (4.10) und  $y_0 = \theta x + (1 - \theta)y$ , dass

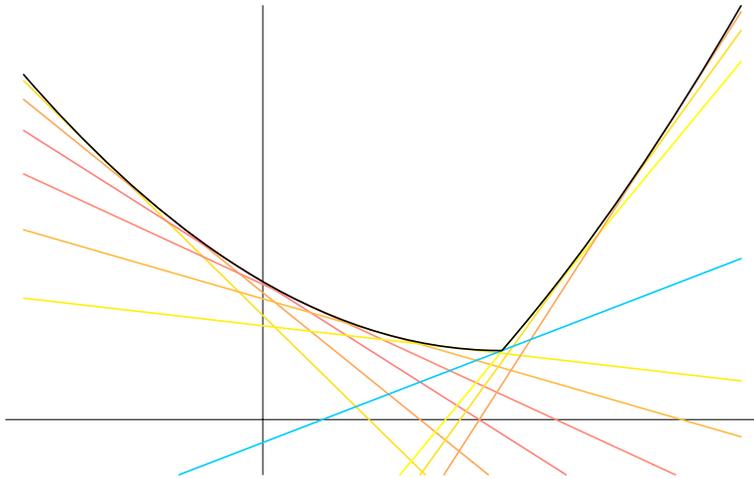


Abbildung 4.6: Hier ist eine konvexe Funktion  $f$  abgebildet mit der alternativen Fassung von Konvexität aus Lemma 4.3.5. An einigen Stellen kann es mehrere  $p \in \mathbb{R}$  geben so, dass  $f(y) \geq f(y_0) + p \cdot (y - y_0)$ .

es  $p \in \mathbb{R}^n$  gibt so, dass

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\theta x + (1 - \theta)y) + (1 - \theta)p \cdot (x - y), \\ f(y) &\geq f(\theta x + (1 - \theta)y) + \theta p \cdot (y - x). \end{aligned}$$

Addiert man geschickt beide Ungleichungen, dann folgt, dass

$$\theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \geq f(\theta x + (1 - \theta)y).$$

Die strikte Konvexität geht ähnlich.

Die andere Richtung ist schwieriger. Im Fall, dass  $f$  differenzierbar ist, kann man es jedoch leicht beweisen: Man nehme  $p = \nabla f(y_0)$ . Denn aus

$$\begin{aligned} \theta f(y) + (1 - \theta)f(y_0) &\geq f(\theta y + (1 - \theta)y_0) \\ &= f(y_0 + \theta(y - y_0)) \end{aligned}$$

folgt

$$f(y) \geq f(y_0) + \frac{f(y_0 + \theta(y - y_0)) - f(y_0)}{\theta}$$

und wenn wir  $\theta$  nach 0 gehen lassen, folgt

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(y_0) + \lim_{\theta \downarrow 0} \frac{f(y_0 + \theta(y - y_0)) - f(y_0)}{\theta} \\ &= f(y_0) + \nabla f(y_0) \cdot (y - y_0). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Für Funktionen, die lediglich (4.8) erfüllen, wird es wesentlich komplizierter. Bevor es weitergeht, zeigen wir, dass Funktionen, die (4.8) erfüllen, fast differenzierbar sind. ■

Wenn (4.8) erfüllt ist, kann man mit Hilfe einiger geometrischer Argumente folgendes zeigen: Es gibt für  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  einen Vektor  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $|p_0| = 1$  derartig, dass

$$(x - x_0) \cdot p_0 > 0 \implies f(x) \geq f(x_0). \quad (4.13)$$

In einer Dimension sieht man dies sofort: Nehme an, es gibt  $x > x_0$  mit  $f(x) < f(x_0)$ , und (4.8) zeigt  $f(y) > f(x_0)$  für beliebiges  $y < x_0$ . Es gilt nämlich, dass

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{x - y} f(y) &\geq f(x_0) - \frac{x_0 - y}{x - y} f(x) \\ &> f(x_0) - \frac{x_0 - y}{x - y} f(x_0) = \frac{x - x_0}{x - y} f(x_0), \end{aligned}$$

und dies zeigt (4.13) für  $p_0 = -1$ . Falls es kein  $x > x_0$  gibt mit  $f(x) < f(x_0)$ , nimmt man  $p_0 = 1$ .

Dieses eindimensionale Argument kann man auch für jede Richtung in mehreren Dimensionen anwenden. Wir geben keinen Beweis, sondern versuchen mit einigen Illustrationen in Abbildung 4.7 zu zeigen, wie man in zwei Dimensionen vorgehen kann.

Als Nächstes werden wir in mehreren Schritten beweisen, dass in  $\mathbb{R}^n$  die Bedingung in (4.8) die Bedingung in (4.10) impliziert, sowie auch (4.9) die Bedingung in (4.11) impliziert.

In groben Linien ist der Beweis wie folgt:

*Sei  $f$  konvex. Dann gilt, möglicherweise auf einem etwas kleineren Gebiet, dass:*

*punktweise beschränkt  $\implies$  gleichmäßig beschränkt  
 $\implies$  monotone Differenzen  $\implies$  Lipschitz stetig & Existenz aller Richtungsableitungen  $\implies$  oberhalb einer affinen Funktion.*

**Behauptung 4.3.7** *Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die (4.8) erfüllt, ist gleichmäßig beschränkt auf beschränkten Gebieten.*

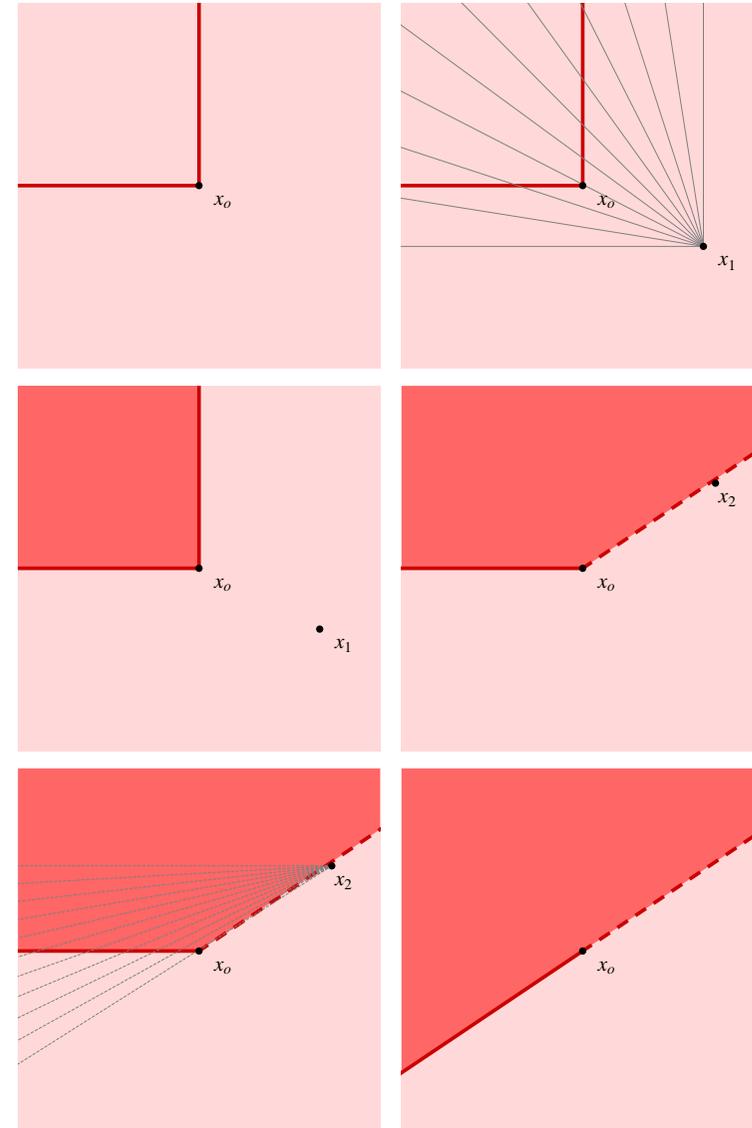


Abbildung 4.7: Die Stellen  $x$  mit  $f(x) \geq f(x_0)$  sind in dunkelrot dargestellt. Man nimmt an, dass  $f(x_1) < f(x_0)$ . Entlang der Linien verwendet man das eindimensionale Ergebnis.

**Beweis.** Sei  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte Folge mit  $f(x_k) \rightarrow \infty$ . Wir schreiben  $p_k$  für einen Vektor, der wie in (4.13) zu  $x_k$  passt. Dann kann man eine Teilfolge so nehmen, dass  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{k_m} = x_\infty$  und  $\lim_{m \rightarrow \infty} p_{k_m} = p_\infty$  existieren. Man findet, dass  $f(x_\infty + p_\infty) \geq f(x_{k_m}) \rightarrow \infty$ , einen Widerspruch zu der Annahme, dass  $f(x_\infty + p_\infty) \in \mathbb{R}$ . ■

Wir nehmen  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und zeigen einige Eigenschaften der Funktion  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$g(t) = \frac{f(y_0 + tv) - f(y_0)}{t}.$$

**Behauptung 4.3.8** Nehme an, (4.8) ist erfüllt. Dann gilt für  $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dass

$$t_2 \geq t_1 \implies g(t_2) \geq g(t_1). \quad (4.14)$$

**Beweis.** Für  $t_1 = t_2$  ist nichts zu beweisen. Für  $0 < t_1 < t_2$  ist

$$\frac{f(y_0 + t_1 v) - f(y_0)}{t_1} \leq \frac{f(y_0 + t_2 v) - f(y_0)}{t_2} \quad (4.15)$$

äquivalent zu

$$\frac{t_1}{t_2} f(y_0 + t_2 v) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) f(y_0) \geq f(y_0 + t_1 v)$$

und dies folgt aus (4.8). Das gilt auch für  $t_2 < t_1 < 0$  und vertauschen wir  $t_1$  und  $t_2$ , folgt (4.14). Für  $t_1 < 0 < t_2$  ist (4.15) äquivalent zu

$$\frac{t_2}{t_2 - t_1} f(y_0 + t_1 v) + \frac{-t_1}{t_2 - t_1} f(y_0 + t_2 v) \geq f(y_0)$$

und auch dies folgt aus (4.8). ■

**Behauptung 4.3.9** Nehme an, (4.8) ist erfüllt. Dann ist  $f$  lokal Lipschitz-stetig und es existieren die Richtungsableitungen von  $f$  in  $y_0$  in Richtung  $v$  und  $-v$ . Es gilt:

$$-\frac{\partial}{\partial(-v)} f(y_0) = \lim_{t \uparrow 0} g(t) \leq \lim_{t \downarrow 0} g(t) = \frac{\partial}{\partial v} f(y_0).$$

**Beweis.** Für  $t \in (0, 1)$  und  $|w| = 1$  gilt

$$f(y) - f(y - w) \leq \frac{f(y + tw) - f(y)}{t} \leq f(y + w) - f(y)$$

und die Beschränktheit von  $f$  auf  $\overline{B_2(y_0)}$ , sagen wir durch  $M$ , ergibt für  $y \in \overline{B_1(y_0)}$

$$|f(y + tw) - f(y)| \leq 2Mt,$$

anders gesagt, für  $x, y \in \overline{B_1(y_0)}$  folgt

$$|f(x) - f(y)| < 2M|x - y|.$$

Weil die Funktion  $g$  auf  $(0, 1]$  wachsend ist (also kleiner wird, wenn  $t$  kleiner wird) und nach unten beschränkt ist durch  $g(-1)$ , existiert der Grenzwert  $g_+ = \lim_{t \downarrow 0} g(t)$ . Es gilt  $\frac{\partial}{\partial v} f(y_0) = g_+$ . Ebenso ist die Funktion  $g$  wachsend auf  $[-1, 0)$  und nach oben beschränkt durch  $g(1)$ . Auch hier existiert der Grenzwert  $g_- = \lim_{t \uparrow 0} g(t) = \frac{-\partial}{\partial(-v)} f(y_0)$ . Die Ungleichung  $g_- \leq g_+$  folgt auch aus (4.14). ■

Wir brauchen für den nächsten Schritt den **Friedrichs'schen Glätter**<sup>2</sup>:

<sup>2</sup>Friedrichs'scher Glätter = mollifier

**Definition 4.3.10** Man definiert  $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\varphi_1(x) = c_n \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & \text{für } x \in B_1(0), \\ 0 & \text{für } x \notin B_1(0). \end{cases} \quad (4.16)$$

Die Konstante ist definiert durch  $\int_{B_1(0)} \varphi_1(x) dx = 1$ .

Für  $\varepsilon \in (0, 1)$  definiert man  $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi_1(\varepsilon^{-1}x).$$

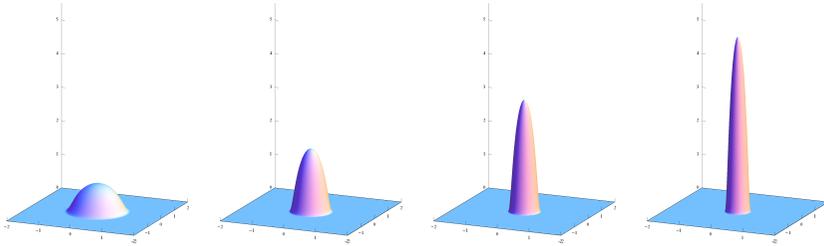


Abbildung 4.8: Skalierungen  $\varphi_\varepsilon$  des Friedrichs'chen Glätters in 2D.

Diese Funktion wird verwendet, um Falten glattzubügeln. Für eine integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  setzt man

$$f_\varepsilon(x) = \int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

**Lemma 4.3.11** Sei  $f \in C(\mathbb{R}^n)$  und sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gilt:

1.  $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ;
2.  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

3.  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|f_\varepsilon - f\|_{C(K)} = 0$  für jede kompakte Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe 4.3** Beweisen Sie dieses Lemma.

Weiter zeigt man direkt, dass wenn  $f$  (4.8) erfüllt, auch  $f_\varepsilon$  (4.8) erfüllt und wenn  $f$  auf  $\overline{B_1(y_0)}$  eine Lipschitz-Konstante hat, diese Lipschitz-Konstante auch passt für  $f_\varepsilon$  auf  $\overline{B_{1-\varepsilon}(y_0)}$ . Die Konvexität von  $f$  liefert außerdem, dass

$$f_\varepsilon(x) \geq f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(-y) f(x+y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) (f(x-y) + f(x+y)) dy \\ &\geq \int_{y \in \mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) f(x) dy = f(x). \end{aligned}$$

**Fortsetzung des Beweises von Lemma 4.3.5.** Weil  $f_\varepsilon$  differenzierbar ist und (4.8) erfüllt, kann man (4.12) verwenden und es folgt für alle  $y$ , dass

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(y) &\geq f_\varepsilon(y_0) + \nabla f_\varepsilon(y_0) \cdot (y - y_0) \\ &\geq f(y_0) + \nabla f(y_0) \cdot (y - y_0). \end{aligned}$$

Die gleichmäßige Lipschitz-Stetigkeit der  $f_\varepsilon$  auf  $\overline{B_{1/2}(y_0)}$  zeigt, dass die  $|\nabla f_\varepsilon(y_0)|$  gleichmäßig beschränkt sind für alle  $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ . Dann kann man eine Nullfolge  $\varepsilon_k$  finden so, dass  $p := \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f_{\varepsilon_k}(y_0)$  existiert. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} f(y) &= \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\varepsilon_k}(y) \geq f(y_0) + \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla f_{\varepsilon_k}(y_0) \cdot (y - y_0) \\ &= f(y_0) + p \cdot (y - y_0). \end{aligned}$$

■

Für  $f \in C^2(\mathbb{R})$  weiß man, dass  $f$  konvex ist, wenn  $f''(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Für  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  wird es schon etwas schwieriger, Konvexität aus den zweiten Ableitungen herzuleiten. Definiert man  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  durch

$$A_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x), \quad (4.17)$$

dann kann man das folgende Ergebnis verwenden.

**Lemma 4.3.12** Sei  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix. Dann sind äquivalent:

- $\vec{\xi} \mapsto \vec{\xi} \cdot A \vec{\xi}$  ist strikt konvex.
- $A$  ist positiv definit:  $\exists c > 0 \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n : \vec{\xi} \cdot A \vec{\xi} \geq c |\vec{\xi}|^2$ .
- $A$  hat nur strikt positive Eigenwerte.

Wenn für jedes  $x$  die Matrix  $A$  in (4.17) (strikt) konvex ist, dann ist  $f$  (strikt) konvex.

### 4.3.2 Minimum bei Konvexität

**Proposition 4.3.13** Sei  $X$  ein normierter Raum. Wenn das Funktional  $J : \mathcal{C} \subset X \rightarrow \mathbb{R}$  strikt konvex ist und auch  $\mathcal{C}$  ist konvex, dann hat  $J$  höchstens ein lokales Minimum in  $\mathcal{C}$ .

**Beweis.** Seien  $u$  und  $v$  beide ein Minimum für  $J$ . Betrachte für  $t \in [0, 1]$  die Kurve

$$s(t) = (1 - t)u + tv.$$

Wenn  $J(u) \geq J(v)$ , dann findet man einen Widerspruch durch

$$J(s(\varepsilon)) < (1 - \varepsilon)J(u) + \varepsilon J(v) \leq J(u) \text{ für alle } \varepsilon > 0$$

und die Tatsache, dass  $s(\varepsilon)$  beliebig nahe bei  $u$  genommen werden kann. ■

Es passiert selten, dass man gleichzeitig Konvexität in  $u$  und  $p$  hat. Weil der Fall ziemlich einfach ist, wird er hier betrachtet. Man zeigt dann sofort, dass die Konvexität von  $(u, p) \mapsto F(x, u, p)$  übertragen wird auf das zugehörige  $J$ :

**Lemma 4.3.14** Sei  $F \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ . Wenn

$$(u, p) \mapsto F(x, u, p) \text{ (strikt) konvex ist für jedes } x \in \bar{\Omega},$$

dann ist  $J : C^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx$$

auch (strikt) konvex.

**Theorem 4.3.15** Wir nehmen an, dass  $F \in C^2(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$  derartig ist, dass

$$(u, p) \mapsto F(x, u, p) \text{ konvex ist f\u00fcr jedes } x \in \bar{\Omega}.$$

F\u00fcr

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) dx$$

suchen wir  $u_{\min}$  mit

$$J(u_{\min}) = \min_{u \in \mathcal{C}} J(u) \text{ mit } \mathcal{C} = C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega}).$$

1. Wenn  $\bar{u} \in \mathcal{C}$  so ist, dass  $\partial J(\bar{u}, \varphi) = 0$  f\u00fcr alle  $\varphi \in \mathcal{C}$ , dann ist  $\bar{u}$  ein Minimum.
2. Wenn au\u00dferdem  $(u, p) \mapsto F(x, u, p)$  strikt konvex<sup>3</sup> ist f\u00fcr jedes  $x \in \bar{\Omega}$ , dann ist  $\bar{u}$  das eindeutige Minimum.

**Beweis.** Aus der Konvexit\u00e4t folgt, dass es f\u00fcr jedes  $x \in \bar{\Omega}$  einen Vektor  $\vec{q} \in \mathbb{R}^{n+1}$  gibt derartig, dass

$$F(x, u, p) \geq F(x, \bar{u}(x), D\bar{u}(x)) + \vec{q} \cdot \begin{pmatrix} u - \bar{u}(x) \\ p - D\bar{u}(x) \end{pmatrix}.$$

Da wir angenommen haben, dass  $F$  differenzierbar ist, nimmt man

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} F_u(x, \bar{u}(x), D\bar{u}(x)) \\ F_p(x, \bar{u}(x), D\bar{u}(x)) \end{pmatrix}.$$

Man beobachtet als n\u00e4chstes, dass

$$\begin{aligned} J(u) - J(\bar{u}) &= \int_{\Omega} (F(x, u(x), Du(x)) - F(x, \bar{u}(x), D\bar{u}(x))) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \begin{pmatrix} F_u(x, \bar{u}(x), D\bar{u}(x)) \\ F_p(x, \bar{u}(x), D\bar{u}(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(x) - \bar{u}(x) \\ Du(x) - D\bar{u}(x) \end{pmatrix} dx \\ &= \partial J(\bar{u}, u - \bar{u}) = 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

<sup>3</sup>strikt konvex = *strictly convex*

Strikte Konvexit\u00e4t zeigt, dass  $\bar{u}$  das einzige Minimum ist. ■

Sp\u00e4ter werden wir sehen, dass f\u00fcr  $J(u)$  die Konvexit\u00e4t bez\u00fcglich der Termen h\u00f6chster Ordnung, hier ist das  $p$ , eine sehr wichtige Rolle spielt bei der Existenz eines Minimums. In der zweiten Variation f\u00fcr

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

bezieht sich das auf den Term

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n F_{p_i p_j}(x, u(x), \nabla u(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

Konvexit\u00e4t dieses Funktionals folgt aus der punktw\u00e4sen Konvexit\u00e4t von

$$\vec{\xi} \mapsto \sum_{i,j=1}^n F_{p_i p_j}(x, u(x), \nabla u(x)) \xi_i \xi_j \text{ f\u00fcr alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } x \in \Omega.$$

Wir definieren die Matrix  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  durch

$$A_{ij} = F_{p_i p_j}(x, u(x), \nabla u(x)).$$

**Beispiel 4.3.16** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschr\u00e4nktes Gebiet und sei  $f \in C(\bar{\Omega})$ . F\u00fcr  $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$  definieren wir

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \right) dx.$$

Man findet

$$\begin{aligned} \partial J(u; \varphi) &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi - f \varphi) dx, \\ \partial^2 J(u; \varphi) &= \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi dx. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$(u, p) \mapsto F(x, u, p) := \frac{1}{2} |p|^2 - f(x)u$$

ist konvex aber nicht strikt konvex. Also ist eine Funktion  $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$  mit  $\partial J(u; \varphi) = 0$  ein Minimum, aber  $u$  ist a-priori nicht unbedingt das einzige Minimum. Wenn man jedoch die Ungleichung von Poincaré-Friedrichs<sup>4</sup> verwendet, dann findet man:

$$\partial^2 J(u; \varphi) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla \varphi|^2 + \lambda_{\Omega} \varphi^2) \, dx$$

und dies ergibt die strikte Konvexität von  $J$  auf  $C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$ . Der Minimierer ist eindeutig.

## 4.4 Funktionale für vektorwertige Funktionen

### 4.4.1 Das Stokes-System

Die Strömung einer Flüssigkeit unter einer externen Kraft gibt das folgende Funktional:

$$J(\vec{w}) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (|\nabla w_1|^2 + |\nabla w_2|^2 + |\nabla w_3|^2) - \vec{f} \cdot \vec{w} \right) dx.$$

<sup>4</sup>**Poincaré-Friedrichs-Ungleichung:** Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet gibt es  $\lambda_{\Omega} > 0$  so, dass folgendes gilt für alle  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$ :

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx \geq \lambda_{\Omega} \int_{\Omega} \varphi^2 \, dx.$$

Die Funktion  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschreibt die Geschwindigkeiten der Strömung in  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Nehmen wir an, dass die Flüssigkeit inkompressibel ist, dann muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\nabla \cdot \vec{w} = 0 \text{ innerhalb von } \Omega. \quad (4.19)$$

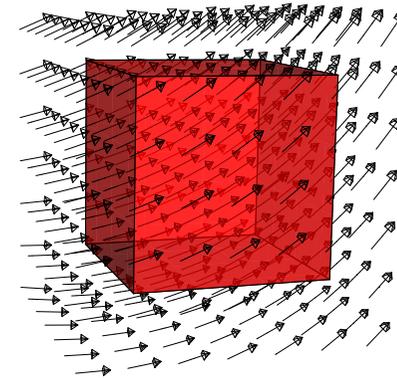


Abbildung 4.9: Wenn ein Vektorfeld  $\vec{w}$  eine Strömung beschreibt, bedeutet (4.19), dass für jedes Teilgebiet gleich viel herein- wie herausströmt.

Passende Randbedingungen sind zum Beispiel:

- Keine Bewegung am Rand:  $\vec{w} = 0$  auf  $\partial\Omega$ .
- Bewegung nur parallel zum Rand:  $\vec{w} \cdot \vec{\nu} = 0$  auf  $\partial\Omega$ ;  $\vec{\nu}$  ist der auswärtige Normalenvektor.

Schreiben wir für die Randbedingung

$$B\vec{w} = 0.$$

Sei  $\vec{w}$  stetig differenzierbar. Die schwache Form der Euler-Lagrange Gleichung wird:

Für alle  $\vec{\varphi} \in \{C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3); \nabla \cdot \vec{\varphi} = 0\}$  gilt

$$\int_{\Omega} \left( \nabla w_1 \cdot \nabla \varphi_1 + \nabla w_2 \cdot \nabla \varphi_2 + \nabla w_3 \cdot \nabla \varphi_3 - \vec{f} \cdot \vec{\varphi} \right) dx = 0 \quad (4.20)$$

Die Gleichung in (4.20) ist leider so, dass das Hauptlemma nicht sofort anzuwenden ist, denn es gibt eine Bedingung, die die drei Komponenten von  $\vec{\varphi}$  verbindet. Man kann zeigen, dass man statt (4.19) und (4.20) für die obigen Randbedingungen auch das folgende Problem betrachten kann:

Es gibt eine Funktion  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  derartig, dass für alle  $\vec{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$  gilt

$$\int_{\Omega} \left( \nabla w_1 \cdot \nabla \varphi_1 + \nabla w_2 \cdot \nabla \varphi_2 + \nabla w_3 \cdot \nabla \varphi_3 - \left( \vec{f} - \nabla p \right) \cdot \vec{\varphi} \right) dx = 0. \quad (4.21)$$

Betrachten wir

$$J^*(\vec{w}) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (|\nabla w_1|^2 + |\nabla w_2|^2 + |\nabla w_3|^2) - \left( \vec{f} - \nabla p \right) \cdot \vec{w} \right) dx,$$

dann sieht man, dass dieses Funktional konvex ist. Wenn die Randwerte es erlauben, folgt aus der Ungleichung von Poincaré-Friedrichs, dass das Funktional sogar strikt konvex ist, und es hat für festes  $p$  also höchstens ein Minimum. Leider ist  $p$  nicht gegeben, sondern Teil der gesuchten Lösung.

Übrigens findet man durch partielle Integration, dass

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{\varphi} dx = \int_{\partial\Omega} p \vec{\varphi} \cdot \vec{\nu} d\sigma_x - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{\varphi} dx$$

und mit den beiden obigen Randbedingungen für  $\vec{\varphi}$  folgt

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{\varphi} dx = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{\varphi} dx.$$

So findet man

$$\partial J^*(\vec{w}; \vec{\varphi}) = \partial J(\vec{w}; \vec{\varphi}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{\varphi} dx.$$

Dies sieht aus wie eine Art eines unendlich-dimensionalen Lagrange-Multiplikator-Satzes mit  $p(x)$  als Multiplikator. Dies kann man wie folgt sehen:

Nehme an, die Bedingung  $\nabla \cdot \vec{\varphi} = 0$  hätte man nur an endlich vielen Punkten  $\{x_i\}_{i=1}^n$  zu erfüllen. An diesen Stellen schreibt man nun Funktionale mit Hilfe von Distributionen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{w}(x_i) &= \delta_{x_i}(\nabla \cdot \vec{w}) \\ &= \int_{\Omega} \delta_{x_i}(y) \nabla \cdot \vec{w}(y) dy = 0 \text{ für alle } x_i. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die Gänsefüßlein stehen in (4.22), weil es so eigentlich nicht zu verstehen ist und es trotzdem oft genau so dargestellt wird. Dann hätte man mit dem Lagrange Multiplikator Satz, dass ein Minimum die folgende Gleichung erfüllt für alle  $\vec{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ :

$$\partial J(\vec{w}; \vec{\varphi}) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{\Omega} \delta_{x_i}(y) \nabla \cdot \vec{\varphi}(y) dy = 0.$$

Setzen wir  $p(x_i) = \lambda_i$ , so folgt für alle  $\vec{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ :

$$\partial J(\vec{u}; \vec{\varphi}) - \sum_{i=1}^n p(x_i) \nabla \cdot \vec{\varphi}(x_i) = 0.$$

Es wäre noch ein Schritt zu tun, nämlich die Summe durch ein Integral zu ersetzen, und man bekäme für alle  $\vec{\varphi} \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3)$ :

$$\partial J(\vec{u}; \vec{\varphi}) - \int_{\Omega} p(x) \nabla \cdot \vec{\varphi}(x) dx = 0.$$

Leider braucht das Ganze etwas bessere Argumente. Diese findet man zum Beispiel im Buch von Evans [6].

#### 4.4.2 Konvexität für vektorwertige Funktionen

Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm}$  zweimal stetig differenzierbar. Setze

$$J(\vec{u}) = \int_{\Omega} F(x, \vec{u}(x), \nabla \vec{u}(x)) dx \text{ für } \vec{u} \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Die erste Variation wird

$$\begin{aligned} \partial J(\vec{u}; \vec{\varphi}) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m (F_{u_i}(x, \vec{u}(x), \nabla \vec{u}(x)) \varphi_i(x) \\ + F_{\vec{p}_i}(x, \vec{u}(x), \nabla \vec{u}(x)) \cdot \nabla \varphi_i(x)) dx \end{aligned}$$

und die zweite Variation

$$\begin{aligned} \partial^2 J(\vec{u}; \vec{\varphi}) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^m F_{u_i u_j}(x, \vec{u}(x), \nabla \vec{u}(x)) \varphi_i(x) \varphi_j(x) \right. \\ \left. + 2 \sum_{i,j=1}^m F_{\vec{p}_i u_j}(x, \vec{u}(x), \nabla \vec{u}(x)) \cdot \nabla \varphi_i(x) \varphi_j(x) \right. \\ \left. + \sum_{s,t=1}^n \sum_{i,j=1}^m F_{(\vec{p}_i)_s (\vec{p}_j)_t}(x, \vec{u}(x), \nabla \vec{u}(x)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_t}(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Fixieren wir  $(x, \vec{u}(x), \nabla \vec{u}(x))$  und betrachten wir wieder den letzten Term und setzen

$$A_{ij}^{st}(x) = F_{(\vec{p}_i)_s (\vec{p}_j)_t}(x, \vec{u}(x), \nabla \vec{u}(x)).$$

Konvexität bezüglich  $\nabla \vec{u}$  würde folgen aus

$$\sum_{i,j=1}^m \sum_{s,t=1}^n A_{ij}^{st}(x) \xi_{is} \xi_{jt} > 0 \text{ für alle } \xi \in M^{m \times n} \setminus \{0\}.$$

Bemerke, dass  $\xi$  eine Matrix ist.

Leider ist eine solche Bedingung zu einschränkend. Viele Systeme aus den Anwendungen erfüllen diese Bedingung nicht.

Es gibt mit Konvexität verwandte Begriffe, die manchmal schon reichen. Wir betrachten dazu für Funktionen  $\vec{u} \in C^1(\Omega \subset \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$  das Funktional

$$J(\vec{u}) = \int_{\Omega} f(\nabla \vec{u}(x)) dx.$$

Auch hier ist  $\nabla \vec{u}(x)$  für jedes  $x$  eine Matrix.

**Definition 4.4.1** Sei  $f : M^{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  eine (integrierbare) Funktion.

- $f$  heißt **Rang-1-konvex**, wenn für alle  $\theta \in [0, 1]$  und für alle  $\xi, \eta \in M^{m \times n}(\mathbb{R})$  mit  $\text{Rang}(\xi - \eta) \leq 1$ :

$$f(\theta\xi + (1 - \theta)\eta) \leq \theta f(\xi) + (1 - \theta)f(\eta). \quad (4.23)$$

- $f$  heißt **quasikonvex**, wenn für alle kompakten Gebiete  $D \subset \mathbb{R}^n$  und für alle  $\varphi \in C_c^\infty(D; \mathbb{R}^m)$ :

$$f(\xi) \leq \frac{1}{|D|} \int_D f(\xi + \nabla\varphi(x)) dx \quad (4.24)$$

$$\text{mit } |D| = \int_D 1 dx.$$

Die Funktion  $\xi \mapsto f(\xi)$  ist konvex, wenn die Ungleichung in (4.23) erfüllt ist ohne die Einschränkung bezüglich des Ranges. Quasikonvex macht Sinn, wenn man die variationelle Formulierung betrachtet, ist aber generell schwer zu kontrollieren. Man hat irrtümlicherweise lange gehofft, dass Rang-1-konvex und quasikonvex äquivalent sind. Für Polynome zweiter Ordnung folgt diese Äquivalenz schon.

**Lemma 4.4.2** *Konvex  $\Rightarrow$  quasikonvex  $\Rightarrow$  Rang-1-konvex.*

Einen Beweis findet man zum Beispiel in [4].

**Aufgabe 4.4** Die Funktion  $f : M^{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(A) = \det(A)$  ist Rang-1-konvex aber nicht konvex. Zeigen Sie dies.

## Lebesgue-Räume und Funktionalanalysis

### 5.1 Lebesgue-Integrale

#### 5.1.1 Integrale

In den Analysis Vorlesungen hat man Bekanntschaft machen können mit dem Riemann-Integral und dem Lebesgue-Integral. Für diejenigen, die sich nicht auskennen, folgt eine kurze Übersicht. Wenn wir anschließend das Integral benutzen, werden wir immer das Lebesgue-Integral meinen.

- Das **Riemann-Integral** wurde definiert durch Approximationen mit **Treppenfunktionen**

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k \mathbf{1}_{B_k}(x). \quad (5.1)$$

Es gilt  $f_k \in \mathbb{R}$  und  $B_k$  sind „endliche Blöcke“ innerhalb  $\Omega$ . Für eine solche Treppenfunktion definiert man

$$\int_{\Omega} f(x) dx := \sum_{k=1}^n f_k \text{Vol}(B_k).$$

Hier ist  $\text{Vol}(B)$  das Volumen von  $B$ . Die Funktion  $\mathbf{1}_B$  ist die Indikatorfunktion zu der Menge  $B$ :

$$\mathbf{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B, \\ 0 & \text{für } x \notin B. \end{cases}$$

Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  wird Riemann-integrierbar genannt, wenn

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} f_o(x) dx; \text{ Treppenfunktion } f_o \geq f \right\} = \sup \left\{ \int_{\Omega} f_u(x) dx; \text{ Treppenfunktion } f_u \leq f \right\}$$

und man schreibt  $\int_{\Omega} f(x) dx$  für diesen Wert.

- Das **Lebesgue-Integral** wurde definiert durch Approximationen mit **einfachen Funktionen**

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \mathbf{1}_{A_k}(x), \quad (5.2)$$

erst nur für positive Funktionen. Es gilt  $f_k \in [0, \infty]$  und  $A_k$  sind Lebesgue-messbare Mengen innerhalb  $\Omega$ . Die Lebesgue-messbaren Mengen enthalten zum Beispiel alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen in  $\mathbb{R}^n$ . Für solche Mengen kann man das Lebesgue-Maß definieren. Ein Maß ist eine Abbildung von Mengen nach  $[0, \infty]$ , die einige festgelegte Eigenschaften erfüllt. Siehe Appendix A. Für Mengen in  $\mathbb{R}^n$ , bei der das Volumen definiert ist, stimmen Lebesgue-Maß und Volumen überein:

$$\lambda(A) = \text{Vol}(A).$$

Außerdem sind alle Mengen, die man durch abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte von Lebesgue-Mengen bekommt, auch wieder Lebesgue-messbar. Auch das Komplement einer Lebesgue-messbaren Menge ist Lebesgue-messbar.

Für eine solche einfache Funktion, wie in (5.2), definiert man

$$\int_{\Omega} f \, d\lambda := \sum_{k=1}^{\infty} f_k \lambda(A_k).$$

Ausnahmsweise rechnet man hier mit „ $0 \times \infty = 0$ “, das heißt, wenn entweder  $f_k = 0$  oder  $\lambda(A_k) = 0$ , so setzt man  $f_k \lambda(A_k) = 0$ , auch wenn der zweite Term gleich  $\infty$  ist.

Auch hier wird eine allgemeine Funktion  $f$  Lebesgue-integrierbar auf  $\Omega$  genannt, wenn man das Integral mit einfachen Funktionen approximieren kann.

### Ähnlichkeiten und Unterschiede:

1. Sowohl für das Riemann-Integral als auch für das Lebesgue-Integral kann man für mehr beliebige (nicht-negative) Funktionen das Integral definieren, wenn sich die betreffenden Funktionen von oben und von unten durch Treppen- bzw. einfache Funktionen approximieren lassen und die zugehörigen Ober- und Untersummen zum gleichen Wert konvergieren.
2. Beim Lebesgue-Integral kann man auch Approximationen durch unendlich aber abzählbar viele Mengen  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  zulassen und es sind auch Mengen  $A_i$  mit  $\lambda(A_i) = \infty$  erlaubt.
3. Da man beim Lebesgue-Integral sowohl unendliche Summen als auch Mengen mit unendlichem Maß zulässt, muss man bei Funktionen, die kein festes Vorzeichen haben, das Lebesgue-Integral getrennt für  $f^+$  und  $f^-$  definieren. Sonst könnte ein undefiniertes  $\infty - \infty$  auftreten.

Man definiert die nicht-negativen Funktionen

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max(f(x), 0), \\ f^-(x) &= \max(-f(x), 0) \end{aligned}$$

und so findet man  $f^+, f^- \geq 0$  und  $f = f^+ - f^-$ . Man nennt eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue-integrierbar, wenn

$$\int_{\Omega} f^+ \, d\lambda < \infty \text{ und } \int_{\Omega} f^- \, d\lambda < \infty$$

und definiert für solche  $f$  das Integral durch

$$\int_{\Omega} f \, d\lambda = \int_{\Omega} f^+ \, d\lambda - \int_{\Omega} f^- \, d\lambda.$$

4. Für nette Funktionen auf beschränkten Gebieten  $\Omega$  sind Riemann- und Lebesgue-Integral gleich:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} f d\lambda.$$

Ab hier wird  $dx$  auch im Lebesgue-Integral verwendet.

5. Eine Funktion  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man Lebesgue-messbar, wenn die Mengen  $\{x \in \Omega; f(x) < c\}$  Lebesgue-messbar sind für alle  $c \in \mathbb{R}$ . Für eine Lebesgue-messbare Funktion kann man die Lebesgue-Integrale  $\int_{\Omega} f^+ d\lambda$  und  $\int_{\Omega} f^- d\lambda$  definieren als Werte in  $[0, \infty]$ . Nur wenn beide Werte in  $[0, \infty)$  liegen, nennt man die Funktion  $f$  Lebesgue-integrierbar.

### 5.1.2 Definition der Lebesgue-Räume

**Definition 5.1.1** Sei  $q \in [1, \infty)$  und sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Man sagt  $f \in L^q(\Omega)$ , wenn  $f$  Lebesgue-messbar ist und

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |f(x)|^q dx \right)^{1/q} < \infty.$$

Wir möchten daran erinnern, dass wenn das Maß von  $\{x \in \Omega; f_1(x) \neq f_2(x)\}$  gleich null ist, dieses Integral keinen Unterschied macht zwischen zwei Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ . Entweder ist  $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$  dann keine Norm oder man schaut über diese spärlichen Unterschiede hinweg und betrachtet Äquivalenzklassen statt einzelne Funktionen. Das letztere wird gemacht; also sind zum Beispiel die Funktionen  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  und 0 iden-

tisch. Wenn  $f_1$  und  $f_2$  identisch sind im Sinne von Lebesgue, schreibt man  $f_1 = f_2$  f.ü., wobei f.ü. heißt: fast überall<sup>1</sup>.

Das letzte gibt eine Schwierigkeit bei der Supremum-Norm für beschränkte Lebesgue-messbare Funktionen. Wir brauchen dazu das **wesentliche Supremum**.

**Definition 5.1.2** Das wesentliche Supremum<sup>2</sup> einer Funktion  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  ist wie folgt definiert:

$$\text{ess sup } f = \inf \left\{ k \in \mathbb{R}; \lambda \{x \in A; f(x) > k\} = 0 \right\}.$$

In Abbildung 5.1 findet man die Skizze einer Funktion und ihre Niveaumenge für  $k = 3$ . Das Supremum ist 4 und das wesentliche Supremum ist 3,5.

**Definition 5.1.3** Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Man sagt  $f \in L^\infty(\Omega)$ , wenn  $f$  Lebesgue-messbar ist und

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup } |f| < \infty.$$

Für die **Lebesgue-Räume**  $L^p(\Omega)$  gilt:

**Lemma 5.1.4** Sei  $p \in [1, \infty]$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann gilt:

- $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$  ist ein Banachraum.
- $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$  mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

ist sogar ein Hilbertraum

<sup>1</sup>fast überall = *almost everywhere*, f.ü. = *a.e.*

<sup>2</sup>wesentlich Supremum = *essential supremum*

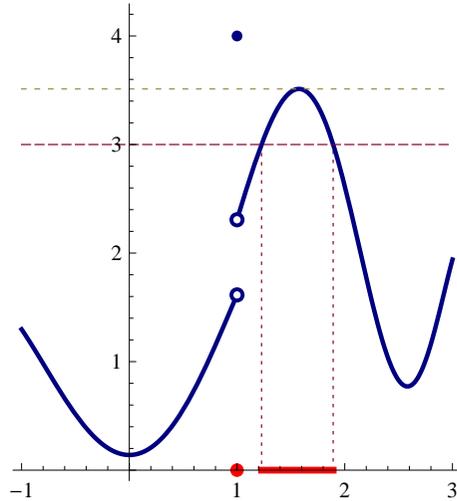


Abbildung 5.1: Beispiel mit wesentlichem Supremum ungleich Supremum. Rot gibt alle Stellen an, wo  $f(x) \geq 3$  gilt.

**Lemma 5.1.5** Wenn  $\lambda(\Omega) < \infty$  und  $1 \leq p < q \leq \infty$ , dann gilt  $L^p(\Omega) \supset L^q(\Omega)$ .

**Beweis.** Dies folgt aus der **Hölder-Ungleichung**<sup>3</sup>:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |f|^p dx = \int_{\Omega} |f|^p 1 dx \leq \left( \int_{\Omega} |f|^{p \frac{q}{q-p}} dx \right)^{\frac{q-p}{q}} \left( \int_{\Omega} 1^{\frac{q}{q-p}} dx \right)^{1-\frac{q-p}{q}} = \|f\|_{L^q(\Omega)}^p \lambda(\Omega)^{1-\frac{p}{q}}.$$

<sup>3</sup>**Hölder-Ungleichung:** Sei  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt für  $f \in L^p(\Omega)$  und  $g \in L^q(\Omega)$ , dass

$$\int_{\Omega} f g dx \leq \left( \int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |g|^q dx \right)^{1/q}.$$

Das heißt, aus  $\|f\|_{L^q(\Omega)} < \infty$  und  $\lambda(\Omega) < \infty$  folgt, dass  $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ . ■

**Lemma 5.1.6** Sei  $p \in [1, \infty)$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen.

Die folgenden Mengen liegen **dicht**<sup>4</sup> in  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ :

- Die stückweise konstanten Funktionen mit beschränktem Träger;
- $C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); \text{Träger von } u \text{ ist kompakt in } \Omega\}$ .

Mit Hilfe des Friedrichs'schen Glätters wird das letzte Ergebnis bewiesen. Siehe [1], [3], [6] oder [12].

**Bemerkung 5.1.7** Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist stückweise konstant, wenn es  $h_i \in \mathbb{R}$  und disjunkte Lebesgue-messbare Mengen  $\mathcal{O}_i$  in  $\Omega$  gibt so, dass  $f = \sum_{i=1}^m h_i 1_{\mathcal{O}_i}$ .

**Definition 5.1.8** Man sagt  $f \in L_{loc}^p(\Omega)$ , wenn  $f|_{\mathcal{O}} \in L^p(\mathcal{O})$  für jedes beschränkte Teilgebiet  $\mathcal{O}$  mit  $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega^\circ$ .

## 5.2 Funktionalanalytisches

### 5.2.1 Dualraum

**Definition 5.2.1** Wenn  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter Vektorraum ist, dann definiert man den **Dualraum**  $X'$  als die Menge aller stetigen linearen Funktionale  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

<sup>4</sup>Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum. Die Teilmenge  $A \subset X$  liegt dicht in  $X$ , wenn es für jedes  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$  ein  $a \in A$  gibt so, dass  $\|x - a\| < \varepsilon$ .

**Lemma 5.2.2** *Setzt man*

$$\|f\|_{X'} = \sup \{|f(x)|; x \in X \text{ mit } \|x\|_X \leq 1\},$$

wird  $(X', \|\cdot\|_{X'})$  ein normierter Vektorraum.

Wie vorher sind wir ein wenig ungenau und schreiben oft  $X'$ , wenn wir eigentlich den Dualraum  $(X', \|\cdot\|_{X'})$  meinen.

**Aufgabe 5.1** *Zeige, dass  $\|\cdot\|_{X'}$  eine Norm ist und dass*

$$\begin{aligned} & \sup \{|f(x)|; x \in X \text{ mit } \|x\|_X \leq 1\} \\ &= \sup \{|f(x)|; x \in X \text{ mit } \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup \{|f(x)| / \|x\|_X; x \in X \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

Die Definition für  $X'$  kann man wiederholen und so bekommt man den **doppeldualen Raum**  $X''$ .

Man findet für jedes  $x \in X$  eine lineare Abbildung  $F_x \in X''$ , die man definiert durch

$$F_x(f) := f(x) \text{ mit } f \in X'. \quad (5.3)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|F_x\|_{X''} &= \sup \{|F_x(f)|; f \in X' \text{ mit } \|f\|_{X'} \leq 1\} \\ &= \sup \{|f(x)|; f \in X' \text{ mit } \|f\|_{X'} \leq 1\} \\ &\leq \sup \{\|f\|_{X'} \|x\|_X; f \in X' \text{ mit } \|f\|_{X'} \leq 1\} = \|x\|_X. \end{aligned}$$

Man sieht, wenn man  $x$  und  $F_x$  identifiziert, dass die Inklusion  $X \subset X''$  nicht nur als Menge, sondern sogar als stetige Funktion aufgefasst werden kann. Genauer gesagt, die Abbildung

$$j : X \rightarrow X'' \text{ mit } j(x) := F_x, \quad (5.4)$$

definiert in (5.3), ist linear und stetig von  $X$  nach  $X''$ .

Obwohl  $j$  meistens keine Bijektion ist, gibt es eine wichtige Klasse, bei der das der Fall ist:

**Definition 5.2.3** *Der Banachraum  $X$  heißt **reflexiv**<sup>5</sup>, wenn  $j$  in (5.4) eine stetige Bijektion ist mit stetiger Inverse.*

Mit Hilfe der folgenden Sätze finden wir, dass Lebesgue-Räume mit  $p \in (1, \infty)$  reflexiv sind.

**Theorem 5.2.4 (Darstellungssatz von F. Riesz für Lebesgue-Räume)** *Sei  $p \in (1, \infty)$  und sei  $F \in (L^p(\Omega))'$ . Dann gibt es genau ein  $f \in L^{p'}(\Omega)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  derart, dass*

$$F(g) = \int_{\Omega} f g \, dx \text{ für alle } g \in L^p(\Omega).$$

Einen Beweis findet man in [3, Theorem 4.11].

**Theorem 5.2.5** *Sei  $F \in (L^1(\Omega))'$ . Dann gibt es genau ein  $f \in L^\infty(\Omega)$  derart, dass*

$$F(g) = \int_{\Omega} f g \, dx \text{ für alle } g \in L^1(\Omega).$$

Auch hier verweisen wir auf [3, Theorem 4.14]. Da jedoch  $(L^\infty(\Omega))' \neq L^1(\Omega)$ , sind  $L^1(\Omega)$  und  $L^\infty(\Omega)$  nicht reflexiv.

**Lemma 5.2.6** *Sei  $p \in [1, \infty)$  und sei  $F$  wie in Theorem 5.2.4 oder 5.2.5 und sei  $f$  die zugehörige Funktion in  $L^{p'}(\Omega)$ . Dann gilt*

$$\|F\|_{(L^p(\Omega))'} = \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

<sup>5</sup>reflexiv = reflexive

**Beweis.** Entweder durch Hölder ( $1 < p < \infty$ ) oder durch direktes Abschätzen ( $p = 1, p' = \infty$ ) findet man:

$$|F(g)| \leq \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

und so folgt

$$\|F\|_{(L^p(\Omega))'} \leq \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Für die Abschätzung in die andere Richtung nimmt man, wenn  $f \in L^{p'}(\Omega) \setminus \{0\}$  und  $1 < p < \infty$ , die Funktion

$$f_p := |f|^{(p'/p)-1} f \in L^p(\Omega)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} F(f_p) &= \int_{\Omega} f_p f dx = \int_{\Omega} |f|^{(p'/p)-1} f^2 dx \\ &= \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} = \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|f_p\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Daraus bekommt man

$$\|F\|_{(L^p(\Omega))'} \geq F(f_p) / \|f_p\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

und ist das Ergebnis für  $p \in (1, \infty)$  bewiesen.

Für  $f \in L^\infty(\Omega)$  und  $\varepsilon > 0$  setzen wir

$$\Omega_{\pm}^\varepsilon = \{x \in \Omega; \pm f(x) > \|f\|_\infty - \varepsilon\}.$$

Dann gilt  $\lambda(\Omega_\sigma^\varepsilon) > 0$  mindestens für eine der beiden  $\sigma \in \{+, -\}$ , sagen wir für  $\sigma = +$ . Für  $m$  genügend groß gilt

$$c_{\varepsilon, m} := \lambda(\Omega_+^\varepsilon \cap B_m(0)) > 0 \text{ und } c_{\varepsilon, m} < \infty.$$

Definiere

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \Omega_+^\varepsilon \cap B_m(0), \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Dann folgt  $\|g_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} = c_{\varepsilon, m}$  und

$$\begin{aligned} F(g_\varepsilon) &= \int_{\Omega} f g_\varepsilon dx = \int_{\Omega_+^\varepsilon \cap B_m(0)} f dx \geq \\ &\geq (\|f\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon) c_{\varepsilon, m} = (\|f\|_{L^\infty(\Omega)} - \varepsilon) \|g_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

und damit  $\|F\|_{(L^1(\Omega))'} \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . Insgesamt haben wir so erreicht, dass  $\|F\|_{(L^1(\Omega))'} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ . ■

Also sind die Normen auf  $L^{p'}(\Omega)$  und  $(L^p(\Omega))'$  für  $p \in [1, \infty)$  nicht nur äquivalent, sondern sogar identisch, wenn wir  $f$  und  $F$  identifizieren.

**Korollar 5.2.7** Für  $p \in (1, \infty)$  gilt  $(L^p(\Omega))'' = L^p(\Omega)$ .

Den Beweis findet man dadurch, dass man zweimal den Repräsentationssatz von Riesz verwendet.

## 5.3 Konvergenz

Wenn man das Minimum eines Funktionals  $J$  sucht, dann geht man meistens wie folgt vor: Man konstruiert sich eine Minimalfolge.

**Definition 5.3.1** Sei  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  ein nach unten beschränktes Funktional. Dann heißt  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  eine **Minimalfolge**, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x).$$

Wie man wissen sollte, ist ein Infimum nicht immer ein Minimum. Weil man in der Variationsrechnung oft ein Minimum, eigentlich sogar eine Minimalstelle sucht, sollte man sich anschauen, unter welchen Bedingungen eine Minimalfolge konvergiert und wann folgendes gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = J\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Stetigkeit von  $J$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_X$  würde reichen, wenn die Minimalfolge in dieser Norm konvergiert. Leider hat man in der Variationsrechnung höchst selten eine solche Stetigkeit gleichzeitig mit einer solchen Konvergenz.

### 5.3.1 Starke und schwache Konvergenz

**Definition 5.3.2** Sei  $X$  ein Banachraum,  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  und  $x \in X$ .

1.  $x_k$  **konvergiert stark**<sup>6</sup> nach  $x$  in  $X$  für  $k \rightarrow \infty$ , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_X = 0.$$

Man schreibt:  $x_n \rightarrow x$  in  $X$ .

2.  $x_k$  **konvergiert schwach** nach  $x$  in  $X$  für  $k \rightarrow \infty$ , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x) \text{ für jede } f \in X'.$$

Man schreibt:  $x_n \rightharpoonup x$  in  $X$ .

Genauso kann man Konvergenz für eine Folge von Funktionen im Dualraum betrachten, also  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X'$ :

<sup>6</sup>starke/schwache Konvergenz = strong/weak convergence

1.  $f_k$  **konvergiert stark** nach  $f$  in  $X'$  für  $k \rightarrow \infty$ , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{X'} = 0.$$

Man schreibt  $f_k \rightarrow f$  in  $X'$ .

2.  $f_k$  **konvergiert schwach** nach  $f$  in  $X'$  für  $k \rightarrow \infty$ , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(f_k) = F(f) \text{ für jedes } F \in X''.$$

Man schreibt  $f_k \rightharpoonup f$  in  $X'$ .

Für Folgen in einem Dualraum gibt es noch eine andere Möglichkeit:

**Definition 5.3.3** Sei  $X$  ein Banachraum,  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X'$  und  $f \in X'$ .

3.  $f_k$  **konvergiert schwach\*** nach  $f$  in  $(X', X)$  für  $k \rightarrow \infty$ , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \text{ für jedes } x \in X.$$

Man schreibt  $f_k \xrightarrow{*} f$  in  $(X', X)$ .

Die etwas komplizierte Schreibweise  $(X', X)$  braucht man, weil man den prä-dualen Raum  $X$  von  $X'$  kennen muss und der ist nicht eindeutig bestimmt durch  $X'$ .

**Lemma 5.3.4**

1. Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.

2. Schwache Konvergenz in  $X'$  impliziert Schwach\*-Konvergenz in  $(X', X)$ .

**Bemerkung 5.3.5** In  $X'$  gibt es also a-priori drei verschiedene Typen von Konvergenz: stark, schwach und schwach\*. Schwach\* ist schwächer als schwach.

**Beweis.** Zu der ersten Aussage: Sei  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ . Wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_X = 0$ , dann folgt für  $f \in X'$  mit  $\|f\|_{X'}$  beschränkt, weil  $f$  stetig ist, dass

$$|f(x_k) - f(x)| = |f(x_k - x)| \leq \|f\|_{X'} \|x_k - x\|_X \rightarrow 0.$$

Zu der zweiten Aussage: Sei nun  $x \in X$  und definiere

$$F_x(f) = f(x) \text{ für } f \in X'.$$

Wenn  $f_k \rightarrow f$  in  $X'$ , so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_x(f_k) - F_x(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) - f(x) = 0$$

und dies bedeutet, dass  $F_x \in X''$ . Wenn  $f_k \rightharpoonup^* f$  in  $X'$ , so gilt weil  $F_x \in X''$ , dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_x(f_k) - F_x(f) = 0,$$

und weil  $F_x(f_k) - F_x(f) = f_k(x) - f(x)$ , folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) - f(x) = 0.$$

Weil diese Aussage für alle  $x \in X$  gilt, bedeutet es, dass  $f_k \xrightarrow{*} f$  in  $(X', X)$ . ■

**Proposition 5.3.6** Sei  $X$  ein Banachraum.

- Wenn  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  schwach gegen  $x$  konvergiert, also  $x_k \rightharpoonup x$ , dann ist  $\|x_k\|_X$  gleichmäßig beschränkt und  $\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$ .
- Wenn  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X'$  schwach gegen  $f$  konvergiert, also  $f_k \rightharpoonup f$ , dann ist  $\|f_k\|_{X'}$  gleichmäßig beschränkt und  $\|f\|_{X'} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{X'}$ .
- Wenn  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X'$  schwach\* gegen  $f$  konvergiert, also  $f_k \xrightarrow{*} f$ , dann ist  $\|f_k\|_{X'}$  gleichmäßig beschränkt und  $\|f\|_{X'} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{X'}$ .

**Bemerkung 5.3.7** Das zweite Ergebnis folgt sowohl aus dem ersten als aus dem letzten.

Für einen Beweis dieser Proposition verweisen wir auf [3, Proposition 3.5 (iii) und Proposition 3.13 (iii)].

**Lemma 5.3.8** Sei  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  und  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X'$ .

1. Wenn  $x_k \rightharpoonup x$  und  $f_k \rightarrow f$ , dann  $f_k(x_k) \rightarrow f(x)$ .
2. Wenn  $x_k \rightarrow x$  und  $f_k \rightharpoonup f$ , dann  $f_k(x_k) \rightarrow f(x)$ .
3. Wenn  $x_k \rightarrow x$  und  $f_k \xrightarrow{*} f$ , dann  $f_k(x_k) \rightarrow f(x)$ .

**Beweis.** Für die erste Behauptung verwendet man

$$\begin{aligned} |f_k(x_k) - f(x)| &\leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k - x)| \leq \\ &\leq \|f_k - f\|_{X'} \|x_k\|_X + |f(x_k - x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

weil  $\|f_k - f\|_{X'} \rightarrow 0$ ,  $\|x_k\|_X$  gleichmäßig beschränkt ist und  $x_k - x \rightarrow 0$ . Ähnliches gilt für 2 und 3. ■

**Bemerkung 5.3.9** Aus  $x_k \rightharpoonup x$  in  $X$  und  $f_k \rightharpoonup f$  in  $X'$  folgt im Allgemeinen nicht, dass  $f_k(x_k)$  gegen  $f(x)$  konvergiert. Für ein Gegenbeispiel kann man  $X = L^2(0, \pi)$  verwenden. Weil  $X = L^2(0, \pi)$  ein Hilbertraum ist, kann man  $X$  und  $X'$  identifizieren. Wir nehmen  $x_k = f_k = (t \mapsto \sin(kt))$ . Für stetige Funktionen  $g$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\pi \sin(kt) g(t) dt = 0$$

und weil man jede Funktion  $h$  in  $L^2(0, \pi)$  mit stetigen Funktionen approximieren kann, folgt aus

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\pi \sin(kt) h(t) dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^\pi \sin(kt) (h(t) - g(t)) dt \right| + \left| \int_0^\pi \sin(kt) g(t) dt \right| \\ & \leq \|x_k\|_{L^2} \|h - g\|_{L^2} + \left| \int_0^\pi \sin(kt) g(t) dt \right|, \end{aligned}$$

dass  $x_k, f_k \rightharpoonup 0$ . Man findet jedoch auch, dass

$$f_k(x_k) = \int_0^\pi \sin(kt)^2 dt = \frac{1}{2}\pi \neq 0.$$

### 5.3.2 Einige Konvergenzsätze

Wenn die Funktionen  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C(\bar{\Omega})$  in  $\|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})}$  nach  $f$  konvergieren und  $\Omega$  ist beschränkt, kann man sich schnell überzeugen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega f_n(x) dx = \int_\Omega \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx,$$

denn

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f_n(x) dx - \int_\Omega f(x) dx \right| & \leq \int_\Omega \|f_n - f\|_{C(\bar{\Omega})} dx \\ & \leq \lambda(\Omega) \|f_n - f\|_{C(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen kann man Integral und Grenzwert nicht vertauschen.

**Beispiel 5.3.10** Man betrachte die Funktionen

$$f_n(x) = 2nxe^{-nx^2} \text{ auf } [0, \infty)$$

und man bekommt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx & = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty 2nxe^{-nx^2} dx \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -e^{nx^2} \right]_0^\infty = 1 \end{aligned}$$

während

$$\int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^\infty 0 dx = 0.$$

Siehe Abbildung 5.2.

**Theorem 5.3.11 (Das Lemma von Fatou)**

Sei  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L^1(\Omega)$  eine Folge mit  $f_k \geq 0$  und

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_\Omega f_k dx < \infty.$$

Dann ist  $f \in L^1(\Omega)$  wohldefiniert durch

$$f(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \quad f.ü.$$

und

$$\int_\Omega f dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega f_k dx.$$

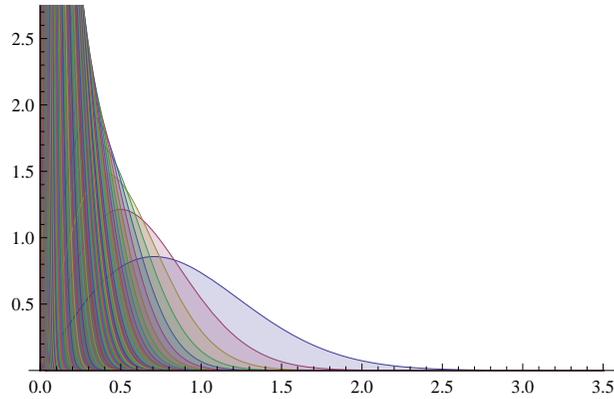


Abbildung 5.2: Bilder zu  $f_n(x) = 2ne^{-nx^2}$ .

Für die Sätze zu monotoner und majorisierter Konvergenz verweisen wir auf den Appendix.

Im nächsten Theorem findet man das Beispiel einer Folge, die nur schwach und nicht stark konvergiert. Wir nehmen  $\Omega = (0, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$  und definieren für  $f \in L^p(\Omega)$  die Funktionen

$$f_k(x_1, \dots, x_n) := f(kx_1 - [kx_1], \dots, kx_n - [kx_n]). \quad (5.5)$$

Hier ist  $[t] = \max\{n \in \mathbb{Z}; n \leq t\}$  die sogenannte Entierfunktion, hierzulande auch als Gaußklammer oder Ganzzteilfunktion bekannt.

**Theorem 5.3.12 (Riemann-Lebesgue)** Sei  $1 \leq p \leq \infty$  und  $\Omega = (0, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$ . Sei  $f \in L^p(\Omega)$  und definiere  $f_k$  wie in (5.5). Dann gilt

$$f_k \rightharpoonup \int_{\Omega} f(y) dy \text{ in } L^p(\Omega) \text{ für } 1 \leq p < \infty,$$

$$f_k \xrightarrow{*} \int_{\Omega} f(y) dy \text{ in } (L^{\infty}(\Omega), L^1(\Omega)) \text{ für } p = \infty.$$

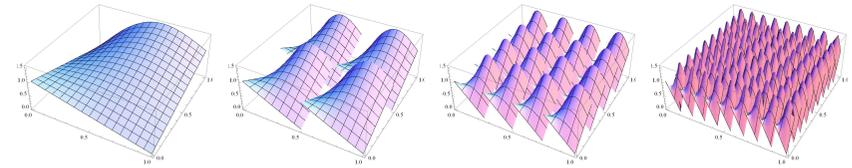


Abbildung 5.3: Für eine Funktion  $f$  stehen hier die Bilder zu  $f_1 = f$ ,  $f_2$ ,  $f_4$  und  $f_9$ , so wie sie in (5.5) definiert werden.

**Aufgabe 5.2** Sei  $f, f_k$  und  $\Omega$  wie im letzten Theorem. Zeige, dass  $f_k \rightarrow \int_{\Omega} f(y) dy$  in  $L^p(\Omega)$  nur für konstante Funktionen  $f$  gilt, genau gesagt, für Funktionen  $f \in L^p(\Omega)$ , bei denen es ein  $c \in \mathbb{R}$  gibt mit fast überall  $f = c$ .

**Beweis von Theorem 5.3.12.** Vorweg sei bemerkt, dass man direkt zeigen kann, dass für  $p \in [1, \infty]$  gilt

$$\|f_k\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Nehmen wir  $p \in (1, \infty]$ . Weil  $\Omega$  beschränkt ist und weil  $f \in L^p(\Omega)$ , folgt auch, dass  $f \in L^1(\Omega)$  und  $\int_{\Omega} f(y) dy \in \mathbb{R}$ . Weiter gilt

$$(f - c)_k = f_k - c$$

und weil  $f_k \xrightarrow{*} c$  äquivalent ist zu  $f_k - c \xrightarrow{*} 0$ , dürfen wir sogar annehmen, dass  $\int_{\Omega} f(y) dy = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Weil  $C_c^{\infty}(\Omega)$  dicht liegt in  $L^{p'}(\Omega)$  mit  $p' \in [1, \infty)$  kann man für jedes  $g \in L^{p'}(\Omega)$  mit  $p' \in [1, \infty)$  einen  $\varphi \in C(\bar{\Omega})$  finden mit  $\|g - \varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \varepsilon$ . Als nächstes nimmt man  $k_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass

$$|x - y| \leq \frac{\sqrt{n}}{k_0} \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

Fixieren wir für  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  den Hyperkubus

$$K_{\alpha}^m = \{x \in \Omega; \alpha_i - 1 \leq mx_i \leq \alpha_i\}.$$

Dann haben wir für  $k \geq k_0$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} f_k(x)g(x)dx \right| \\
& \leq \left| \int_{\Omega} f_k(x)\varphi(x)dx \right| + \|f_k\|_{L^p(\Omega)} \|g - \varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \\
& \leq \sum_{\alpha \text{ mit } 1 \leq \alpha_i \leq k} \left| \int_{K_{\alpha}^k} f_k(x)\varphi(x)dx \right| + \|f\|_{L^p(\Omega)} \varepsilon \\
& \leq \sum_{\alpha \text{ mit } 1 \leq \alpha_i \leq k} \left( \left| \int_{K_{\alpha}^k} f_k(x)\varphi\left(\frac{1}{k}\alpha\right)dx \right| + \varepsilon \int_{K_{\alpha}^k} |f_k(x)| dx \right) \\
& \qquad \qquad \qquad + \|f\|_{L^p(\Omega)} \varepsilon \\
& \leq \sum_{\alpha \text{ mit } 1 \leq \alpha_i \leq k} |\varphi\left(\frac{1}{k}\alpha\right)| \left| \int_{K_{\alpha}^k} f_k(x)dx \right| + 2 \|f\|_{L^p(\Omega)} \varepsilon \\
& = 0 + 2 \|f\|_{L^p(\Omega)} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit folgt  $f_k \rightharpoonup \int_{\Omega} f(y)dy$  in  $L^p(\Omega)$  für  $1 < p < \infty$  und  $f_k \xrightarrow{*} \int_{\Omega} f(y)dy$  in  $(L^{\infty}(\Omega), L^1(\Omega))$  für  $p = \infty$ .

Bleibt übrig  $p = 1$ . Das dürfen Sie selber machen. ■

**Theorem 5.3.13** *Sei  $X$  ein Banachraum. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig.*

- $X$  ist reflexiv.
- Für jede beschränkte Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  gilt, dass es eine Teilfolge  $\{x_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$  und ein  $x \in X$  gibt so, dass  $x_{k_m} \rightharpoonup x$ .

Für einen Beweis dieses Theorems verweisen wir auf einen Satz von Kakutani. Siehe zum Beispiel [3, Theorem 3.17].





## Sobolev-Räume

Funktionsräume mit Lebesgue-Normen für Ableitungen nennt man **Sobolev-Räume** und möchte man wie folgt definieren:

$$W^{k,q}(\Omega) := \{f \in L^q(\Omega); D^\alpha f \in L^q(\Omega) \text{ für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k\},$$

also mit Funktionen aus  $L^q(\Omega)$ , die Ableitungen haben, die auch wieder in  $L^q(\Omega)$  liegen. Dann ergibt sich jedoch das folgende Problem: Wie kann man für  $u \in L^q(\Omega)$ , das heißt, für eine Funktion, die nur fast überall definiert ist, die Ableitung definieren. Die Standarddefinition einer Ableitung ist ja punktweise definiert.

### 6.1 Schwache Ableitung

Eine Möglichkeit eine Ableitung zu definieren, bietet das Hauptlemma der Variationsrechnung und die partielle Integration. Wenn man die Ableitung  $\frac{\partial}{\partial x_i} u = v$  kennt, dann hat man

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} v \varphi \, dx \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (6.1)$$

Die Gleichung in (6.1) ist sinnvoll für Funktionen  $u, v$ , die lediglich in  $L^1_{loc}(\Omega)$  liegen. Die Funktion  $v$  wäre dann die schwache Ableitung von  $u$  nach  $x_i$ . Wenn so eine  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$  existiert, ist diese schwache Ableitung eindeutig fast überall. Dies folgt aus der letzten Version des Hauptlemmas (Lemma 6.4.1). Allgemein werden schwache Ableitungen wie folgt definiert:

**Definition 6.1.1** Die Funktion  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  hat eine **schwache  $D^\alpha$ -Ableitung**<sup>1</sup>  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ , wenn für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ :

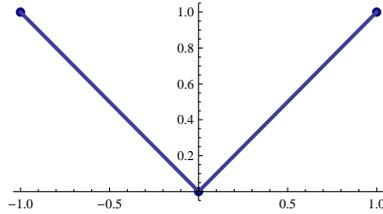
$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi \, dx. \quad (6.2)$$

**Bemerkung 6.1.2** Es folgt sofort, dass wenn  $u$  eine klassische Ableitung auf  $\Omega$  hat, dies auch die schwache Ableitung ist. In den nächsten Beispielen werden wir sehen, dass es schwache Ableitungen gibt, die nicht als klassische Ableitung existieren.

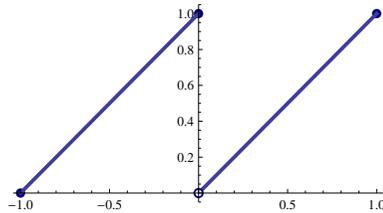
**Beispiel 6.1.3** Betrachte die Funktionen  $f_i : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch:

<sup>1</sup>schwache Ableitung = weak derivative

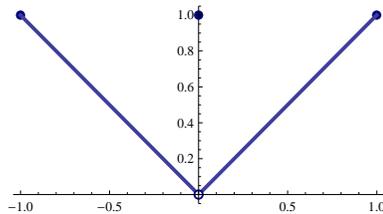
1.  $f_1(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{für } x \in [-1, 0], \\ x & \text{für } x \in (0, 1], \end{cases}$



2.  $f_2(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \in [-1, 0], \\ x & \text{für } x \in (0, 1], \end{cases}$



3.  $f_3(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x \in [-1, 0), \\ 1 & \text{für } x = 0, \\ x & \text{für } x \in (0, 1], \end{cases}$



Zu 1. Weil eine klassische Ableitung immer f.ü. mit der schwachen Ableitung übereinstimmt auf den Gebieten, in denen die klassische Ableitung existiert, kann man raten, dass

wenn  $v_1$  die schwache Ableitung ist, f.ü. gelten muss, dass

$$v_1(x) = f_1'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in (-1, 0), \\ 1 & \text{für } x \in (0, 1). \end{cases}$$

In  $\{-1, 0, 1\}$  kann man  $v$  beliebig lassen, weil die drei Punkte eine Nullmenge bilden. Ist  $v_1(x) = \operatorname{sgn}(x)$  die Ableitung? Wir testen:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f_1 \varphi' dx &= \int_{-1}^0 -x \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx \\ &= [-x \varphi(x)]_{-1}^0 + [x \varphi(x)]_0^1 \\ &\quad - \int_{-1}^0 -\varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= -0 \varphi(0) - 0 \varphi(0) - \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Wir haben unterwegs verwendet, dass  $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ . Die Antwort für  $f_1$  ist also:

Auf  $(-1, 1)$  ist  $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)$  die schwache Ableitung von  $x \mapsto |x|$ .

Zu 2. Ebenso hat man

$$v_2(x) = f_2'(x) = 1 \text{ f.ü. für } x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

als Kandidaten für die schwache Ableitung von  $f_2$ . Wenn

wir diese Vermutung testen, finden wir jedoch

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f_2 \varphi' dx &= \int_{-1}^0 (x+1) \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx \\ &= [(x+1) \varphi(x)]_{-1}^0 + [x \varphi(x)]_0^1 \\ &\quad - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx \\ &= \varphi(0) - \int_{-1}^1 1 \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Für  $\varphi(0) \neq 0$  passt die Ableitung nicht. Auf  $(-1, 1)$  hat  $f_2$  also keine schwache Ableitung.

Zu 3. Weil  $f_1 = f_3$  auf  $[-1, 1]$  f.ü. gilt, ist  $v_1$  auch die schwache Ableitung von  $f_3$  auf  $(-1, 1)$ .

**Beispiel 6.1.4** Betrachten wir die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x) = \log(|x|^2)$  für  $x \neq 0$ . Diese Funktion liegt in  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ , denn

$$\int_{|x| < M} \log(|x|^2) dx = 2\pi \int_{r=0}^M \log(r^2) r dr < \infty.$$

Hat diese Funktion schwache Ableitungen? Wir behaupten, dass  $v_1(x) = \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2}$  die schwache Ableitung nach  $x_1$  und dass  $v_2(x) = \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2}$  die schwache Ableitung nach  $x_2$  ist. Nehme

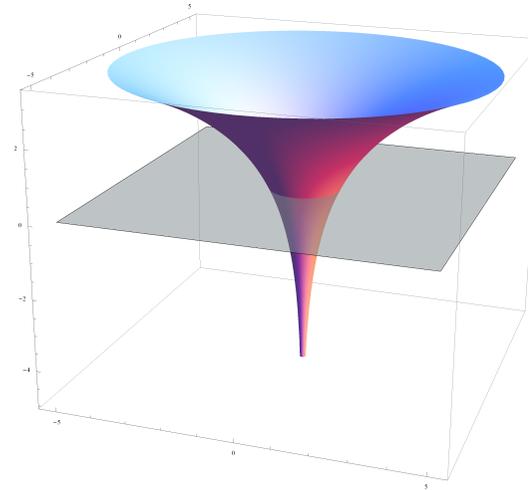


Abbildung 6.1: Darstellung der Funktion  $x \mapsto \log(|x|^2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Trotz Singularität schwach differenzierbar.

$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  mit kompaktem Träger  $\Omega$  und man findet

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \log(|x|^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} \log(|x|^2) \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \log(|x|^2) \varphi(x) \frac{-x_1}{|x|} d\sigma \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \log(|x|^2) \right) \varphi(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \log(\varepsilon^2) \mathcal{O}(1) d\sigma - \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} v_1(x) \varphi(x) dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left( 2\pi \log(\varepsilon^2) \mathcal{O}(\varepsilon) d\sigma - \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} v_1(x) \varphi(x) dx \right) \\ &= - \int_{\Omega} v_1(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^2} v_1(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Ähnlich ist auch  $v_2$  die schwache Ableitung nach  $x_2$  von  $f$ .

Wir haben hier verwendet, dass, wenn eine Funktion integrierbar ist auf  $\Omega$ , das folgende gilt:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(w)} f(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

**Aufgabe 6.1** Die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert auf folgende Art:  $g(0) = 0$  und  $g(1) = 1$ . Das Intervall  $[0, 1]$  wird in drei gleich große Teile geteilt und auf das mittlere Stück setzen wir  $g$  halbwegs an:  $g(x) = \frac{1}{2}$  für  $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ . Die restlichen Intervalle teilen wir wieder in drei Teile und machen das gleiche:  $g(x) = \frac{1}{4}$  für  $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$  und  $g(x) = \frac{3}{4}$  für  $x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ . Wieder werden die restlichen Intervalle in drei Teile geteilt und  $g(x) = \frac{1}{8}$  für  $x \in [\frac{1}{27}, \frac{2}{27}]$ ,  $g(x) = \frac{3}{8}$  für  $x \in [\frac{4}{27}, \frac{5}{27}]$  und so weiter. Damit wird  $g$  auf eine dichte Menge  $M \subset [0, 1]$  definiert und für die restlichen  $x$  setzen wir  $g(x) = \inf \{g(t); x < t \in M\}$ .

Zeigen Sie, dass:

1. Für  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$  mit  $a_k \in \{0, 1, 2\}$  gilt  $g(x) = \sum_{k=1}^{\min\{\ell; a_\ell=1\}} \frac{\min(1, a_k)}{2^k}$ .

2.  $g$  stetig ist;

3.  $g'(x) = 0$  f.ü.;

4.  $g$  keine schwache Ableitung auf  $(0, 1)$  hat.

Übrigens hat  $g$  schon eine schwache Ableitung auf  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ,  $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$  usw.

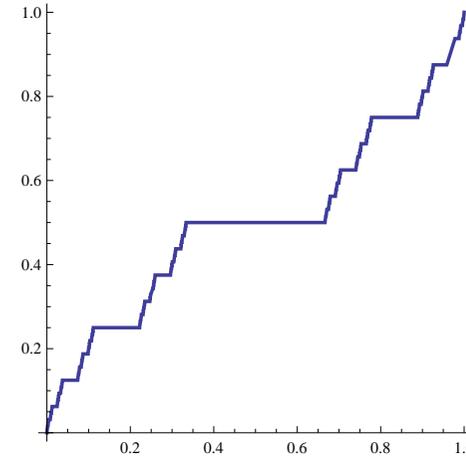


Abbildung 6.2: Die monotone stetige Funktion aus Aufgabe 6.1 ohne schwache Ableitung

**Aufgabe 6.2** Betrachte  $f_s(x) = |x|^s$  auf  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  mit  $s \in \mathbb{R}$ . Für welche  $s$  und  $n$  hat  $f_s$  eine schwache Ableitung? Für welche  $s$  und  $n$  existiert  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_s$  im schwachen Sinne?

**Aufgabe 6.3** Zeigen Sie, dass für schwache Ableitungen von  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$  folgendes gilt:

1.  $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} u$ .

Das heißt, angenommen die rechte (oder linke) Seite in dieser Gleichung ist wohldefiniert, dann zeige, dass auch die linke (rechte) Seite wohldefiniert ist und dass die beiden Seiten fast überall identisch sind.

2.  $\frac{\partial}{\partial x_i} (c_1 u + c_2 v) = c_1 \frac{\partial}{\partial x_i} u + c_2 \frac{\partial}{\partial x_i} v$  für  $c_i \in \mathbb{R}$ ;

3.  $\frac{\partial}{\partial x_i} (\psi v) = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \psi \right) v + \psi \left( \frac{\partial}{\partial x_i} v \right)$  für  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

## 6.2 Definition der Sobolev-Räume

In der nächsten Definition ist  $\alpha$  wieder ein Multiindex wie auf Seite 8.

**Definition 6.2.1** Sei  $p \in [1, \infty]$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Der **Sobolev-Raum**  $W^{k,p}(\Omega)$  ist der Vektorraum aller Funktionen  $u \in L^p(\Omega)$  so, dass für alle  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq k$ :

1. die Ableitung  $D^\alpha u$  im schwachen Sinne existiert, und
2.  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ .

Eine Norm für  $W^{k,p}(\Omega)$  ist definiert durch

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (6.3)$$

Ab jetzt werden wir kurzerhand  $W^{k,p}(\Omega)$  für den Raum  $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$  schreiben. Einige Ergebnisse für  $W^{k,p}(\Omega)$ , die wir nicht beweisen, sind:

**Theorem 6.2.2** Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ .

1.  $W^{k,p}(\Omega)$  für  $p \in [1, \infty]$  ist ein Banachraum.
2.  $W^{k,p}(\Omega)$  für  $p \in [1, \infty)$  ist **separabel** (= hat eine abzählbare dichte Teilmenge).
3.  $W^{k,p}(\Omega)$  für  $p \in (1, \infty)$  ist reflexiv.

4.  $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$  mit Skalarprodukt  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle_k$ , definiert durch

$$\langle \langle u, v \rangle \rangle_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx,$$

ist sogar ein Hilbertraum.

**Bemerkung 6.2.3** Für  $p < \infty$  sind

1.  $\sup_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$ ,
2.  $\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$
3.  $\left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$

zu (6.3) äquivalente Normen; ebenso sind

$$\sup_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{und} \quad \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

äquivalent für  $p = \infty$ .

Dann werden wir auch noch Sobolev-Räume brauchen, die nur die Funktionen enthalten, die auf dem Rand des Gebietes  $\Omega$  Null werden. Weil  $u$  und  $\tilde{u}$ , definiert durch

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega \\ 0 & \text{für } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

(weil das  $n$ -dimensionale Lebesgue Maß von  $\partial\Omega$  bei netten Rändern gleich 0 ist) sich nicht unterscheiden lassen, kann man nicht einfach  $u|_{\partial\Omega} = 0$  setzen. Ein Weg, der dieses Problem umgeht, ist folgender:

**Definition 6.2.4** Der Sobolev-Raum  $W_0^{k,p}(\Omega)$  ist definiert durch

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}},$$

das heißt,  $W_0^{k,p}(\Omega)$  ist der Abschluss von  $C_c^\infty(\Omega)$  in der  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ -Norm.

**Bemerkung 6.2.5** Weil  $C_c^\infty(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$  gilt und weil  $W^{k,p}(\Omega)$  ein Banach-Raum ist, folgt

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}} \subset \overline{W^{k,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}} = W^{k,p}(\Omega)$$

und auch, dass  $W_0^{k,p}(\Omega)$  mit  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$  als Norm ein Banach-Raum ist.

**Bemerkung 6.2.6** Für Funktionen  $u \in W_0^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$  kann man zeigen, dass  $D^\alpha u = 0$  gilt auf  $\partial\Omega$  für  $|\alpha| < k$ . Es gilt jedoch nicht, dass  $D^\alpha u = 0$  auf  $\partial\Omega$  für  $|\alpha| = k$ . Also

$$\begin{aligned} W_0^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega}) &\subset C_0^{k-1}(\bar{\Omega}), \\ W_0^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega}) &\not\subset C_0^k(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

### 6.2.1 Weitere Überlegungen zu $W^{k,p}(\Omega)$

Hätte man auch  $W^{k,p}(\Omega)$  definieren können durch

$$\overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}} \text{ oder } \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}} ?$$

Wenn man  $C^\infty(\Omega)$  betrachtet, sieht man sofort, dass die Funktionen, die man dann hat, am Rand zu wild werden können. Betrachte zum Beispiel  $x \mapsto x^{-28}$  auf  $\Omega = (0, 1)$ . Wenn man jedoch  $C^\infty(\bar{\Omega})$  nimmt, werden diese Funktionen zu zahm sein, wenn das Gebiet zu wild ist.

Abbildung 6.3: Gebiet mit Spitze:

In einem Gebiet mit einer Spitze ist eine Funktion aus  $W^{k,p}(\Omega)$  nicht unbedingt mit Funktionen aus  $C^\infty(\bar{\Omega})$  zu approximieren.

Sagen kann man trotzdem etwas. Ein Resultat von Meyers und Serrin<sup>2</sup> aus dem Jahr 1964 besagt, dass für  $p \in [1, \infty)$  gilt

$$W^{k,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Nur wenn der Rand des Gebietes zusätzliche Bedingungen erfüllt ( $\partial\Omega \in C^{0,1}$ ) hat man

$$W^{k,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Genauer zu dieser Art von Fragen findet man im Buch von Adams und Fournier [1].

<sup>2</sup>Vor dem Jahr 1964 betrachtete man neben  $W^{k,p}(\Omega)$  auch den Raum  $H^{k,p}(\Omega)$ , definiert durch

$$H^{k,p}(\Omega) := \overline{C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

Titel der Arbeit von Meyers und Serrin ist „ $H = W$ “ und auch das Theorem lautet „ $H \equiv W$ “. Die Arbeit findet man unter:

<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC300210/pdf/pnas00180-0073.pdf>

**Aufgabe 6.4** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und  $1 \leq p < q \leq \infty$ . Dann hat man

$$C^1(\bar{\Omega}) \underset{(\neq)}{\subset} W^{1,q}(\Omega) \underset{(\neq)}{\subset} W^{1,p}(\Omega) \underset{(\neq)}{\subset} L^p(\Omega),$$

nicht nur als Menge, sondern sogar auch als stetige Einbettung. Zeige dies.

Wir werden noch zurückkommen auf die Verbindungen zwischen  $C^k(\bar{\Omega})$  und  $W^{\ell,p}(\Omega)$ . Ein einfaches Ergebnis geben wir mal voraus.

**Lemma 6.2.7** Sei  $p > 1$  und  $u \in W^{1,p}(a,b)$ . Dann gibt es  $\tilde{u} \in C[a,b]$  derartig, dass  $u = \tilde{u}$  f.ü.

**Beweis.** Nehme  $c \in (a,b)$ . Weil  $u' \in L^p(a,b) \subset L^1(a,b)$  gilt, ist

$$v(x) = \int_c^x u'(s) ds$$

wohldefiniert. Wir finden  $v \in C[a,b]$ , denn

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| &= \left| \int_y^x u'(s) ds \right| \\ &\leq \left| \int_y^x |u'(s)|^p ds \right|^{\frac{1}{p}} \left| \int_y^x 1 ds \right|^{\frac{1}{q}} \leq |x - y|^{\frac{1}{q}} \|u'\|_{L^p(a,b)}. \end{aligned}$$

Außerdem haben wir für  $\varphi \in C_c^\infty(a,b)$ , dass

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi'(x) v(x) dx &= \int_a^b \varphi'(x) \left( \int_c^x u'(s) ds \right) dx \\ &= \int_a^b \int_c^x \varphi'(x) u'(s) ds dx \\ &= - \int_a^c \int_x^c \varphi'(x) u'(s) ds dx + \int_c^b \int_c^x \varphi'(x) u'(s) ds dx \quad (6.4) \end{aligned}$$

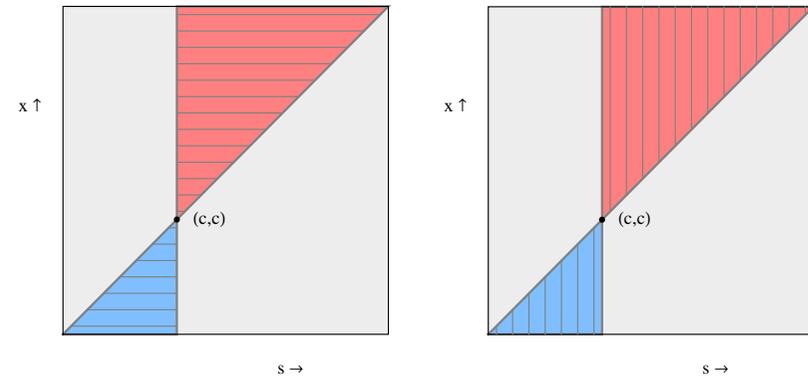


Abbildung 6.4: Links: erst  $s$  zwischen  $c$  und  $x$ . Rechts: erst  $x$  von  $a$  nach  $s$  (blau) bzw. von  $s$  nach  $b$  (rot).

und ändert man die Integrationsfolge, siehe Abbildung 6.4, so folgt mit  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ , dass

$$\begin{aligned} (6.4) &= - \int_a^c \int_a^s \varphi'(x) u'(s) dx ds + \int_c^b \int_s^b \varphi'(x) u'(s) dx ds \\ &= - \int_a^c \left( \int_a^s \varphi'(x) dx \right) u'(s) ds \\ &\quad + \int_c^b \left( \int_s^b \varphi'(x) dx \right) u'(s) ds \\ &= - \int_a^c \varphi(s) u'(s) ds - \int_c^b \varphi(s) u'(s) ds \\ &= - \int_a^b \varphi(s) u'(s) ds. \end{aligned}$$

Also ist  $v$  schwach differenzierbar und es gilt

$$\int_a^b \varphi'(x) v(x) dx = - \int_a^b \varphi(x) u'(x) dx = \int_a^b \varphi(x) u(x) dx.$$

Es folgt, dass

$$\int_a^b \varphi'(s) (v(s) - u(s)) ds = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_0^\infty(a, b).$$

Mit Hilfe von Lemma 2.5.1, modifiziert wie in Lemma 6.4.1, folgt, dass es  $\gamma \in \mathbb{R}$  gibt derartig, dass  $v(x) - u(x) = \gamma$  f.ü. Also nimmt man  $\tilde{u} = v - \gamma$ . ■

## 6.3 Approximationen

Die Räume  $W_0^{k,p}(\Omega)$  haben wir definiert als Funktionenräume von Grenzwerten bezüglich der  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ -Norm von Funktionen aus  $C_c^\infty(\Omega)$ . Das bedeutet, dass wenn wir zeigen möchten, dass  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$  gilt, wir eine Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$  finden müssen, die  $u$  approximiert. Anders gesagt, wir müssen einen Weg in umgekehrter Richtung finden. Eine Möglichkeit, eine approximierende Folge zu finden, gibt uns der Friedrichs'sche Glätter aus Definition 4.3.10.

### 6.3.1 Konvolution, Faltung

Die Funktion  $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  hat man definiert durch

$$\varphi_1(x) = c_n \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & \text{für } x \in B_1(0), \\ 0 & \text{für } x \notin B_1(0). \end{cases} \quad (6.5)$$

Die Konstante ist so gewählt, dass  $\int_{B_1(0)} \varphi_1(x) dx = 1$  und man skaliert für  $\varepsilon \in (0, 1)$ , um  $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit Träger  $\overline{B_\varepsilon(0)}$  zu bekommen:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi_1(\varepsilon^{-1}x).$$

**Definition 6.3.1** Die **Konvolution** oder **Faltung** von  $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  und  $u \in C_c(\mathbb{R}^n)$  wird definiert durch

$$(v * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(x-y) u(y) dy. \quad (6.6)$$

**Bemerkung 6.3.2** Wenn das Integral in (6.6) wohldefiniert ist, folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x-y) u(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) v(y) dy.$$

**Bemerkung 6.3.3** Die Konvolution kann man auch definieren für zum Beispiel  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  und  $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , wenn  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Man kann leicht zwei Funktionen finden, die sich nicht konvolvieren lassen:  $u(x) = v(x) = 1$ .

**Bemerkung 6.3.4** Man definiert  $\varphi_\varepsilon * u$  auch für Funktionen  $u \in L^1(\Omega)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , indem man  $u$  außerhalb  $\Omega$  fortsetzt durch 0:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \quad (6.7)$$

und findet so

$$\begin{aligned} (\varphi_\varepsilon * u)(x) &:= (\varphi_\varepsilon * \bar{u})(x) = \\ &\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) \bar{u}(y) dy = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x-y) u(y) dy. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Diese letzte Formel ist sogar wohldefiniert für  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , wenn  $x \in \Omega_\varepsilon$ . Die Menge  $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$  wird definiert durch:

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega; d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}. \quad (6.9)$$

Hier ist

$$d(x, A) = \inf \{|x - a|; a \in A\}, \quad (6.10)$$

die Distanz von  $x$  zu  $A$ .

Wenn  $\Omega$  eine Zwiebel wäre, dann wäre bei  $\Omega_\varepsilon$  eine  $\varepsilon$ -dicke Schicht entfernt.

### 6.3.2 Approximieren mit Friedrichs

Wir werden die Approximationen von  $u$  durch  $(\varphi_\varepsilon * u)$  betrachten.

Wir haben schon gesehen, dass  $u \in C(\mathbb{R}^n)$  auf kompakte Teilmengen, gleichmäßig durch  $u_k = \varphi_{1/k} * u$  approximiert wird:

$$\begin{aligned} \|u - u_k\|_{C(K)} &= \sup_{x \in K} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{1/k}(x-y) u(y) dy - u(x) \right| \\ &= \sup_{x \in K} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{1/k}(x-y) u(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{1/k}(x-y) dy u(x) \right| \\ &= \sup_{x \in K} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{1/k}(x-y) (u(y) - u(x)) dy \right| \\ &= \sup_{x \in K} \left| \int_{B_{1/k}(x)} \varphi_{1/k}(x-y) (u(y) - u(x)) dy \right|. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Weil  $u$  gleichmäßig stetig ist auf  $K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, K) \leq 1\}$ , gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta_\varepsilon > 0$  so, dass für alle  $x, y \in K_1$  mit  $|x - y| < \delta_\varepsilon$  folgt, dass  $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$ . Also, sei  $\varepsilon > 0$ , dann nimmt man  $k > \delta_\varepsilon^{-1}$  und findet aus (6.11), dass

$$\|u - u_k\|_{C(K)} < \sup_{x \in K} \int_{B_{1/k}(x)} |\varphi_{1/k}(x-y)| \varepsilon dy = \varepsilon.$$

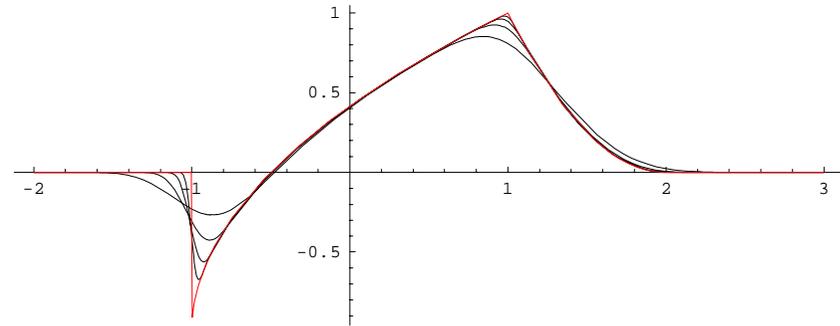


Abbildung 6.5: Glättungsfunktionen mit verschiedenen  $\varepsilon$  loggelassen auf eine Funktion mit sowohl Sprünge in  $u$ ,  $u'$  als auch  $u''$ .

Auch nicht-stetige Funktionen  $u$  werden durch  $\varphi_\varepsilon * u$  approximiert, wenn  $\varepsilon \downarrow 0$ .

**Theorem 6.3.5** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ . Folgendes gilt:

1. Für  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\varphi_\varepsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .
2. Für  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  und  $\varepsilon < \delta$  gilt  $(\varphi_\varepsilon * u)|_{\overline{\Omega_\delta}} \in C^\infty(\overline{\Omega_\delta})$  mit  $\Omega_\delta$  definiert in (6.9).
3. Für  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  mit  $u = 0$  f.ü. in  $\Omega \setminus \Omega_\delta$  und  $\varepsilon < \delta$  gilt  $\varphi_\varepsilon * u \in C^\infty_c(\Omega)$ .
4. Für  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  gilt  $\varphi_\varepsilon * u \rightarrow u$  f.ü.
5. Für  $u \in L^p(\Omega)$  und  $p \in [1, \infty)$  gilt

$$\|\varphi_\varepsilon * u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|\varphi_\varepsilon * u - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

**Aufgabe 6.5** Zeige, dass  $C^1[0, 1] \cap C_0[0, 1] \subset W_0^{1,p}(0, 1)$  für alle  $p \in [1, \infty)$ .

**Beweis von Theorem 6.3.5.** Wir setzen  $u_\varepsilon := \varphi_\varepsilon * u$ .

1. Für die Ableitung in  $e_i$ -Richtung betrachten wir

$$\frac{u_\varepsilon(x + \tau e_i) - u_\varepsilon(x)}{\tau} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi_\varepsilon(x - y + \tau e_i) - \varphi_\varepsilon(x - y)}{\tau} u(y) dy$$

und der Limes für  $\tau \rightarrow 0$  existiert, weil

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varphi_\varepsilon(x - y + \tau e_i) - \varphi_\varepsilon(x - y)}{\tau}$$

gleichmäßig konvergiert.

2. Definiere für  $s > 0$

$$v_s(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega_s, \\ 0 & \text{für } x \notin \Omega_s. \end{cases}$$

Für  $s > 0$  folgt  $v_s \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  und mit 1., dass  $\varphi_\varepsilon * v_s \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Wenn  $\varepsilon < \delta$  findet man

$$\varphi_\varepsilon * v_{\delta-\varepsilon}(x) = \varphi_\varepsilon * u(x) \text{ auf } \Omega_\delta.$$

3. Setze  $\rho = d(\partial\Omega, \text{support}(u))$  und man findet, dass  $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_{\rho-\varepsilon})$  für  $\varepsilon < \rho$ . Außerdem hat man  $\text{support} u_\varepsilon \subset \text{support} u + B_\varepsilon(0) \subset \Omega$ .

4. Für diese Eigenschaft des Lebesgue-Integrals siehe [3, Theorem 4.22].

5. Für  $p = 1$  gilt mit Hilfe des Satzes von Fubini-Tonelli und  $\bar{u}$  in (6.7)

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon * u\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y) \bar{u}(y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y) |\bar{u}(y)| dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x - y) dx |\bar{u}(y)| dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y) dx |\bar{u}(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\bar{u}(y)| dy = \int_{\Omega} |u(y)| dy = \|u\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für  $p \in (1, \infty)$  gilt mit Hilfe der Hölder-Ungleichung und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dass

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon * u\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y) \bar{u}(y) dy \right|^p dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y)^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} |\bar{u}(y)| dy \right)^p dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y) dy \right)^{p/q} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y) |\bar{u}(y)|^p dy \right) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x - y) |\bar{u}(y)|^p dy \right) dx \\ &= \|\varphi_\varepsilon * |u|^p\|_{L^1(\Omega)} \leq \| |u|^p \|_{L^1(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass  $\varphi_\varepsilon * u \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega)$  verwendet man, dass  $C_c(\bar{\Omega})$  dicht in  $L^p(\Omega)$  liegt. Das heißt, für jedes  $u \in$

$L^p(\Omega)$  und  $\delta > 0$  existiert  $v \in C_c(\overline{\Omega})$  mit

$$\|u - v\|_{L^p(\Omega)} < \delta.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} & \|\varphi_\varepsilon * u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ & \|\varphi_\varepsilon * u - \varphi_\varepsilon * v\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi_\varepsilon * v - v\|_{L^p(\Omega)} + \|v - u\|_{L^p(\Omega)} \\ & \leq 2\|v - u\|_{L^p(\Omega)} + \|\varphi_\varepsilon * v - v\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Weil der Träger von  $v$  beschränkt ist, ist auch der Träger von  $\varphi_\varepsilon * v$  für alle  $\varepsilon < 1$  gleichmäßig beschränkt, denn

$$\begin{aligned} \text{support}(\varphi_\varepsilon * v) & \subset \text{support}(v) + \overline{B_\varepsilon(0)} \\ & \subset \text{support}(v) + \overline{B_1(0)} \end{aligned}$$

mit  $A+B = \{x+y; x \in A \text{ und } y \in B\}$ . Es gibt  $K$  derart, dass

$$\text{support}(\varphi_\varepsilon * v) \subset K \text{ für alle } \varepsilon > 0$$

$$|K| = \int_K 1 dx < \infty.$$

Dann folgt

$$\|\varphi_\varepsilon * v - v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\varphi_\varepsilon * v - v\|_{L^\infty(\Omega)} |K|^{1/p} \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0.$$

Insbesondere kann man dafür sorgen, dass dies kleiner  $\delta$  wird, und so findet man

$$\|\varphi_\varepsilon * u - u\|_{L^p(\Omega)} \leq 3\delta.$$

Da  $\delta > 0$  beliebig ist, folgt  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|\varphi_\varepsilon * u - u\|_{L^p(\Omega)} = 0$ .

**Aufgabe 6.6** Sei  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  schwach differenzierbar. Zeigen Sie folgendes:

1. Für  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$  mit  $\psi'$  gleichmäßig beschränkt ist  $\psi(u)$  schwach differenzierbar und gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi(u)) = \psi'(u) \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

2. Sei  $H$  die Heaviside Funktion:

$$H(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u > 0, \\ 0 & \text{für } u \leq 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Dann ist  $H(u)u$  schwach differenzierbar und gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(H(u)u) = H(u) \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

## 6.4 Nochmals das erste Hauptlemma

Schlussendlich geben wir noch eine stärkere Fassung von Lemma 2.2.1, dem Hauptlemma der Variationsrechnung:

**Lemma 6.4.1 (Hauptlemma der Variationsrechnung)** Wenn  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  und es gilt

$$\int_{\Omega} f \varphi \, dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

dann hat man  $f = 0$  f.ü.

**Beweis.** Sei  $\varphi_\varepsilon$  der Friedrichs'sche Glätter und nehme  $K \subset \Omega$  kompakt. Dann gibt es  $\varepsilon_0 > 0$  derart, dass

$$K_{\varepsilon_0} := \bigcup \{B_{\varepsilon_0}(x); x \in K\} \subset \Omega$$

und folgt für  $\varphi \in C_c^\infty(K^\circ)$ , dass  $\varphi_\varepsilon * \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  für alle  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Also gilt

$$\int_{\Omega} f (\varphi_\varepsilon * \varphi) dx = 0 \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(K^\circ).$$

Weil  $\varphi_\varepsilon * f \in C(K)$  und für alle  $\varphi \in C_c^\infty(K^\circ)$  gilt

$$\int_{K^\circ} (\varphi_\varepsilon * f) \varphi dx = \int_{\Omega} f (\varphi_\varepsilon * \varphi) dx = 0$$

folgt, dass  $\varphi_\varepsilon * f = 0$  auf  $K$ . Mit Theorem 6.3.5.5 folgt, dass  $f = 0$  f.ü. auf  $K$ . Weil dies für beliebige kompakte Mengen  $K \subset \Omega$  gilt, folgt  $f = 0$  f.ü. auf  $\Omega$ . ■

## Lineare Probleme und schwache Lösungen

Der einfachste Typ von Funktionalen, die ein Minimum haben können, sind quadratische Funktionale mit passendem Vorzeichen bei den Termen zweiter Ordnung. Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ . Ein einfaches Beispiel mit  $c \in C(\bar{\Omega})$  und  $f \in L^2(\Omega)$  ist

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} c(x) u(x)^2 - f(x) u(x) \right) dx.$$

Wenn man ein Minimum von  $J$  in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  sucht, dann bekommt man die (schwache Form der) Euler-Lagrange-Gleichung

$$0 = \partial J(u; v) = \int_{\Omega} (\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + c(x) u(x) v(x) - f(x) v(x)) dx \quad (7.1)$$

für alle  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Wenn  $u$  so ist, dass eine partielle Integration erlaubt ist, findet man, dass die zugehörige Differentialgleichung linear ist:

$$-\Delta u(x) + c(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega.$$

In diesem Kapitel werden wir sehen, wie man für lineare Probleme wie (7.1) eine Lösung finden kann in einem schwachen Sinn.

### 7.1 Hilbert-Räume

Die Sobolev-Räume  $W^{k,2}(\Omega)$  und  $W_0^{k,2}(\Omega)$  sind auch Hilbert-Räume mit dem Skalarprodukt

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_{W^{k,2}(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} u(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} v(x) dx.$$

Auf relativ einfache Art kann man im Hilbert-Raum oft die Existenz einer Lösung für eine lineare Differentialgleichung bekommen mit funktionalanalytischen Methoden. Das wichtigste Ergebnis ist der folgende Satz:

**Theorem 7.1.1 Darstellungssatz von Riesz-Fréchet für Hilbert-Räume** Sei  $H$  ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und sei  $F \in H'$ . Dann gibt es genau ein  $u \in H$  derart, dass

$$F(v) = \langle u, v \rangle \text{ für alle } v \in H.$$

Für einen Beweis verweisen wir auf [3, Theorem 5.5].

**Beispiel 7.1.2** Sei  $f \in L^2(\Omega)$  gegeben und nehme an, man sucht  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  derart, dass für alle  $v \in W^{1,2}(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u v) dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (7.2)$$

Wir bemerken, dass das Skalarprodukt auf  $W^{1,2}(\Omega)$  definiert ist durch

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u v) dx.$$

Weil

$$\left| \int_{\Omega} f v dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

ist die lineare Abbildung  $v \mapsto \int_{\Omega} f v dx$  beschränkt und deshalb stetig, das heißt

$$\left( v \mapsto \int_{\Omega} f v dx \right) \in (W^{1,2}(\Omega))'.$$

Dann folgt aus dem Satz von Riesz, dass es genau ein  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  gibt mit  $\langle\langle u, v \rangle\rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_{\Omega} f v dx$ . Dieses  $u$  erfüllt die Euler-Lagrange Gleichung.

Wenn man partiell integrieren könnte, würde aus (7.2) folgen, dass für alle  $v \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u - f) v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = 0$$

und der Hauptsatz der Variationsrechnung liefert in zwei Schritten, erst auf  $\Omega$  und dann auf  $\partial\Omega$ , dass

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.3)$$

Für diese partielle Integration benötigt es jedoch mehr Regularität der Funktion  $u$  als wir bis jetzt haben. Deshalb betrachtet man einen schwächeren Typ von Lösungen.

## 7.2 Schwache Lösungen

Sei  $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $c \in C(\bar{\Omega})$  und  $f \in L^2(\Omega)$ . Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) + c(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega, \\ u(x) = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.4)$$

**Definition 7.2.1** Eine Funktion  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  nennt man eine **schwache Lösung** von (7.4), wenn für alle  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) + c(x) u(x) v(x) \right) dx \\ = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \end{aligned} \quad (7.5)$$

**Bemerkung 7.2.2** In (7.5) findet man die Euler-Lagrange Gleichung zum Minimierungsproblem für das Funktional  $J$ :

$W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$J(u) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} c(x) u(x)^2 - f(x) u(x) \right) dx.$$

**Bemerkung 7.2.3** In (7.5) kann man sogar  $a_{ij} \in C(\bar{\Omega})$  statt  $C^1(\bar{\Omega})$  zulassen. Die starke Formulierung in (7.4) wird fragwürdig für solche  $a_{ij}$ .

Die Definition einer schwachen Lösung hängt sehr direkt ab von der Gleichung. Im nächsten Abschnitt zeigen wir noch einige Beispiele. Es ist relativ technisch und nur mäßig interessant.

### 7.2.1 Mehr schwache Lösungen

Auf ähnliche Art kann man auch das Randwertproblem

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + c(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega, \\ \sum_{i,j=1}^n \nu_i a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.6)$$

betrachten.

**Definition 7.2.4** Eine Funktion  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  nennt man eine schwache Lösung von (7.6), wenn für alle  $v \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} + c(x) u(x) v(x) \right) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (7.7)$$

**Aufgabe 7.1** Zeigen Sie, dass eine Funktion  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , die eine schwache Lösung von (7.6) ist, auch eine klassische Lösung von (7.6) ist.

**Aufgabe 7.2** Wie würde man eine schwache Lösung definieren bei den folgenden Randwertproblemen?

1. Für  $a_{ij}, b_j \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $c \in C(\bar{\Omega})$  und  $f \in L^2(\Omega)$ :

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega, \\ u(x) = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

2. Für  $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $c \in C(\bar{\Omega})$  und  $f \in L^2(\Omega)$ :

$$\begin{cases} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x) u(x) = f(x) \text{ in } \Omega, \\ u(x) = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Das Energiefunktional für die Auslenkung einer dünnen Platte mit Projektion  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  in (3.12), nämlich

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (\Delta u)^2 + (1 - \sigma) (u_{xy}^2 - u_{xx} u_{yy}) + f u \right) dx dy \quad (7.8)$$

führt, wenn diese Platte eingespannt ist, zum Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) + f(x) = 0 \text{ in } \Omega, \\ u(x) = |\nabla u(x)| = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.9)$$

Wenn man vom Randwertproblem (7.9) ausgeht, bekommt man:

**Definition 7.2.5** Die Funktion  $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$  heißt eine schwache Lösung zu (7.9), wenn für alle  $v \in W_0^{2,2}(\Omega)$  gilt:

$$\int_{\Omega} (\Delta u \Delta v + f v) \, dx dy = 0. \tag{7.10}$$

Die Euler-Lagrange Gleichung zu (7.8) ist jedoch

$$\int_{\Omega} (\Delta u \Delta v + (1 - \sigma)(2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) + f v) \, dx dy \tag{7.11}$$

für alle  $v \in W_0^{2,2}(\Omega)$ . Obwohl (7.10) und (7.11) nicht gleich sind, kann man zeigen, dass bei diesen Randbedingungen, beide Integralgleichungen äquivalent sind. Es gilt nämlich für  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{xy} \varphi_{xy} \, dx dy &= \int_{\Omega} u \varphi_{xxyy} \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} u_{xx} \varphi_{yy} \, dx dy = \int_{\Omega} u_{yy} \varphi_{xx} \, dx dy \end{aligned}$$

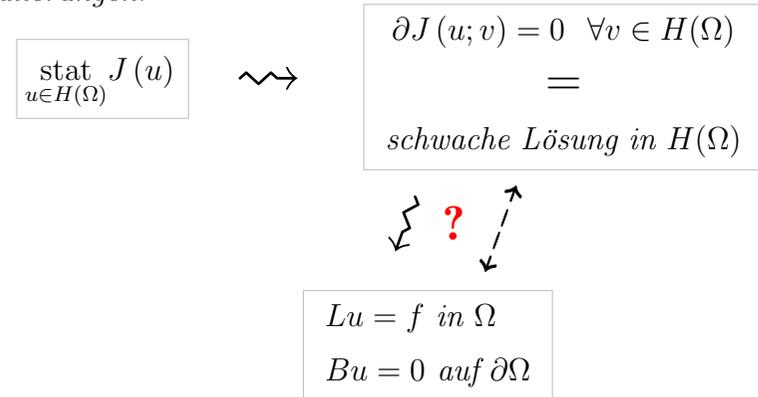
und weil  $W_0^{2,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{2,2}(\Omega)}}$  gilt, folgt für  $v \in W_0^{2,2}(\Omega)$ , dass

$$\int_{\Omega} (2u_{xy}v_{xy} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}) \, dx dy = 0.$$

Dies trifft nicht zu für andere Randwertbedingungen. Es zwingt uns auch, einmal genau zu betrachten, wie  $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$  und dass punktweise „ $u(x) = |\nabla u(x)| = 0$  auf  $\partial\Omega$ “ zusammenhängen.

**Bemerkung 7.2.6** Wenn man einen stationären Punkt des Funktionals  $J$  sucht, ist die Euler-Lagrange Gleichung die

richtige Formulierung für eine schwache Lösung. Wenn man argumentieren kann, dass schwache Lösungen auch klassische Lösungen sind, dann findet man durch eine partielle Integration das Randwertproblem. Oft möchte man dem umgekehrten Weg folgen: Ein Randwertproblem mit einer linearen partiellen Differentialgleichung möchte man schwach lösen mit Hilfe des Satzes von Riesz. Die schwache Formulierung einer Lösung ist jedoch nicht immer eindeutig (wenn überhaupt) bestimmt durch ein Randwertproblem wie (7.9). Und schon gar nicht kann man jede partielle Differentialgleichung als Euler-Lagrange Gleichung bekommen. Für lineare Differentialgleichungen (und quadratische Funktionale) führt dies zu der folgenden Darstellung der Zusammenhänge der drei Problemformulierungen:



### 7.3 Poincaré, Friedrichs und Wirtinger

Das Funktional

$$J(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla u(x)|^2 + c(x) u(x)^2 - f(x) u(x)) \, dx.$$

ist konvex, wenn  $c(x) \geq c_0 > 0$ , und hat dann also höchstens ein Minimum. Wir werden sehen, dass man diese Bedingung abschwächen kann, wenn man zum Beispiel Funktionen in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  betrachtet. Auf Seite 47 hatten wir dies schon angekündigt. Die Grundidee ist:

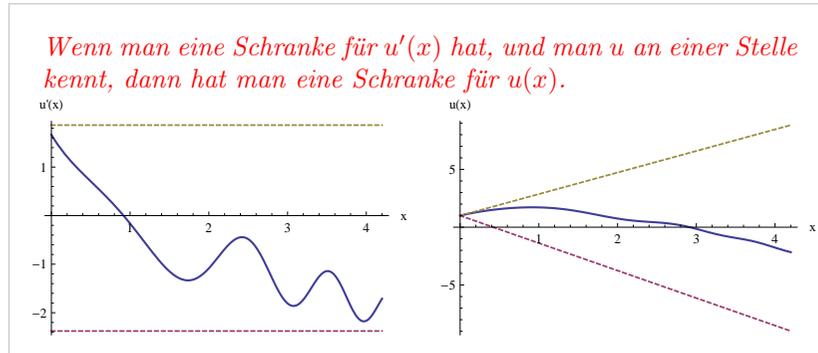


Abbildung 7.1: Schranken für  $u'$  und  $u(0)$  geben Schranken für  $u$ .

In umgekehrter Richtung kann man nichts machen:

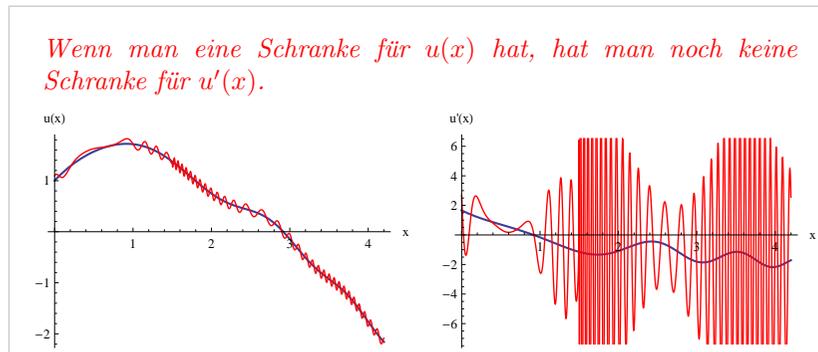


Abbildung 7.2: Schranken für  $u$  geben keine Schranken für  $u'$ .

Für differenzierbare Funktionen in einer Dimension, sagen wir  $u \in C^1[a, b]$ , findet man sofort, dass wenn

$$m \leq u'(x) \leq M \text{ für alle } x \in [a, b]$$

gilt, dann folgt, dass

$$u(a) + m(x - a) \leq u(x) \leq u(a) + M(x - a) \text{ für alle } x \in [a, b].$$

Verwendet man die Norm  $\|\cdot\|_{L^\infty(a,b)}$ , so findet man für  $u \in C^1[a, b]$ , dass

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} \leq |u(a)| + (b - a) \|u'\|_{L^\infty(a,b)}.$$

Für  $u \in C^1[a, b] \cap C_0[a, b]$  findet man sogar, dass

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} \leq \frac{1}{2} (b - a) \|u'\|_{L^\infty(a,b)}.$$

Derartige Ungleichungen gibt es auch für andere Normen.

**Lemma 7.3.1**

**(Poincaré-Friedrichs-Ungleichung für  $n = 1$  und  $p = 2$ )**

1. Für  $u \in W_0^{1,2}(a, b)$  gilt

$$\int_a^b u(x)^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b u'(x)^2 dx. \quad (7.12)$$

2. Für  $u \in W^{1,2}(a, b)$  gilt

$$\int_a^b (u(x) - \bar{u})^2 dx \leq 4 \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b u'(x)^2 dx, \quad (7.13)$$

mit  $\bar{u} = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) dx$ .

**Bemerkung 7.3.2** Übrigens ist  $\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2$  die kleinstmögliche Konstante für (7.12). Die Funktion  $u$ , definiert durch  $u(x) = \sin\left(\frac{x-a}{b-a}\pi\right)$ , ist in  $W_0^{1,2}(a,b)$  und liefert eine Gleichheit in (7.12).

**Bemerkung 7.3.3** Ungleichungen des ersten Typs werden oft nach Friedrichs benannt. Die des zweiten Typs nach Poincaré. Da sie jedoch sehr verwandt sind, ist es üblich diese Art Ungleichungen mit dem Namen der beiden zu benennen: die Poincaré-Friedrichs Ungleichungen.

**Beweis.** Die erste Behauptung zeigt man wie folgt: Durch Skalierung reicht es, wenn man zeigt, dass für  $u \in W_0^{1,2}(0,1)$  gilt

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 u'(x)^2 dx. \quad (7.14)$$

Weil  $W_0^{1,2}(0,1)$  als Vervollständigung von  $u \in C_c^\infty[0,1]$  definiert ist, reicht es wenn wir (7.14) für solche Funktionen zeigen. Für eine solche Funktion  $u$  hat man, dass  $x \mapsto \frac{u(x)}{\sin(\pi x)}$  und ihre erste Ableitung stetig auf  $[0,1]$  sind. Dann findet man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^1 \sin(\pi x)^2 \left( \left( \frac{u(x)}{\sin(\pi x)} \right)' \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 (\sin(\pi x))^2 \left( \frac{u'(x)}{\sin(\pi x)} - \pi \frac{u(x) \cos(\pi x)}{\sin(\pi x)^2} \right)^2 dx \\ &= \int_0^1 \left( u'(x)^2 - 2\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} u(x) u'(x) + \left( \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2 u(x)^2 \right) dx \end{aligned}$$

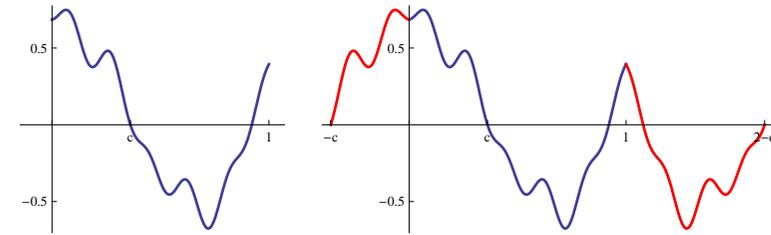


Abbildung 7.3: Darstellung der Erweiterung aus (7.15)

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left( u'(x)^2 - 2\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} u(x) u'(x) + \frac{\pi^2}{\sin(\pi x)^2} u(x)^2 - \pi^2 u(x)^2 \right) dx \\ &= - \left[ \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} u(x)^2 \right]_0^1 + \int_0^1 (u'(x)^2 - \pi^2 u(x)^2) dx \\ &= \int_0^1 u'(x)^2 dx - \pi^2 \int_0^1 u(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Für die zweite Behauptung reicht es auch, wenn wir die Ungleichung für  $u \in W^{1,2}(0,1)$  zeigen. Zusätzlich dürfen wir annehmen, dass  $\bar{u} = 0$ . Weil  $u \in C[0,1]$  gilt und wir  $\bar{u} = 0$  angenommen haben, gibt es  $c \in (0,1)$  mit  $u(c) = 0$ . Wir definieren anschließend die Funktion  $v : [-c, 2-c] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$v(x) := \begin{cases} u(-x) & \text{für } x \in [-c, 0), \\ u(x) & \text{für } x \in [0, 1], \\ u(2-x) & \text{für } x \in (1, 2-c]. \end{cases} \quad (7.15)$$

Es gilt  $v \in W_0^{1,2}(-c, 2-c)$ ,

$$\int_{-c}^{2-c} v(x)^2 dx = 2 \int_0^1 u(x)^2 dx$$

und

$$\int_{-c}^{2-c} v'(x)^2 dx = 2 \int_0^1 u'(x)^2 dx.$$

Das Ergebnis folgt, wenn man den ersten Teil anwendet auf  $v$ . ■

**Lemma 7.3.4 (Wirtinger)** Für  $u \in W^{1,2}(a,b)$  mit  $u(a) = u(b)$  und  $\int_a^b u(x) dx = 0$  gibt es  $C > 0$  so, dass

$$\int_a^b u(x)^2 dx \leq C \int_a^b u'(x)^2 dx.$$

**Beweis.** Dies ist ein Spezialfall von (7.12). ■

**Aufgabe 7.3** Nehmen wir an, es gibt ein  $u \in C^2[a,b]$ , das die Bedingungen von Lemma 7.3.4 erfüllt und das den minimalen Wert  $C$  liefert. Welchen Wert hat  $C$ ?

Ähnliche Ungleichungen findet man auch für den mehrdimensionalen Fall und sogar auch für andere Potenzen als 2.

**Theorem 7.3.5 (Poincaré-Friedrichs)** Nehme an, dass  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet ist und  $p \in [1, \infty)$ . Dann gibt es  $c_{p,\Omega}$  derart, dass für  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq c_{p,\Omega} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx.$$

**Beweis.** Sei  $a > 0$ . In einer Dimension hat man für  $u \in C^1[0,a]$  mit  $u(0) = 0$  folgendes: Erstens nehmen wir  $p \in$

$(1, \infty)$  und finden, dass für  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^x u'(s) ds \right| \leq \left( \int_0^x |u'(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^x 1 ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|u'\|_{L^p(0,a)} |x|^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (7.16)$$

und damit

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(0,a)} &= \left( \int_0^a |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u'\|_{L^p(0,a)} \left( \int_0^a |x|^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} a \|u'\|_{L^p(0,a)} \leq a \|u'\|_{L^p(0,a)}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Für  $p = 1$  können wir (7.16) ersetzen durch

$$|u(x)| = \left| \int_0^x u'(s) ds \right| \leq \|u'\|_{L^1(0,a)}$$

und (7.17) folgt ebenso. Weil  $C^1[0,a]$  dicht in  $W^{1,p}(0,a)$  liegt, findet man für alle  $u \in W^{1,p}(0,a) \cap C[0,a]$  mit  $u(0) = 0$ :

$$\|u\|_{L^p(0,a)} \leq a \|u'\|_{L^p(0,a)}$$

Bemerke, dass wegen  $W^{1,p}(0,a) \subset C[a,b]$ , das heißt, dass jedes  $u \in W^{1,p}(0,a)$  einen stetigen Vertreter hat, auch  $u(0) = 0$  einen Sinn macht für  $u \in W^{1,p}(0,a)$ .

Anschließend nehmen wir an, dass gilt

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_1 < a\}$$

Für  $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$  und jedes  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$  ist

$$x_1 \mapsto \bar{u}(x_1, \tilde{x}) := \begin{cases} u(x_1, \tilde{x}) & \text{für } x \in \Omega \\ 0 & \text{für } x \notin \Omega \end{cases}$$

eine  $W^{1,\infty}(0, a)$ -Funktion und

$$\|\bar{u}(\cdot, \tilde{x})\|_{L^p(0,a)} \leq a \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{u}(\cdot, \tilde{x}) \right\|_{L^p(0,a)}.$$

Mit dem Satz von Fubini-Tonelli finden wir

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)} &= \|\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \|\bar{u}(\cdot, \tilde{x})\|_{L^p(0,a)}^p d\tilde{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq a \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{u}(\cdot, \tilde{x}) \right\|_{L^p(0,a)}^p d\tilde{x} \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= a \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{u} \right\|_{L^p(\Omega)} = a \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} u \right\|_{L^p(\Omega)} \leq a \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Man schließt ab mit der Bemerkung, dass  $C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$  dicht in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  liegt. ■

## 7.4 Folgen der Ungleichungen von Poincaré Friedrichs und Wirtinger

**Theorem 7.4.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt,  $a_{ij}, c \in C(\bar{\Omega})$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  und

$$\begin{aligned} J(u) &= \\ &\int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x)^2 - f(x)u(x) \right) dx. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werden wir annehmen, dass  $a_{ij} = a_{ji}$ . Betrachte

$$\min_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u).$$

Sei  $C_P > 0$  so, dass  $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  und nehme an:

1. Die **Legendre-Hadamard-Bedingung** ist erfüllt:

Es gibt  $C_{LH} > 0$  so, dass für jede  $x \in \Omega$  und  $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq C_{LH} |\xi|^2.$$

2. Es gibt  $\varepsilon > 0$  so, dass

$$c(x) + C_{LH} C_P^{-1} \geq \varepsilon \text{ für alle } x \in \Omega.$$

Dann hat  $J$  genau ein Minimum  $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .

**Bemerkung 7.4.2** Wir brauchen also nicht unbedingt, dass  $c(x) \geq 0$ .

**Bemerkung 7.4.3** Wenn  $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ , dann ist die Legendre-Hadamard-Bedingung genau die Bedingung die besagt, dass die zugehörige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung elliptisch ist.

**Korollar 7.4.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und sei  $f \in L^2(\Omega)$ . Das Funktional  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x) \right) dx$$

hat genau ein Minimum in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

**Beweis von Theorem 7.4.1.** Wir zeigen getrennt, dass es höchstens und dass es mindestens einen stationären Punkt von  $J$  gibt und dass dieser stationäre Punkt ein Minimum ist.

**Behauptung 7.4.5** *Das Funktional  $J$  hat höchstens einen stationären Punkt  $\tilde{u}$ , das heißt  $\partial J(\tilde{u}; v) = 0$  für alle  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , und wenn dieser Punkt existiert, ist er ein Minimum.*

Weil

$$\begin{aligned} \partial^2 J(u; \varphi) &= \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} + c(x) \varphi(x)^2 \right) dx \\ &\geq \int_{\Omega} (C_{LH} |\nabla \varphi(x)|^2 + (\varepsilon - C_{LH} C_P^{-1}) \varphi(x)^2) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \left( \frac{1}{2} \varepsilon C_P + C_{LH} - \frac{1}{2} \varepsilon C_P \right) |\nabla \varphi(x)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon - C_{LH} C_P^{-1} \right) \varphi(x)^2 \right) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon (C_P |\nabla \varphi(x)|^2 + \varphi(x)^2) dx \geq C_{\varepsilon} \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \quad (7.19) \end{aligned}$$

gilt, ist  $J(u)$  strikt konvex. Wenn  $\tilde{u}$  ein stationärer Punkt ist, dann gilt sogar, dass  $\tilde{u}$  ein Minimum ist, weil

$$J(u) \geq J(\tilde{u}) + C_{\varepsilon} \|u - \tilde{u}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2.$$

Für quadratische Funktionale gilt nämlich

$$J(v) = J(u) + \partial J(u; v - u) + \frac{1}{2} \partial^2 J(u; v - u).$$

**Behauptung 7.4.6** *Es gibt mindestens einen stationären Punkt für  $J$ .*

Wir definieren für  $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  die **bilineare Abbildung**<sup>1</sup>

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle_* := \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} + c(x) u(x) v(x) \right) dx.$$

Diese bilineare Abbildung ist ein Skalarprodukt. Die einzige Eigenschaft, die uns Sorgen machen könnte, ist die Positiv-Definitheit. Diese Eigenschaft zeigt man jedoch wie folgt: Aus (7.19) folgt, dass  $\|\cdot\|_*$ , definiert durch  $\|u\|_* = \langle\langle u, u \rangle\rangle_*^{1/2}$ , tatsächlich positiv-definit ist, denn

$$\|u\|_* \geq \sqrt{C_{\varepsilon}} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Beide Normen sind sogar äquivalent, weil auch gilt, dass

$$\|u\|_* \leq \left( n \max_{1 \leq i,j \leq n} \|a_{ij}\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|c\|_{L^{\infty}(\Omega)} \right)^{1/2} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Wegen des Satzes von Riesz gibt es also genau ein  $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$  so, dass

$$\langle\langle \tilde{u}, v \rangle\rangle_* = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Dieses  $\tilde{u}$  ist ein stationärer Punkt für  $J$ . ■

<sup>1</sup>Eine Abbildung  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  heißt bilinear, wenn für alle  $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in H$  und  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  folgendes gilt:

a) die Linearität im ersten Argument:

$$B(c_1 u_1 + c_2 u_2, v) = c_1 B(u_1, v) + c_2 B(u_2, v)$$

b) und die Linearität im zweiten Argument:

$$B(u, c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 B(u, v_1) + c_2 B(u, v_2).$$

## 7.5 Lax-Milgram

Was macht man, wenn man

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + b_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} u(x) + c(x) u(x) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.20)$$

lösen möchte? Dieses Problem lässt sich nicht so leicht mit dem Satz von Riesz schwach lösen, denn man kann leider nicht wie in Theorem 7.4.1 ein passendes Skalarprodukt definieren. Die Differentialgleichung ist auch nicht sofort erkennbar als Euler-Lagrange Gleichung.

Für solche Fälle gibt es eine Erweiterung des Satzes von Riesz für die Existenz einer schwachen Lösung. Für eine Formulierung müssen wir erst einige Begriffe wiederholen/festlegen.

**Definition 7.5.1** Sei  $H$  ein Hilbert-Raum und sei  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine **bilineare Abbildung**. Diese Abbildung heißt

1. **beschränkt**, wenn es  $\beta \in \mathbb{R}^+$  gibt mit für alle  $u, v \in H$ :

$$|B(u, v)| \leq \beta \|u\|_H \|v\|_H; \quad (7.21)$$

2. **koerzitiv**, wenn es  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  gibt mit für alle  $u \in H$ :

$$\alpha \|u\|_H^2 \leq B(u, u). \quad (7.22)$$

**Theorem 7.5.2 (Lax-Milgram)** Sei  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbert-Raum und sei die bilineare Abbildung  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt und koerzitiv. Dann gibt es für jedes  $F \in H'$  genau ein  $u \in H$  so, dass

$$B(u, v) = F(v) \text{ für alle } v \in H$$

Die Idee des Beweises ist einfacher als die Ausarbeitung und ist wie folgt: Wenn  $B(u, v)$  ein Skalarprodukt auf  $H$  wäre, wäre man fertig mit Riesz. Obwohl  $B$  durch die Eigenschaften in Definition 7.5.1 zwar fast äquivalent zu einem Skalarprodukt ist, fehlt leider die Symmetrie. Man löst diese Schwierigkeit, indem man einen Schritt dazwischen schaltet, nämlich man zeigt erst, dass durch

$$\langle w, v \rangle = B(u, v) \text{ für alle } v \in H. \quad (7.23)$$

eine stetige bijektive Abbildung  $u \mapsto w : H \rightarrow H$  definiert wird. Anschließend löst man

$$\langle w, v \rangle = F(v) \text{ für alle } v \in H. \quad (7.24)$$

**Beweis.** Der Beweis braucht mehrere Schritte. Die Norm ist wie üblich definiert durch  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ .

1. Nehmen wir an, dass  $u \in H$  fixiert ist. Weil

$$(v \mapsto B(u, v)) \in H',$$

gibt es genau ein  $w \in H$  derart, dass (7.23) gilt. Wir definieren die Abbildung  $A : H \rightarrow H$  durch

$$A(u) = w.$$

Es gilt also

$$\langle A(u), v \rangle = B(u, v) \text{ für alle } v \in H.$$

Diese Abbildung  $A$  ist linear, und das folgt aus der Eindeutigkeit in (7.23) und die Bilinearität von  $B$ :

Wenn  $A(u_1) = w_1$  und  $A(u_2) = w_2$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle c_1 w_1 + c_2 w_2, v \rangle &= c_1 \langle w_1, v \rangle + c_2 \langle w_2, v \rangle = \\ c_1 B(w_1, v) + c_2 B(w_2, v) &= B(c_1 u_1 + c_2 u_2, v) \end{aligned}$$

für alle  $v \in H$  und dies bedeutet, dass

$$A(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 w_1 + c_2 w_2.$$

Weil  $A$  linear ist, ist  $A(H) = \{A(u); u \in H\}$  ein linearer Teilraum von  $H$ .

2.  $A : H \rightarrow H$  ist beschränkt:

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = B(u, Au) \leq \beta \|u\| \|Au\|$$

und man findet  $\|Au\| \leq \beta \|u\|$ .

3.  $A : H \rightarrow H$  ist injektiv: Weil

$$\alpha \|u\|^2 \leq B(u, u) = \langle Au, u \rangle \leq \|u\| \|Au\|$$

folgt  $\alpha \|u\| \leq \|Au\|$  und die Injektivität.

4.  $A(H)$  ist abgeschlossen: Sei  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $A(H)$ . Dann gibt es eine Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $H$  mit  $A(u_n) = w_n$ . Weil

$$\alpha \|u_n - u_m\| \leq \|w_n - w_m\|$$

gilt, ist  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $H$  und es gibt einen Grenzwert  $u_\infty \in H$ . Weil  $A$  beschränkt ist, ist  $A$  stetig und es gilt

$$w_n = A(u_n) \rightarrow A(u_\infty) \in A(H) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

5.  $A : H \rightarrow H$  ist surjektiv: Nehme an,  $A(H) \neq H$  und wir werden zeigen, dass für  $w \in H \setminus A(H)$  ein  $\tilde{w} \in A(H)$  existiert mit  $w - \tilde{w} \in A(H)^\perp$  und

$$0 < d := \inf_{u \in A(H)} \|w - u\| = \|w - \tilde{w}\|.$$

Sei  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A(H)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w - u_n\| = \inf_{u \in A(H)} \|w - u\| = d.$$

Dann gilt, weil auch  $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in A(H)$ , dass<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} & \|u_n - u_m\|^2 \\ &= 2 \|w - u_n\|^2 + 2 \|w - u_m\|^2 - \|2w - (u_n + u_m)\|^2 \\ &= 2 \|w - u_n\|^2 + 2 \|w - u_m\|^2 - 4 \left\| w - \frac{1}{2}(u_n + u_m) \right\|^2 \\ &\leq 2 \|w - u_n\|^2 + 2 \|w - u_m\|^2 - 4d^2 \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also ist  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $H$  und deshalb konvergent in  $H$ . Wir definieren  $\tilde{w} := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  und finden  $\|w - \tilde{w}\| = d$ . Weil  $A(H)$  abgeschlossen ist, gilt  $\tilde{w} \in A(H)$  und folgt  $d > 0$ . Für  $u \in A(H)$  gilt

$$\begin{aligned} \|w - \tilde{w}\|^2 &\leq \|w - \tilde{w} + tu\|^2 \\ &= \|w - \tilde{w}\|^2 + 2t \langle w - \tilde{w}, u \rangle + t^2 \|u\|^2 \end{aligned}$$

und so sieht man, dass  $\langle w - \tilde{w}, u \rangle = 0$ . Die letzte Gleichheit bedeutet  $w - \tilde{w} \in A(H)^\perp$ .

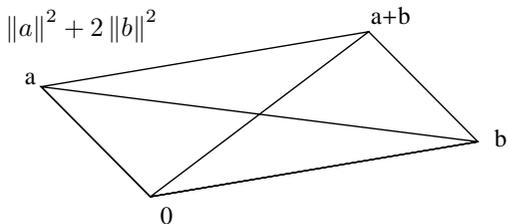
Anschließend zeigen wir den Widerspruch. Setze

$$u_0 = d^{-1}(w - \tilde{w}).$$

<sup>2</sup>Für einen Hilbert-Raum  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  gilt:

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

für alle  $a, b \in H$ .



Dann gilt  $u_0 \in A(H)^\perp$ ,  $\|u_0\|_H = 1$  und

$$\alpha \leq \alpha \|u_0\|^2 \leq B(u_0, u_0) = \langle A(u_0), u_0 \rangle = 0.$$

Dieser Widerspruch zeigt  $A(H) = H$ .

6. Nochmals den Satz von Riesz anwenden zeigt, dass es für  $F \in H'$  ein  $w \in H$  gibt mit

$$\langle w, v \rangle = F(v) \text{ für alle } v \in H.$$

Aus den vorherigen Schritten wissen wir, dass es für jedes  $w \in H = A(H)$  ein  $u \in H$  gibt mit  $Au = w$ . Es folgt, dass

$$B(u, v) = \langle A(u), v \rangle = \langle w, v \rangle \text{ für alle } v \in H.$$

Also haben wir die Existenz eines  $u \in H$  gefunden mit

$$B(u, v) = F(v) \text{ für alle } v \in H.$$

7. Die Eindeutigkeit: Wenn es zwei Lösungen gäbe, sagen wir  $u$  und  $\tilde{u}$ , dann findet man mit  $v = u - \tilde{u}$ , dass

$$\begin{aligned} \alpha \|u - \tilde{u}\|_H^2 &\leq B(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = B(u - \tilde{u}, v) = \\ &= B(u, v) - B(\tilde{u}, v) = F(v) - F(v) = 0. \end{aligned}$$

Der Beweis ist komplett. ■

Wir können mit dem Satz von Lax-Milgram eine schwache Lösung für (7.20) bekommen, wenn  $c(x) \geq c_0$  und man  $c_0$

genügend groß nimmt. Eine schwache Formulierung des Randwertproblems ist: für alle  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} \left( \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + b_1(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} v(x) + c(x) u(x) v(x) - f(x) v(x) \right) dx = 0$$

Setzt man

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \left( \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + b_1(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} v(x) + c(x) u(x) v(x) \right) dx,$$

kann man wie folgt die zweite Bedingung von Lax-Milgram erfüllen:

$$\begin{aligned} B(u, u) &\geq \\ &\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|b_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + c_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( c_0 - \frac{1}{2} \|b_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (7.25) \end{aligned}$$

wenn wir annehmen, dass  $c_0 > \frac{1}{2} \|b_1\|_{L^\infty(\Omega)}^2$ . Wir haben in (7.25) die folgende Ungleichung verwendet:

$$axy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a^2y^2.$$

Man könnte sogar noch zusätzlich Poincaré-Friedrichs anwenden für eine schärfere Abschätzung.

## $W^{k,p}$ -Funktionen und Rand

### 8.1 Verhalten am Rand

Die  $W^{k,p}(\Omega)$ -Räume hat man definiert als die Räume der schwach  $k$ -mal differenzierbaren Funktionen, bei denen diese Ableitungen in  $L^p(\Omega)$  liegen. Die  $W_0^{k,p}(\Omega)$ -Räume hat man definiert als die Räume, die genau all die Funktionen enthalten, die man bezüglich der  $W^{k,p}(\Omega)$ -Norm mit  $C_c^\infty(\Omega)$ -Funktionen approximieren kann. Weil  $W^{k,p}(\Omega)$  ein Banachraum ist, gilt  $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ . Inwiefern ist diese 0 eine Einschränkung? Was bedeutet diese 0 genau für die Randbedingungen? Wenn wir eine Funktion  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  nehmen, gilt für diese Funktion, dass  $u(x) = 0$  für  $x \in \partial\Omega$ ?

**Beispiel 8.1.1** Betrachten wir die Funktion  $f : \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-|x|^2}{1-x_1} & \text{für } x \in \overline{B_1(0)} \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}, \\ 2 & \text{für } x = (1, 0, \dots, 0). \end{cases} \quad (8.1)$$

Für  $n = 2$  könnte man die Darstellung der Funktion aus (8.1) auch beim Karneval verwenden.

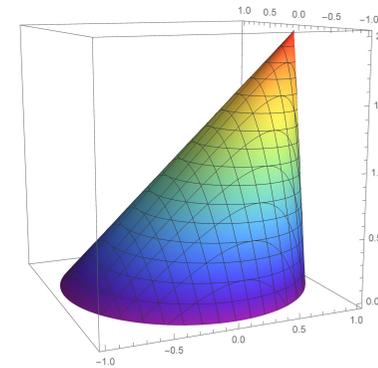


Abbildung 8.1: Skizze der Funktion aus Beispiel 8.1.1 für  $n = 2$

Ein paar Eigenschaften dieser Funktion sind:

1.  $\lim_{x_1 \uparrow 1} f(x_1, 0, \dots, 0) = \lim_{x_1 \uparrow 1} \frac{1-x_1^2}{1-x_1} = 2$ .
2.  $f \in L^\infty(B_1(0))$  und  $\|f\|_{L^\infty(B_1(0))} = 2$ . Dies sieht man wegen des ersten Punktes und weil für  $x_1 < 1$  gilt

$$0 \leq \frac{1-|x|^2}{1-x_1} \leq \frac{1-x_1^2}{1-x_1} = 1+x_1 \leq 2.$$

3.  $f = 0$  auf  $\partial B_1(0)$  f.ü. Genauer gesagt: für  $x \in \partial B_1(0) \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$  gilt  $f(x) = 0$ .
4.  $f \in C(\overline{B_1(0)} \setminus \{(1, 0)\})$  und  $f \notin C(\overline{B_1(0)})$ .
5.  $f \in W^{1,p}(\Omega)$  für alle  $p \in [1, \frac{n+1}{2})$ . Die Rechnerei vereinfacht sich etwas, wenn man Polarkoordinaten nimmt mit Zentrum  $(1, 0, \dots, 0)$ , also

$$1 - x_1 = r \cos \varphi,$$

$$(x_2, \dots, x_n) = r \omega \sin \varphi,$$

mit  $\omega \in \mathbb{S}^{n-2}$ . Aus  $x \in B_1(0)$  wird

$$(1 - r \cos \varphi)^2 + |r \omega \sin \varphi|^2 < 1$$

und es folgt nach Vereinfachung, dass

$$r < 2 \cos \varphi.$$

Dann finden wir für

$$\tilde{f}(r, \varphi, \omega) := f(1 - r \cos \varphi, r \omega \sin \varphi),$$

dass

$$\tilde{f}(r, \varphi, \omega) = \frac{1 - (1 - r \cos \varphi)^2 - |r \omega \sin \varphi|^2}{r \cos \varphi} = 2 - \frac{r}{\cos \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tilde{f}(r, \varphi, \omega) = \frac{-1}{\cos \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{f}(r, \varphi, \omega) = \frac{-r \sin \varphi}{(\cos \varphi)^2}.$$

Die Funktion ist nicht abhängig von  $\omega$  und daher sind die restlichen Ableitungen gleich 0. Wir finden

$$|\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right)^2} = \frac{1}{(\cos \varphi)^2}.$$

Für  $n - 2p > -1$  folgt

$$\begin{aligned} & \int_{B_1(0)} |\nabla f|^p dx \\ &= \sigma_{n-2} \int_{\varphi=-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{r=0}^{2 \cos \varphi} \left| \frac{1}{(\cos \varphi)^2} \right|^p r^{n-1} dr d\varphi \\ &= n^{-1} 2^n \sigma_{n-2} \int_{\varphi=-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (\cos \varphi)^{n-2p} d\varphi < \infty. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass  $f \in W^{1,p}(B_1(0))$  für  $p \in [1, \frac{n+1}{2})$ .

6. Zum Schluss:  $f \in W_0^{1,p}(B_1(0))$  für  $p \in [1, \frac{n+1}{2})$ . Um dies zu zeigen, müssen wir für jedes  $\varepsilon > 0$  ein derartiges  $f_\varepsilon \in C_c^\infty(B_1(0))$  finden, dass

$$\|f - f_\varepsilon\|_{W^{1,p}(B_1(0))} < \varepsilon.$$

Das ist leider sehr technisch. Eine Möglichkeit ist es, erst für die Funktion  $f_{1,\delta}$ , definiert durch

$$f_{1,\delta}(x) = \begin{cases} f((1-\delta)^{-1}x) & \text{für } |x| < 1-\delta, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1-\delta, \end{cases}$$

zu zeigen, dass  $\|f_{1,\delta_1} - f\|_{W^{1,p}(B_1(0))} < \frac{1}{2}\varepsilon$  gilt für ein genügend kleines  $\delta_1$ . Man kann dies zeigen, weil  $f = 0$  auf  $\partial B_1(0)$  f.ü. Anschließend zeigt man für  $\delta_2 < \delta_1$ , dass  $f_{2,\delta_2} = \varphi_{\delta_2} * f_{1,\delta_1} \in C_c^\infty(B_1(0))$ , und dass  $\|f_{1,\delta_1} - f_{2,\delta_2}\|_{W^{1,p}(B_1(0))} < \frac{1}{2}\varepsilon$ , wenn man  $\delta_1$  klein genug nimmt.

### 8.1.1 Wie definiert man Regularität vom Rand?

Den Rand einer Menge  $\Omega$  definiert man wie folgt:

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ = \overline{\Omega} \cap \overline{\Omega^c}.$$

Wenn  $\Omega$  ein Gebiet ist, dann ist es offen, und es gilt  $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ . Für die meisten Randwertprobleme braucht man einen Rand, der nicht allzu kompliziert ist. Wir werden nur solche Gebiete betrachten, bei denen der Rand lokal immer eine reguläre Mannigfaltigkeit ist, und diese Mannigfaltigkeit soll  $\Omega$  und  $(\overline{\Omega})^c$  genau trennen.

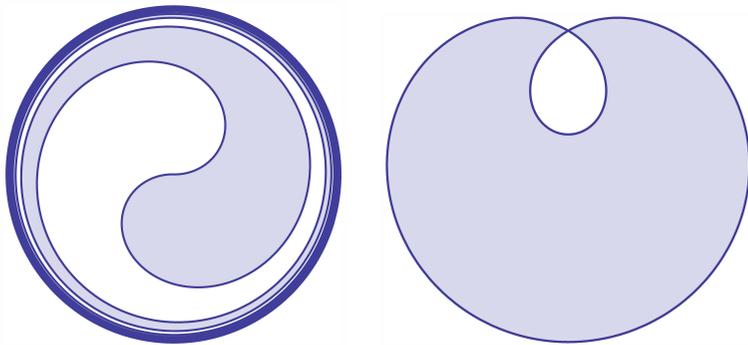


Abbildung 8.2: Gebiete mit solchen Rändern wollen wir vermeiden.

Wir betrachten Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , für deren Rand folgendes gilt:

- Der Rand wird durch endlich viele offene Blöcke  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , überdeckt. Jeden Block  $A_j$  beschreiben wir in seinem eigenen lokalen kartesischen Koordinatensystem als

$$A_j = \underbrace{(a_1^j, b_1^j) \times \dots \times (a_{n-1}^j, b_{n-1}^j)}_{=: A_j'} \times (a_n^j, b_n^j),$$

und die Koordinatensysteme kann man so wählen, dass es für jeden Block  $A_j$  eine Funktion  $f_j \in C(\overline{A_j'}; (a_n^j, b_n^j))$  gibt, derart dass

$$\Omega \cap A_j = \{(y', y_n) \in A_j; y_n \geq f_j(y')\}.$$

**Definition 8.1.2** Wir sagen  $\partial\Omega \in C^{k,\gamma}$ , wenn der Rand sich, wie soeben beschrieben, von endlich vielen Blöcken  $A_j$  überdecken lässt und wenn für die dazugehörigen Funktionen gilt:  $f_j \in C^{k,\gamma}(\overline{A_j'})$ .

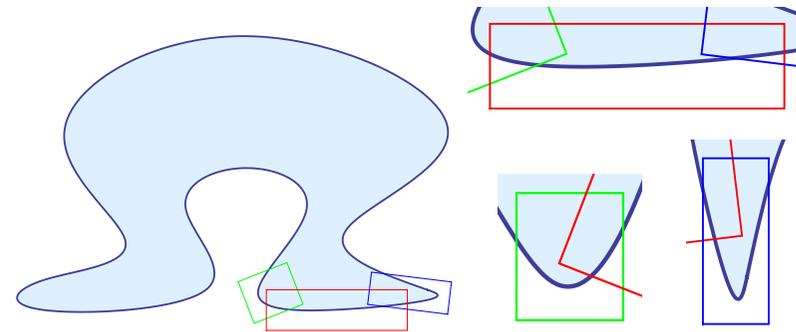


Abbildung 8.3: Ein  $\Omega$  mit drei der randüberdeckenden Blöcke.

In jedem Block kann man eine Transformation  $T_j$  definieren wie folgt:

$$T_j(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n - f_j(y_1, \dots, y_{n-1})).$$

Diese Transformation bügelt den Rand lokal glatt auf die Hyperebene  $\{y_n = 0\}$  und hat die gleiche Regularität wie  $f_j$ . Es gilt außerdem, dass

$$\int_{\Omega \cap A_j} |u(y)| dy = \int_{A_j'} \int_0^{b_n^j - f_j(x')} |u(x', x_n + f_j(x'))| dx_n dx',$$

und

$$\int_{\partial\Omega \cap A_j} |u(y)| d\sigma_y = \int_{A'_j} |u(x', f_j(x'))| w(x') dx'$$

$$\text{für } w(x') = \sqrt{\det \left( I + \left( \frac{\partial f(x')}{\partial x'_i} \frac{\partial f(x')}{\partial x'_j} \right) \right)}.$$

Wenn man den Rand  $\partial\Omega$  mit endlich vielen Blöcken, sagen wir  $\{A_j\}_{j=1}^m$ , überdeckt hat, kann man eine Funktion auf  $\Omega$  oder  $\bar{\Omega}$  betrachten, als die Summe von  $m+1$  Funktionen, die ihre Träger genau auf den  $A_j$  und auf  $\Omega$  haben. Dies schafft man mit Hilfe einer Zerlegung der Eins.

**Definition 8.1.3** Sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $\{\zeta_j : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; j = 1, \dots, \ell\}$  eine **Zerlegung der Eins**<sup>1</sup> auf  $\Omega$ , wenn

1.  $\zeta_j \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,
2.  $0 \leq \zeta_j(x) \leq 1$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$ ,
3.  $\sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j(x) = 1$  für alle  $x \in \bar{\Omega}$ .

**Lemma 8.1.4** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $\{O_m\}_{m=1}^k$  eine offene Überdeckung von  $\bar{\Omega}$ . Dann gibt es eine Zerlegung der Eins  $\{\zeta_m\}_{m=1}^k$  mit

$$\text{support}(\zeta_m) \subset O_m \text{ für alle } m \in \{1, \dots, k\}.$$

**Beweis.** Für  $k = 2$  fragt man einen Topologen. Für  $k > 2$  beweist man dies mit vollständiger Induktion. ■

<sup>1</sup>Zerlegung der Eins = *partition of unity*

Weil sich die Blöcke überlappen, kann man die Zerlegung der Eins  $\{\zeta_i\}$  so wählen, dass  $\text{support}(\zeta_i) \subset A_i$  für  $1 \leq i \leq m$  und  $\text{support}(\zeta_{m+1}) \subset \Omega$ . Für eine stetige Funktion  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  findet man, dass für  $u_i = \zeta_i u$  gilt

$$\text{support}(u_i) \subset A_i \text{ für } i \leq m \text{ und } \sum_{i=1}^{m+1} u_i = u.$$

## 8.1.2 Intermezzo zum Träger einer Funktion

Bis jetzt haben wir den Träger einer Funktion  $u \in C(\Omega)$  definiert durch

$$\text{support}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}. \quad (8.2)$$

Für Funktionenklassen, also zum Beispiel für ein Element aus  $L^p(\Omega)$ , ist diese Definition nicht passend. Da wird es leider etwas technisch. Die Topologie  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  ist die Menge aller offenen Mengen in der Potenzmenge von  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definition 8.1.5** Sei  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lebesgue-messbare Funktion. Man definiert erst

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{f=0} &:= \{\omega \in \mathcal{T}; f = 0 \text{ auf } \omega \text{ f.ü.}\} \subset \mathcal{T}, \\ \omega_{f=0} &:= \bigcup \{\omega; \omega \in \mathcal{T}_{f=0}\} \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

und dann den **Träger** durch

$$\text{support}(u) = \mathbb{R}^n \setminus \omega_{f=0}. \quad (8.3)$$

**Bemerkung 8.1.6** Es ist nicht sofort klar, dass diese Definition tatsächlich vernünftig ist. Weil  $\omega_{f=0}$  offen ist als Vereinigung offener Mengen und man jede offene Menge in  $\mathbb{R}^n$  mit

der Vereinigung abzählbar vieler offener Kugeln  $B_i$  mit  $f = 0$  f.ü. auf  $B_i$  bekommen kann, gilt  $f = 0$  f.ü. auf  $\omega_{f=0}$ . Man hat da verwendet, dass die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen wieder eine Nullmenge ist.

Weil die Vereinigung offener Mengen wiederum offen ist, ist  $\text{support}(u)$  abgeschlossen.

**Bemerkung 8.1.7** Für Lebesgue-messbare Funktionen  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert man  $\text{support}(u) = \text{support}(\tilde{u})$  für

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \notin \Omega. \end{cases}$$

**Aufgabe 8.1** 1. Zeigen Sie, dass (8.2) für  $u \in L^1(\Omega)$  nicht wohldefiniert ist, sondern abhängt vom gewählten Vertreter.

2. Zeigen Sie, dass (8.3) für  $u \in L^1(\Omega)$  wohldefiniert ist, da diese Definition nicht abhängt von den gewählten Vertretern.

3. Zeigen Sie, dass die Definitionen in (8.2) und (8.3) übereinstimmen für  $u \in C(\Omega)$ .

## 8.2 Fortsetzen einer Funktion

Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  mit genügend glattem Rand. Wir möchten eine Funktion auf  $\Omega$  zu einer Funktion auf  $\mathbb{R}^n$  fortsetzen auf eine sehr strukturierte Art. Genauer gesagt, wir möchten Operatoren  $E_k^\Omega$  zur Verfügung haben, die folgendes erfüllen:

**Definition 8.2.1**  $E_k^\Omega : C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \rightarrow C_b^{k,\gamma}(\mathbb{R}^n)$  beziehungsweise  $E_k^\Omega : W^{k,p}(\bar{\Omega}) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  nennt man **Fortsetzungsoperator**, wenn

1.  $E_k^\Omega$  ein beschränktes lineares Funktional ist:

$$E_k^\Omega \in L\left(C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}); C_b^{k,\gamma}(\mathbb{R}^n)\right) \text{ bzw.}$$

$$E_k^\Omega \in L\left(W^{k,p}(\bar{\Omega}); W^{k,p}(\mathbb{R}^n)\right).$$

2.  $(E_k^\Omega u)|_{\bar{\Omega}} = I$ , die Einschränkung<sup>2</sup> der Fortsetzung<sup>3</sup> gibt die Identität.

In einer Dimension hat man folgende Beispiele:

**Beispiel 8.2.2** Definiere  $E_0 : C_b[0, \infty) \rightarrow C_b(\mathbb{R})$  und auch  $E_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}^+) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$  durch

$$(E_0 u)(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \geq 0, \\ u(-x) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Man zeigt für  $E_0 : C_b[0, \infty) \rightarrow C_b(\mathbb{R})$  direkt, dass beide Eigenschaften erfüllt sind. Für  $E_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}^+) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$  ist ein Beweis schon etwas schwieriger.

**Beispiel 8.2.3** Definiere  $E_0 : C[0, 1] \rightarrow C_b(\mathbb{R})$  und auch  $E_0 : W^{1,p}((0, 1)) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$  durch

$$(E_0 u)(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\infty, -1], \\ u(-x) \chi\left(x + \frac{1}{2}\right) & \text{für } x \in (-1, 0), \\ u(x) & \text{für } x \in [0, 1], \\ u(2-x) \left(1 - \chi\left(x - \frac{3}{2}\right)\right) & \text{für } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{für } x \in [2, \infty). \end{cases}$$

<sup>2</sup>Einschränkung = restriction

<sup>3</sup>Fortsetzung = extension

Die Funktion  $\chi$ , definiert durch

$$\chi(x) = \left( \varphi_{\frac{1}{4}} * H \right) (x)$$

ist gleich 0 für  $x < -\frac{1}{4}$  und ist gleich 1 für  $x > \frac{1}{4}$ . Hier ist  $\varphi_{\frac{1}{4}}$  der Friedrichs'sche Glätter und  $H$  die Heaviside Funktion, definiert in (6.12).

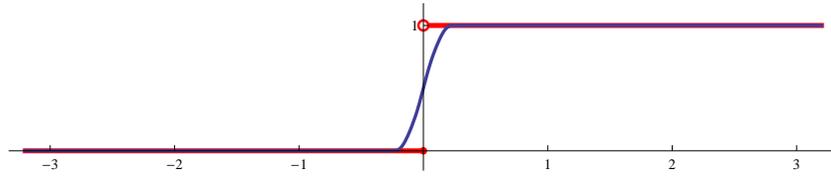


Abbildung 8.4: Skizze zu  $H$  und  $\chi$

**Beispiel 8.2.4** Definiere  $E_1 : C_b^1[0, \infty) \rightarrow C_b^1(\mathbb{R})$  durch

$$(E_1 u)(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \geq 0, \\ -3u(-x) + 4u(-\frac{1}{2}x) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Man findet, dass

$$\lim_{x \uparrow 0} (E_1 u)(x) = -3u(0) + 4u(0) = u(0),$$

$$\lim_{x \uparrow 0} (E_1 u)'(x) = 3u'(0) - 2u'(0) = u'(0),$$

und

$$\|E_1 u\|_{C_b^1(\mathbb{R})} \leq 7 \|u\|_{C_b^1([0, \infty))}.$$

**Aufgabe 8.2** Definieren Sie einen stetigen linearen Fortsetzungsoperator

$$E_1 : C^1[0, 1] \rightarrow C_b^1(\mathbb{R})$$

und zeigen Sie, dass Ihr Operator  $E_1$  die gewünschten Eigenschaften hat.

Für

$$E_k \in L\left(C_b^{k,\gamma}[0, \infty); C_b^{k,\gamma}(\mathbb{R})\right) \text{ bzw.}$$

$$E_k \in L\left(W^{k+1,p}[0, \infty); W^{k+1,p}(\mathbb{R})\right)$$

definiert man

$$(E_k u)(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{k+1} c_i u(-\frac{1}{i}x) & \text{für } x < 0, \end{cases} \quad (8.4)$$

mit den Konstanten  $c_i$  bestimmt durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{k+1} \\ 1 & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{3})^2 & \cdots & (\frac{1}{k+1})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^k & (-\frac{1}{2})^k & (-\frac{1}{3})^k & \cdots & (-\frac{1}{k+1})^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung findet man durch

$$\lim_{x \uparrow 0} \left( \frac{d}{dx} \right)^m (E_k u)(x) = \lim_{x \downarrow 0} \left( \frac{d}{dx} \right)^m u(x) \text{ für } m \in \{0, \dots, k\}.$$

**Lemma 8.2.5** Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma \in [0, 1]$  und  $p \in [1, \infty]$ . Dann ist  $E_k$ , definiert in (8.4), eine stetige lineare Fortsetzung sowohl von  $C_b^{k,\gamma}[0, \infty)$  nach  $C_b^{k,\gamma}(\mathbb{R})$ , als auch von  $W^{k+1,p}[0, \infty)$  nach  $W^{k+1,p}(\mathbb{R})$ .

**Aufgabe 8.3** Zeige, dass  $E_k \in L(C_b^k[0, \infty); C_b^k(\mathbb{R}))$ .

Wie geht man vor in mehreren Dimensionen? Eine explizite Konstruktion konstruiert man wie folgt für ein Gebiet mit  $C^k$ -Rand:

1. Nehme eine offene Überdeckung<sup>4</sup> des Randes wie in der Definition 8.1.2. Dann ist  $\{A_1, \dots, A_m, \Omega, \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}\}$  eine offene Überdeckung von  $\mathbb{R}^n$ . Wir nehmen eine zugehörige Zerlegung der Eins, das heißt,  $\zeta_j$  mit

$$\begin{cases} \text{support}(\zeta_j) \subset A_j \text{ für } j = 1, \dots, m, \\ \text{support}(\zeta_{m+1}) \subset \Omega, \\ \text{support}(\zeta_{m+2}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

2. Setze für  $j = 1, \dots, m$

$$\tilde{u}_j = \begin{cases} (\zeta_j \cdot u) \circ S_j^{-1} & \text{für } S_j x \in \text{support}(\zeta_j), \\ 0 & \text{für } S_j x \notin \text{support}(\zeta_j), \end{cases} \quad (8.5)$$

mit den zu  $A_i$  gehörenden lokalen Koordinaten

$$S_j \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n - f_j(y_1, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung  $S_j$  „bügelt“ den Rand flach, ist  $C^k$  und hat eine  $C^k$ -Inverse.

3. Definiere für  $j = 1, \dots, m$

$$E^j \tilde{u}_j(x_1, \dots, x_n) = (E_k \tilde{u}_j(x_1, \dots, x_{n-1}, \cdot))(x_n),$$

Dies ist die eindimensionale Erweiterung in  $x_n$ -Richtung mit den ersten  $n - 1$  Koordinaten als Parameter.

4. Schlussendlich schiebt man die Funktionen zurück zu  $A_j$  und addiert diese Funktionen:

$$E_k^\Omega u = \sum_{j=1}^m (E^j \tilde{u}_j) \circ S_j + \zeta_{m+1} u.$$

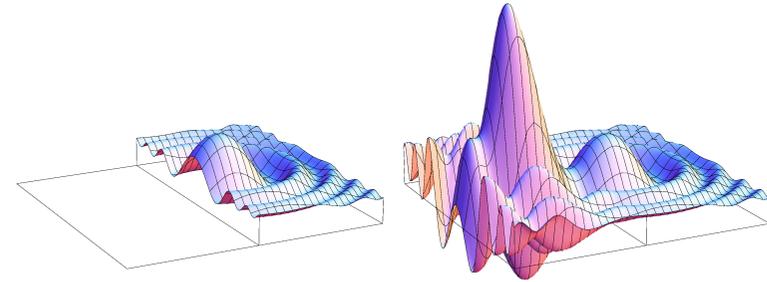


Abbildung 8.5: Darstellung einer Funktion  $u \in C^1([0, \infty) \times \mathbb{R})$  und ihre Fortsetzung  $\tilde{u} = E_1(u) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ .

**Lemma 8.2.6** Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt ist und  $\partial\Omega \in C^k$ , dann gilt für den oben konstruierten Operator  $E_k^\Omega$ :

1.  $E_k^\Omega : C^{\ell, \gamma}(\bar{\Omega}) \rightarrow C_b^{\ell, \gamma}(\mathbb{R}^n)$  ist stetig für jedes  $\ell$  und  $\gamma \in [0, 1]$  mit  $\ell + \gamma \leq k$ ,
2.  $E_k^\Omega : W^{\ell, p}(\Omega) \rightarrow W^{\ell, p}(\mathbb{R}^n)$  ist stetig für jedes  $\ell \leq k$  und  $p \in [1, \infty]$ .

**Beweis.** Die erste Behauptung beweist man geradeaus. Die zweite Aussage ist schwieriger zu beweisen. Man soll zeigen, dass die schwachen Ableitungen von  $E_k^\Omega(u)$  bis Ordnung  $\ell$  auch in einer Umgebung des Randes existieren und diese Ableitungen da im  $L^p$ -Sinne beschränkt sind durch  $\|u\|_{W^{\ell, p}(\Omega)}$ .

<sup>4</sup>Überdeckung = covering

Der einfachste Weg ist es  $u$  durch  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^{\ell,\gamma}(\bar{\Omega})$  in  $\|\cdot\|_{W^{\ell,p}(\Omega)}$ -Norm zu approximieren. ■

**Aufgabe 8.4** Die Bedingung, dass man  $\partial\Omega \in C^1$  hat, ist nicht immer notwendig. Es hilft auch, wenn man noch extra Randbedingungen hat. Konstruiere eine Fortsetzung  $\tilde{E} : C_b^1([0, \infty)^2) \cap C_0([0, \infty)^2) \rightarrow C_b^1(\mathbb{R}^2)$ .

**Aufgabe 8.5** Sei  $u : \bar{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und setze

$$\hat{E}u(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } |x| \leq 1, \\ 2u\left(\frac{2x}{|x|^2+1}\right) - u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$

Für welche  $k \in \mathbb{N}$  ist  $\hat{E} : C_b^k(\bar{B}) \rightarrow C_b^k(\mathbb{R}^n)$  wohldefiniert?

### 8.3 Einschränken auf dem Rand

Wie wir schon mal gesehen haben, ist eine  $L^p(\Omega)$  oder  $W^{k,p}(\Omega)$ -Funktion nicht unbedingt wohldefiniert in Nullmengen, weil man eigentlich Äquivalenzklassen betrachtet. Trotzdem kann man manchmal sagen, dass es in so einer Äquivalenzklasse eine Funktion gibt, die stetig ist und die damit an jedem Punkt festliegt. Zum Beispiel haben wir gesehen, dass in einer Dimension jede Äquivalenzklasse  $f \in W^{1,p}(a, b)$  einen stetigen Vertreter hat, den wir ohne viel Zögern auch  $f$  genannt haben. Dann kann man den Randwert festlegen als den Randwert dieses stetigen Vertreters. Kann man so etwas auch in höheren Dimensionen haben? Im Allgemeinen sind Funktionen vom  $L^p$ -Typ nur fast überall festgelegt und das bedeutet, dass so eine Funktion auf Nullmengen wie  $\partial\Omega$  nicht bestimmt ist.

**Theorem 8.3.1 (zur Definition von Randwerten im schwachen Sinne)** Sei  $p \in (1, \infty)$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und  $\partial\Omega \in C^1$ . Dann gilt folgendes:

1. Für jedes  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  gibt es eine Folge von  $C^1(\bar{\Omega})$ -Funktionen  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  für die gilt

$$\|u - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty. \quad (8.6)$$

2. Sei  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  und sei  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  eine Folge von  $C^1(\bar{\Omega})$ -Funktionen für die (8.6) gilt. Dann gibt es  $v \in L^p(\partial\Omega)$  derart, dass

$$\left\|v - (u_m)|_{\partial\Omega}\right\|_{L^p(\partial\Omega)} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Dieser Limes  $v$  hängt nur von  $u$  ab und nicht von der Folge  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ .

Durch diese ersten beiden Aussagen ist

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega).$$

wohldefiniert durch  $Tu := v$ . Außerdem gilt:

3.  $T$  ist ein beschränkter linearer Operator:

$$T \in L(W^{1,p}(\Omega), L^p(\partial\Omega)).$$

4. Für  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  gilt

$$Tu = u|_{\partial\Omega} \text{ f.ü. auf } \partial\Omega.$$

Dies gilt also auf  $\partial\Omega$  im Sinne des  $(n-1)$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes.

**Bemerkung 8.3.2**  $T$  heißt Spuroperator<sup>5</sup>;  $Tu$  heißt Spur von  $u$ . Übrigens, weil  $T$  abhängig von  $p$  definiert wird, sollte man eigentlich  $T_p$  schreiben.

**Beweis.** Wir beweisen die Aussagen in mehreren Schritten. Dabei nehmen wir an, dass der Rand von  $\Omega$  mit passenden Blöcken überdeckt ist und es dazu die passende Zerlegung der Eins gibt wie in Lemma 8.1.4.

1. Weil  $\partial\Omega \in C^1$ , gibt es eine Fortsetzung  $E_1^\Omega : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Wir definieren mit Hilfe des Friedrichs'schen Glätters

$$u_m := \varphi_{1/m} * E_1^\Omega(u).$$

Aus den Eigenschaften der Glättungsfunktion findet man  $u_m \in C^1(\mathbb{R}^n)$  und  $\|E_1^\Omega(u) - u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$  und so auch  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  und die Konvergenz auf  $\Omega$ .

2. Es reicht, wenn wir zeigen können, dass für  $\tilde{u}_j$  wie in (8.5), der Spuroperator die gewünschten Eigenschaften hat. Erst beweisen wir eine Abschätzung für  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  und somit  $u_j = \zeta_j u \in C^1(\bar{\Omega} \cap \bar{A}_j)$ . Bemerke, dass

$$\text{support}(u_j) \subset \bar{\Omega} \cap A_j. \quad (8.7)$$

Man hat

$$\int_{\partial\Omega \cap \bar{A}_j} |u_j|^p d\sigma_y = \int_{B_j} |\tilde{u}_j|^p J dx' \leq C \int_{B_j} |\tilde{u}_j|^p dx',$$

wobei  $J = \sqrt{1 + |\nabla f_j|^2}$  beschränkt ist, weil  $f_j \in C^1(\bar{B}_j)$ . Weil der transformierte Rand jetzt flach ist und  $\tilde{u}_j$  einen

kompakten Träger hat, kann man vom Rand ins Gebiet 'hinein' integrieren und findet mit

$$\tilde{u} = u \circ T_j^{-1}, \tilde{\zeta}_j = \zeta_j \circ T_j^{-1} \text{ und } \tilde{u}_j = \tilde{\zeta}_j \tilde{u},$$

dass

$$|\tilde{u}_j(x', a)|^p - |\tilde{u}_j(x', 0)|^p = \int_0^a \frac{\partial}{\partial x_n} |\tilde{u}_j(x', x_n)|^p dx_n$$

und wegen (8.7), gilt für  $a$  genügend groß, dass  $|\tilde{u}_j(x', a)|^p = 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_{B_j} |\tilde{u}_j|^p dx' \\ &= - \int_{B_j} \int_0^a \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \tilde{\zeta}_j^p \cdot |\tilde{u}|^p \right) dx_n dx' \\ &= - \int_{B_j} \int_0^a \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \tilde{\zeta}_j \right)^p \right) |\tilde{u}|^p + \right. \\ & \quad \left. + \left( \tilde{\zeta}_j \right)^p p |\tilde{u}|^{p-2} \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{u} \right) dx_n dx' \\ &\leq C \int_{B_j \times [0, a]} \left( |\tilde{u}|^p + |\tilde{u}|^{p-1} \left| \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{u} \right| \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \int_{B_j \times [0, a]} \left( |\tilde{u}|^p + \frac{p-1}{p} |\tilde{u}|^p + \frac{1}{p} \left| \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{u} \right|^p \right) dx \\ &\leq C' \|u\|_{W^{1,p}(\Omega \cap A_j)}. \end{aligned}$$

Wir haben dabei die Ungleichung von Young benutzt:  $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$  für  $a, b > 0$  und  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

<sup>5</sup>Spur = trace

Es folgt weiter, dass

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\partial\Omega)} &= \left( \int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma_y \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_{\partial\Omega} \left| \sum_{j=1}^{\ell} \zeta_j u \right|^p d\sigma_y \right)^{1/p} \\ &\leq c_p \left( \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\partial\Omega} |\zeta_j u|^p d\sigma_y \right)^{1/p} \leq \tilde{C} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wenn also  $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$  eine Folge von  $C^1(\bar{\Omega})$ -Funktionen ist, für die gilt

$$\|u - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty,$$

dann gilt auch

$$\|u_m - u_k\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \tilde{C} \|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

und  $\{(u_m)_{|\partial\Omega}\}_{m=1}^{\infty}$  ist eine Cauchyfolge in  $L^p(\partial\Omega)$  und damit konvergent.

Auf identische Weise zeigt man, dass der Limes nicht von der Wahl der Folge abhängt. Wenn man zwei derartige Folgen hat, nennen wir sie  $\{u_m\}$  und  $\{w_m\}$ , so gilt

$$\begin{aligned} \|u_m - w_m\|_{L^p(\partial\Omega)} &\leq \tilde{C} \|u_m - w_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq \tilde{C} \left( \|u_m - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|u - w_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

So ist  $T$  wohldefiniert.

3. Die Linearität von  $T$  folgt aus

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (au_m + bw_m) = a \lim_{m \rightarrow \infty} u_m + b \lim_{m \rightarrow \infty} w_m$$

und die Eigenschaften einer Norm. Weil

$$\begin{aligned} &\|Tu - (u_m)_{|\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|(u_k)_{|\partial\Omega} - (u_m)_{|\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{C} \|u_k - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \tilde{C} \|u - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \end{aligned}$$

gilt, ist  $T$  beschränkt.

4. Es bleibt übrig zu zeigen, dass es für  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tatsächlich das Ergebnis gibt, das wir uns gewünscht haben:  $Tu = u_{|\partial\Omega}$ . Für solche  $u$  gilt, dass

$$u_m = \varphi_{1/m} * E_1^\Omega u \in C^1(\bar{\Omega}),$$

$\|u_m - u\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$  und  $\|u_m - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$ . Es folgt

$$\|Tu - u_m\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \tilde{C} \|u - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} \|u_m - u_{|\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} &\leq |\partial\Omega| \|u_m - u_{|\partial\Omega}\|_{C(\partial\Omega)} \\ &\leq |\partial\Omega| \|u_m - u\|_{C(\bar{\Omega})} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und dann auch

$$\begin{aligned} &\|Tu - u_{|\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \\ &\leq \|Tu - u_m\|_{L^p(\partial\Omega)} + \|u_m - u_{|\partial\Omega}\|_{L^p(\partial\Omega)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und  $Tu = u_{|\partial\Omega}$  fast überall auf  $\partial\Omega$ .

Das letzte im  $(n-1)$ -dimensionalen Lebesgue-Sinn. ■

**Aufgabe 8.6** Zeigen Sie die **Ungleichung von Young**: für  $a, b > 0$  und  $p, q > 1$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

**Theorem 8.3.3** Sei  $p \in (1, \infty)$  und sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  mit  $\partial\Omega \in C^1$ . Für  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  und den Spuroperator definiert in Theorem 8.3.1 gilt:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow Tu = 0.$$

**Beweis.**  $\Rightarrow$ . Wenn  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , dann gibt es eine Folge  $\{u_m\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ , die in  $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ -Norm zu  $u$  konvergiert. Die Behauptung folgt aus

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} = \|Tu - u_m\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

$\Leftarrow$ . Die Annahme, dass  $\partial\Omega \in C^1$ , spielt hier eine wesentliche Rolle und daher kann man vermuten, dass der Beweis nicht so einfach sein kann. Als erstes sei bemerkt, dass  $\partial\Omega \in C^1$  uns erlaubt, den Rand mit  $S : C^1(\Omega; \mathbb{R}_+^n)$  lokal glattzubugeln. Dies erlaubt uns eine Zerlegung der Eins anzuwenden und lokal  $\Omega \cap A_i$  als Teil vom Halbraum  $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$  zu betrachten. Die Funktion  $\tilde{u}_i := (\zeta_i u) \circ S^{-1} \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$  hat einen kompakten Träger und  $Tu = 0$  liefert  $T\tilde{u}_i = 0$ . Wir schreiben weiter wieder  $u$  statt  $\tilde{u}_i$ .

1. Als ersten Schritt zeigen wir eine Abschätzung. Wenn  $Tu = 0$ , dann gibt es Funktionen  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^1(\mathbb{R}_+^n)$  derart, dass

$$\|u_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 \text{ und } \|u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})} \rightarrow 0.$$

Vom Rand hinauf integrieren liefert

$$u_m(x', x_n) = u_m(x', 0) + \int_0^{x_n} \left( \frac{\partial}{\partial x_n} u_m \right)(x', s) ds$$

und

$$\begin{aligned} & |u_m(x', x_n)|^p \\ & \leq C_p \left( |u_m(x', 0)|^p + \left| \int_0^{x_n} \left( \frac{\partial}{\partial x_n} u_m \right)(x', s) ds \right|^p \right) \\ & \leq C_p \left( |u_m(x', 0)|^p + \int_0^{x_n} \left| \left( \frac{\partial}{\partial x_n} u_m \right)(x', s) \right|^p ds \left( \int_0^{x_n} 1 ds \right)^{p-1} \right). \end{aligned}$$

Man bekommt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', x_n)|^p dx' & \leq C_p \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x', 0)|^p dx' + \right. \\ & \left. + x_n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{x_n} \left| \left( \frac{\partial}{\partial x_n} u_m \right)(x', s) \right|^p ds dx' \right). \end{aligned}$$

Nehmen wir  $m \rightarrow \infty$ , so folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' \\ & \leq C_p x_n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{x_n} \left| \left( \frac{\partial}{\partial x_n} u \right)(x', s) \right|^p ds dx' \\ & \leq C_p x_n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{x_n} |(\nabla u)(x', s)|^p ds dx'. \end{aligned} \quad (8.8)$$

2. Als erste Annäherung konstruieren wir eine Funktion mit kompaktem Träger. Wir definieren  $\chi \in C^\infty([0, \infty))$  durch

$$\chi(s) = \left( \varphi_{\frac{1}{4}} * H\left(\frac{3}{2} - \cdot\right) \right)(s).$$

Es gilt  $\chi(s) = 1$  auf  $[0, 1]$  und  $\chi(s) = 0$  auf  $[2, \infty)$ .

Wir betrachten

$$w_m(x) = u(x)(1 - \chi(mx_n)) \text{ für } x \in \overline{\mathbb{R}_+^n}$$

und finden

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_m(x)}{\partial x_n} &= \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} (1 - \chi(mx_n)) - mu(x)\chi'(mx_n), \\ \frac{\partial w_m(x)}{\partial x'} &= \frac{\partial u(x)}{\partial x'} (1 - \chi(mx_n)). \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass

$$\|w_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0. \quad (8.9)$$

Man findet sofort, dass

$$\|w_m - u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} = \|\chi(m \cdot_n) u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|\nabla(w_m - u)\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} &\leq \\ \|\chi(m \cdot_n) \nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} &+ \|m\chi'(m \cdot_n) u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Auch hier findet man sofort, dass  $\|\chi(m \cdot_n) \nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$  und es bleibt nur der letzte Term in (8.10), für

den man Konvergenz nach 0 zu zeigen hat:

$$\begin{aligned} &\|m\chi'(m \cdot_n) u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}^p \\ &= \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} m^p |\chi'(mx_n)|^p |u(x', x_n)|^p dx' dx_n \\ &\leq m^p \|\chi'\|_\infty \int_0^{2/m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', x_n)|^p dx' dx_n \\ &\leq m^p \|\chi'\|_\infty \int_0^{2/m} C_p x_n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{x_n} |(\nabla u)(x', s)|^p ds dx' dx_n \\ &\leq m^p \|\chi'\|_\infty \int_0^{2/m} C_p x_n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{2/m} |(\nabla u)(x', s)|^p ds dx' dx_n \\ &= m^p \|\chi'\|_\infty \frac{C_p}{p} \left(\frac{2}{m}\right)^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{2/m} |(\nabla u)(x', s)|^p ds dx' \\ &\leq C_{p,\chi} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{2/m} |(\nabla u)(x', s)|^p ds dx'. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Wir verwendeten (8.8). Der Term in (8.11) geht nach 0 für  $m \rightarrow \infty$  und so finden wir, dass (8.9) gilt.

3. Wir glätten für eine approximierende Folge in  $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ . Weil  $w_m(x', x_n) = 0$  gilt für  $x_n < m^{-1}$ , können wir den Friedrichs'schen Glätter mit  $\varepsilon = \frac{1}{2}m^{-1}$  auf  $w_m$  loslassen, das heißt, wir betrachten

$$v_n = \varphi_{\frac{1}{2m}} * w_m$$

und finden, dass  $v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  und

$$\|w_m - v_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0. \quad (8.12)$$

Man findet  $\|w_m - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0$  und dies bedeutet  $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ .

Zurücktransformieren und Zusammenkleben liefert uns für die ursprüngliche Funktion, dass  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . ■



## Funktionenräume und ihr Zusammenhang I

Niemand sollte überrascht sein, wenn man  $C^1(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$  sieht. Eine Funktion  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  ist punktweise definiert und das reicht für die Definition als stetige Funktion. Es gilt sogar, dass

$$j : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\overline{\Omega}) \text{ mit } j(u)(x) = u(x)$$

eine stetige Abbildung ist: mit  $c = 1$  gilt  $\|j(u)\|_\infty \leq c \|u\|_{C^1}$  für alle  $u \in C^1$ . Vergleicht man jedoch zwei Sobolev-Räume, dann wird es schon etwas heikler, denn da werden statt Funktionen nun Funktionenklassen verglichen. Wir schreiben die Funktionenklassen mal mit  $[u]$ .

Man wird formal die folgenden Abbildungen betrachten müssen:

- Vom Hölder-Raum  $X$  zum Sobolev-Raum  $Y$ :

$$j(u) := [u],$$

bei der  $[u]$  die Klasse aller Funktionen  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist mit  $w(x) = u(x)$  f.ü.

- Vom Sobolev-Raum  $X$  zum Hölder-Raum  $Y$ :

$$j([u]) := \{w \in [u] \in X; \text{ wenn es } w \in Y \text{ gibt}\}.$$

- Vom Sobolev-Raum  $X$  zum Sobolev-Raum  $Y$ :

$$j([u]) := \{[u]; \text{ wenn } [u] \in Y\}.$$

Eine solche Abbildung  $j$  nennt man eine **kanonische Abbildung**. Sie ist nicht unbedingt für alle  $u$  oder  $[u]$  aus  $X$  definiert. Auch die Standardabbildung von  $X$  zu den Doppeldualen  $X''$ , also

$$j(u) = F_u \text{ mit } F_u(g) := g(u) \text{ für } u \in X, g \in X',$$

nennt man kanonisch.

**Definition 9.0.1 (Einbettung)** *Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  zwei normierte Vektorräume mit einer kanonischen Abbildung  $j : X \rightarrow Y$ . Dann sagt man „ $X$  ist (stetig) eingebettet in  $Y$ “, wenn nicht nur  $j(X) \subset Y$  gilt, sondern  $j$  auch stetig ist. Man schreibt  $j : X \hookrightarrow Y$  oder sogar  $X \hookrightarrow Y$ .*

Stetig heißt hier, dass es  $c > 0$  gibt mit

$$\|j(u)\|_Y \leq c \|u\|_X \text{ für alle } u \in X.$$

## 9.1 Hölder und Sobolev

Wie stehen diese Räume zueinander? Fast trivialerweise findet man für ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\partial\Omega \in C^1$  folgende Einbettungen<sup>1</sup> für  $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma, \beta \in [0, 1]$  und  $p, q \in [1, \infty]$ :

$$\begin{aligned} \text{wenn } k > \ell: & C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{\ell,\beta}(\bar{\Omega}), \\ \text{wenn } k = \ell \text{ und } \gamma \geq \beta: & C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{\ell,\beta}(\bar{\Omega}), \\ \text{wenn } k \geq m: & C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega), \\ \text{wenn } k \geq m \text{ und } p \geq q: & W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,q}(\Omega). \end{aligned}$$

Die Notation „ $\hookrightarrow$ “ ist nicht Standard. Manchmal schreibt man auch beispielsweise  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \subset C^{\ell,\beta}(\bar{\Omega})$ , meint dann jedoch nicht nur, dass die eine Menge die andere enthält, sondern auch, dass die kanonische Abbildung  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^{\ell,\beta}(\bar{\Omega})$  stetig ist.

### 9.1.1 Eine Einbettung in einer Dimension

In einer Dimension haben wir in Lemma 6.2.7 schon gesehen, dass Funktionen  $u \in W^{1,p}(a, b)$  stetig sind, oder besser gesagt, dass man für jede Funktionenklasse in  $W^{1,p}(a, b)$  mit  $p > 1$  eine vertretende Funktion finden kann, die in  $C^0[a, b]$  liegt. Wenn wir die Funktionenklasse mit ihrem Vertreter identifizieren, kann man sagen, dass

$$W^{1,p}(a, b) \subset C^0[a, b].$$

Für die Einbettung soll man noch zeigen, dass

$$\|u\|_{C^0[a,b]} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(a,b)}. \quad (9.1)$$

<sup>1</sup>Einbettung = *imbedding* (U.S.), *embedding* (U.K.)

Schauen wir uns

$$v(x) = u(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b u(s) ds$$

an. Aus dem Lemma folgt, dass wir  $u$  und deshalb auch  $v$  stetig nehmen dürfen. Und weil  $v$  eine Nullstelle hat, sage  $x_0 \in [a, b]$ , finden wir, mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  wie im Beweis von Lemma 6.2.7, dass

$$\begin{aligned} \|v\|_{C^0[a,b]} &= \sup_{x \in [a,b]} |v(x)| \\ &= \sup_{x \in [a,b]} |v(x) - v(x_0)| = \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_{x_0}^x v'(s) ds \right| \\ &= \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_{x_0}^x u'(s) ds \right| \leq \int_a^b |u'(s)| ds \\ &\leq \left| \int_a^b 1 ds \right|^{\frac{1}{q}} \left| \int_a^b |u'(s)|^p ds \right|^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{q}} \|u'\|_{L^p(a,b)} \quad (9.2) \end{aligned}$$

und wir finden fast genauso

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(s) ds \right| &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |u(s)| ds \\ &\leq (b-a)^{\frac{1}{q}-1} \|u\|_{L^p(a,b)}. \quad (9.3) \end{aligned}$$

Zusammen ergibt (9.2) und (9.3), dass

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^0[a,b]} &= \sup_{x \in [a,b]} \left| v(x) + \frac{1}{b-a} \int_a^b u(s) ds \right| \\ &\leq \|v\|_{C^0[a,b]} + \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(s) ds \right| \\ &\leq (b-a)^{\frac{1}{q}-1} (1 + |b-a|) \|u\|_{W^{1,p}(a,b)}. \quad (9.4) \end{aligned}$$

Diese Ungleichung zeigt uns, dass (9.1) gilt. Aus (9.4) folgt übrigens für  $b_1 - a_1 < \delta \leq 1$ , dass

$$|u(a_1) - u(b_1)| \leq \sup_{a_1 \leq x, y \leq b_1} |u(x) - u(y)| \leq \delta^{\frac{1}{q}-1} 2 \|u\|_{W^{1,p}(a_1, b_1)} \leq \delta^{\frac{1}{q}-1} 2 \|u\|_{W^{1,p}(a, b)}$$

und weil  $\frac{1}{q} > 1$  gilt, liefert uns dies sogar eine Hölder-Stetigkeit von  $u$ .

Um auch in höheren Dimensionen derartige Sätze beweisen zu können, braucht man einige Abschätzungen.

### 9.1.2 Für $p < n$ von $W^{1,p}(\Omega)$ zu $L^q(\Omega)$

Aus der Definition folgt sofort, dass  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  und dass

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ für alle } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Die Frage ist, ob man das  $p$  in  $L^p(\Omega)$  noch etwas verbessern kann und der folgende Satz liefert uns die Antwort im Fall, dass  $p < n$ .

**Theorem 9.1.1 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung)** Sei  $n \in \mathbb{N}^+$  und  $p \in [1, n)$ . Für alle  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\|u\|_{L^{\frac{pn}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

**Beweis.** Angefangen wird mit  $p = 1$ . Weil  $u$  einen kompakten Träger hat, findet man

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial y_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) dy_i,$$

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i,$$

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i.$$

Nach  $x_1$  Integrieren liefert

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \int_{\mathbb{R}} \left( \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \quad (9.5)$$

Weil der erste Term im Integral nicht von  $x_1$  abhängt, kann man schreiben

$$(9.5) = \left( \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(y_1, x_2, \dots, x_n)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \quad (9.6)$$

Verwenden wir wiederholt die Hölder-Ungleichung, dann kann man zeigen, dass:

$$\int |a_2|^{\frac{1}{n-1}} \dots |a_n|^{\frac{1}{n-1}} dx \leq \left( \int |a_2| dx \right)^{\frac{1}{n-1}} \dots \left( \int |a_n| dx \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (9.7)$$

Diese Version von Hölder verwenden wir, um weiter abzuschätzen durch:

$$(9.6) \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(y_1, x_2, \dots, x_n)| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (9.8)$$

Wir haben jetzt von (9.5) bis (9.8) bewiesen, dass

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |\nabla u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u| dx_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (9.9)$$

Als nächsten Schritt integrieren wir (9.9) nach  $x_2$  und bemerken, dass bei dem ersten Term nach  $\Pi$ , also  $\left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u| dx_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}$  schon nach  $x_2$  integriert ist und dieser Term für das jetzige Integral als Konstante auszuklammern ist. Mit der Ungleichung in (9.7) folgert man dann aus (9.9), dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \left( \left( \int_{\mathbb{R}} |\nabla u| dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u| dx_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \right) dx_2 \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{2}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u| dx_i dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Wenn wir nach  $x_3$  integrieren, folgt aus (9.10), dass

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 dx_3 \leq \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u| dx_1 dx_2 dx_3 \right)^{\frac{3}{n-1}} \prod_{i=4}^n \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\nabla u| dx_i dx_1 dx_2 dx_3 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (9.11)$$

Wenn wir diese Abschätzungen fortsetzen, finden wir schlussendlich, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (9.12)$$

und damit haben wir das gewünschte Ergebnis im Falle  $p = 1$  bekommen.

Für  $p \in (1, n)$  geht man wie folgt vor: Man bemerkt, dass als schwache Ableitung gilt

$$\left| \nabla \left( |u|^{\frac{(n-1)p}{n-p}} \right) \right| = \frac{(n-1)p}{n-p} |u|^{\frac{(n-1)p}{n-p}-1} |\nabla u| = \frac{(n-1)p}{n-p} |u|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} |\nabla u|$$

und so aus (9.12) folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( |u|^{\frac{(n-1)p}{n-p}} \right)^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \left( |u|^{\frac{(n-1)p}{n-p}} \right) \right| dx \right)^{\frac{n}{n-1}} = \left( \frac{(n-1)p}{n-p} \right)^{\frac{n}{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n(p-1)}{n-p}} |\nabla u| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}. \quad (9.13)$$

Mit der Hölder-Ungleichung folgt

$$(9.13) \leq \left( \frac{(n-1)p}{n-p} \right)^{\frac{n}{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n(p-1)}{n-p} \frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{n}{n-1} \frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{n}{n-1} \frac{1}{p}} = \left( \frac{(n-1)p}{n-p} \right)^{\frac{n}{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n}{p} \frac{p-1}{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{n-1}{n-1} \frac{1}{p}}$$

und man findet, weil  $1 - \frac{n}{p} \frac{p-1}{n-1} = \frac{n-p}{pn} \frac{n}{n-1} > 0$ , dass

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{np}{n-p}} dx \right)^{\frac{n-p}{pn} \frac{n}{n-1}} \leq \left( \frac{(n-1)p}{n-p} \right)^{\frac{n}{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{n-1}{n-1} \frac{1}{p}}.$$

Diese Gleichung liefert genau

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

■

Das folgende Ergebnis ist bekannt als ein Sobolevscher Einbettungssatz:

**Korollar 9.1.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $\partial\Omega \in C^1$ . Sei  $p \in [1, n)$ . Dann gilt  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$  und es gibt sogar  $c = c(n, p, \Omega)$  derartig, dass

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq c(n, p, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ für alle } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Für solche  $\Omega$  und  $p$  gilt also

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega).$$

**Beweis.** Um Theorem 9.1.1 anwenden zu können, müssen wir die Funktion  $u$  von  $\Omega$  erst erweitern auf  $\mathbb{R}^n$  und dann approximieren mit Funktionen in  $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ . Das geht wie folgt: Weil  $\Omega$  beschränkt ist, sagen wir  $\bar{\Omega} \subset B_R(0)$ , und  $\partial\Omega \in C^1$  gilt, gibt es durch Lemma 8.2.6 einen stetigen Fortsetzungsoperator  $E^1 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , also  $E^1(u)|_\Omega = u$  und derart, dass für alle  $p, q \in (1, \infty)$  gilt:

$$\begin{aligned} \|E^1(u)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq C_E \|u\|_{L^q(\Omega)} \quad \text{und} \\ \|E^1(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq C_E \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Man kann annehmen, dass der Träger von  $E^1(u)$  für jede Funktion  $u$  in  $B_{R+1}(0)$  liegt.

Als Nächstes benutzt man die Friedrichs'sche Glättungsfunktion  $\varphi_{1/m}$  und findet eine Folge

$$u_m := \varphi_{1/m} * E^1(u) \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$$

derartig, dass  $u_m \rightarrow E^1(u)$  in  $W^{1,p}(B_{R+2}(0))$ . Wegen Theorem 9.1.1 gilt für  $m, k \rightarrow \infty$ , dass

$$\begin{aligned} \|u_m - u_k\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{(n-1)p}{n-p} \|\nabla(u_m - u_k)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \frac{(n-1)p}{n-p} \|\nabla(u_m - u_k)\|_{L^p(B_{R+2}(0))} \\ &\leq c(n, p, \Omega) \|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(B_{R+2}(0))} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\{u_m\}_{m=1}^\infty$  auch eine Cauchyfolge in  $L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)$  und  $u_m|_\Omega$  konvergiert zu einer Funktion  $v \in L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ . Weil

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|u - u_m\|_{L^p(\Omega)} + \|u_m - v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|u - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|u_m - v\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

folgt, dass  $u - v = 0$  und  $u = v \in L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ . Weil  $u_m \rightarrow E^1(u)$  in  $L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)$  und

$$\begin{aligned} \|u_m\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} &\leq \frac{(n-1)p}{n-p} \|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{(n-1)p}{n-p} \left( \|u_m - E^1(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + \|E^1(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\leq \frac{(n-1)p}{n-p} \left( \|u_m - E^1(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + C_E \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \right), \end{aligned}$$

gilt auch

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} &\leq \|E^1(u)\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|u_m - E^1(u)\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} + \|u_m\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|u_m - E^1(u)\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} + \frac{(n-1)p}{n-p} \|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

und mit Hilfe von  $\|E^1(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_E \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$  folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} &\leq \|u_m - E^1(u)\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} + \\ &\quad + \frac{(n-1)p}{n-p} \left( \|u_m - E^1(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} + C_E \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \right) \\ &\rightarrow \frac{(n-1)p}{n-p} C_E \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{für } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

und die Abschätzung ist bewiesen.  $\blacksquare$

**Korollar 9.1.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $p \in [1, n)$ . Dann gilt  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$  und es gibt sogar  $c = c(n, p, \Omega)$  derartig, dass

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq c(n, p, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

**Bemerkung 9.1.4** *Dieses Ergebnis ist dem letzten sehr ähnlich. Der Unterschied betrifft den Rand. Ist der Rand nicht  $C^1$ , dann gilt die Einbettung trotzdem noch für Funktionen in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , das heißt, für Funktionen  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , die auf eine schwache Art  $u = 0$  auf  $\partial\Omega$  erfüllen.*

**Beweis.** Weil  $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$  gibt es, unabhängig von der Regularität des Randes, eine Folge  $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$  mit  $\|u_m - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$ . Man kann diese Funktionen außerhalb  $\Omega$  durch 0 fortsetzen und verfährt weiter wie oben.

■

### 9.1.3 Für $p > n$ von $W^{1,p}(\Omega)$ zu $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$

**Theorem 9.1.5 (Morrey-Ungleichung)** *Sei  $n \in \mathbb{N}^+$  und  $p \in (n, \infty]$ . Dann gibt es  $c_{p,n} > 0$  so, dass für alle  $u \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$  gilt*

$$\|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq c_{p,n} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

**Beweis.** Für  $p = \infty$  findet man

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} &= \|u\|_{C^{0,1}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|}. \end{aligned}$$

Setzt man  $z = x - y$  und  $v(t) = u(y + tz)$ , so findet man mit dem Mittelwertsatz ein  $t \in (0, 1)$  derart, dass

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &= \frac{v(1) - v(0)}{1 - 0} \\ &= v'(t) = (x - y) \cdot \nabla u(y + tz). \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass

$$\sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

und das Ergebnis ist bewiesen im Fall  $p = \infty$ .

Für  $p < \infty$  nehmen wir ohne Verlust der Allgemeinheit erst  $y = 0$  und man fängt an, eine solche Abschätzung auf einer Kugel  $B_r(0)$  zu beweisen. Wie im Beweis von Theorem 9.1.1 ist der erste Schritt eine passende Beziehung zwischen  $u$  und  $\nabla u$  herzustellen. Für  $x \in \partial B_s(0)$  hat man

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &= \left| \int_{t=0}^1 \frac{\partial}{\partial t} (u(tx)) dt \right| \\ &= \left| \int_{t=0}^1 x \cdot (\nabla u)(tx) dt \right| \leq s \int_{t=0}^1 |\nabla u(tx)| dt \end{aligned}$$

und so auch

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_s(0)} |u(x) - u(0)| d\sigma_x &\leq s \int_{\partial B_s(0)} \int_{t=0}^1 |\nabla u(tx)| dt d\sigma_x = (9.14) \end{aligned}$$

Wir substituieren  $\omega = \frac{x}{|x|} = \frac{x}{s}$  und  $\rho = |tx| = ts$  und finden

$$\begin{aligned} (9.14) &= s \int_{|\omega|=1} \int_{\rho=0}^s |\nabla u(\rho\omega)| \frac{1}{s} d\rho s^{n-1} d\omega \\ &= s^{n-1} \int_{|\omega|=1} \int_{\rho=0}^s (|\nabla u(\rho\omega)| |\rho\omega|^{1-n}) \rho^{n-1} d\rho d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s^{n-1} \int_{B_s(0)} (|\nabla u(y)| |y|^{1-n}) dy \\
&\leq s^{n-1} \int_{B_r(0)} |\nabla u(y)| |y|^{1-n} dy.
\end{aligned}$$

Wir schreiben  $\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} 1 d\sigma$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
|\partial B_r(0)| &= \int_{\partial B_r(0)} 1 d\sigma = \omega_n r^{n-1} \\
|B_r(0)| &= \int_{B_1(0)} 1 dx = \frac{\omega_n}{n} r^n.
\end{aligned}$$

Das Integrieren mit  $s$  von 0 bis  $r$  liefert uns:

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r(0)} |u(x) - u(0)| dx \\
&\leq \left( \int_{B_r(0)} |\nabla u(y)| |y|^{1-n} dy \right) \left( \int_0^r s^{n-1} ds \right) \\
&= \frac{r^n}{n} \int_{B_r(0)} |\nabla u(y)| |y|^{1-n} dy \\
&\leq \frac{r^n}{n} \left( \int_{B_r(0)} |y|^{(1-n)\frac{p}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B_r(0)} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{r^n}{n} \left( \omega_n \int_0^r s^{-\frac{n-1}{p-1}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{B_r(0)} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{\omega_n^{1-\frac{1}{p}}}{n} \left( \frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} r^{n+1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B_r(0))}.
\end{aligned}$$

So finden wir für eine Abschätzung für  $|u(0)|$ , nämlich dass

$$\begin{aligned}
&|B_r(0)| |u(0)| \\
&\leq \int_{B_r(0)} |u(x)| dx + \int_{B_r(0)} |u(x) - u(0)| dx \\
&\leq |B_r(0)|^{1-1/p} \|u\|_{L^p(B_r(0))} + \\
&\quad + \frac{\omega_n^{1-1/p}}{n} \left( \frac{p-1}{p-n} \right)^{1-\frac{1}{p}} r^{n+1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B_r(0))}.
\end{aligned}$$

Ersetzen wir 0 wieder durch  $y$ , so folgern wir, dass für  $r = 1$  und beliebige  $y \in \mathbb{R}^n$ , folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
|u(y)| &\leq c_{n,p} \left( \|u\|_{L^p(B_1(0))} + \|\nabla u\|_{L^p(B_1(0))} \right) \leq \\
&\leq c_{n,p} \left( \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right) \leq \tilde{c}_{n,p} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

Wenn man anschließend das Supremum nimmt, findet man

$$\|u\|_{\infty} \leq \tilde{c}_{n,p} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (9.15)$$

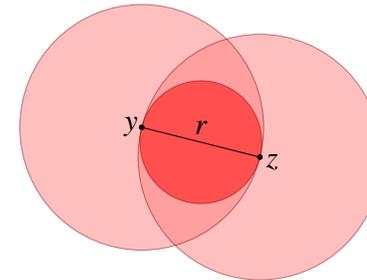


Abbildung 9.1:  $y$  und  $z$  und die Kugeln

Für den zweiten Term in der Norm müssen wir  $\frac{|u(y)-u(z)|}{|y-z|^\gamma}$  abschätzen. Sei nun  $y, z \in \mathbb{R}^n$  mit  $z \neq y$  und setze  $r = |y - z|$ . Siehe Abbildung 9.1.

Weil  $B_{r/2}(\frac{1}{2}(y+z)) \subset B_r(y) \cap B_r(z)$  finden wir, dass

$$\begin{aligned}
|B_{r/2}(0)| |u(y) - u(z)| &= \int_{B_{r/2}(\frac{1}{2}(y+z))} |u(y) - u(z)| dx \\
&\leq \int_{B_{r/2}(\frac{1}{2}(y+z))} |u(y) - u(x)| dx + \\
&\quad + \int_{B_{r/2}(\frac{1}{2}(y+z))} |u(x) - u(z)| dx \\
&\leq \int_{B_r(y)} |u(x) - u(y)| dx + \int_{B_r(z)} |u(x) - u(z)| dx \\
&\leq \frac{\omega_n^{1-1/p}}{n} \left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-\frac{1}{p}} r^{n+1-\frac{n}{p}} \left(\|\nabla u\|_{L^p(B_r(y))} + \|\nabla u\|_{L^p(B_r(z))}\right) \\
&\leq 2 \frac{\omega_n^{1-1/p}}{n} \left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-\frac{1}{p}} r^{n+1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B_r(y) \cup L^p(B_r(z)))},
\end{aligned}$$

und mit  $|B_{r/2}(0)| = \omega_n \left(\frac{1}{2}r\right)^{n-1}$  folgt

$$\frac{|u(y) - u(z)|}{|y - z|^{1-\frac{n}{p}}} \leq \hat{c}_{n,p} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (9.16)$$

Wenn wir in (9.16) das Supremum für  $y \neq z \in \mathbb{R}^n$  nehmen, gibt uns dies die passende Abschätzung:

$$[u]_{1-\frac{n}{p}} \leq \hat{c}_{n,p} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (9.17)$$

Kombiniert man (9.15) und (9.17), dann folgt:

$$\|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{\infty} + [u]_{1-\frac{n}{p}} \leq C_{n,p} \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

die Morrey-Ungleichung.  $\blacksquare$

**Korollar 9.1.6 (Einbettungssatz von Morrey)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $\partial\Omega \in C^1$ . Nehme an  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  mit  $p \in (n, \infty]$ . Dann gilt  $u \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\bar{\Omega})$  und es gibt  $c = c(n, p, \Omega)$  derartig, dass

$$\|u\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\bar{\Omega})} \leq c(n, p, \Omega) \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Also gilt

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(\bar{\Omega}).$$

**Beweis.** Man nehme wieder die Fortsetzung  $E^1(u)$  und man findet

$$u_m := \varphi_{1/m} * E^1(u) \rightarrow E^1(u) \text{ in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Wegen dieser Abschätzung folgt

$$\|u_m - u_k\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\bar{\Omega})} \leq C \|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

und dass  $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$  eine Cauchyfolge in  $C^{0,1-\frac{n}{p}}(\bar{\Omega})$  bildet. So hat  $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$  einen Limes  $v \in C^{0,1-\frac{n}{p}}(\bar{\Omega})$ . Weiter geht man ähnlich vor wie in dem Beweis von Korollar 9.1.2 mit nur einer Ausnahme, nämlich  $u = v$  f.ü. Man findet ja eigentlich nur, dass  $u$  einen  $C^{0,1-\frac{n}{p}}(\bar{\Omega})$ -Vertreter hat.  $\blacksquare$



## Funktionenräume und ihr Zusammenhang II

### 10.1 Morrey, Gagliardo, Sobolev und Nirenberg

Wir können die beiden Hauptergebnisse aus dem letzten Kapitel kombinieren, um weitere Einbettungssätze zu formulieren.

**Definition 10.1.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $X$  ein Hölder- oder Sobolev-Raum auf  $\Omega$ . Wir definieren den Regularitätsindex  $N(X)$  wie folgt:

- Für  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  mit  $k \in \mathbb{N}$  und  $\gamma \in [0, 1]$  setzen wir

$$N(C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})) = (k, k + \gamma).$$

- Für  $W^{k,p}(\Omega)$  mit  $k \in \mathbb{N}$  und  $p \in [1, \infty]$  setzen wir

$$N(W^{k,p}(\Omega)) = (k, k - n/p).$$

- Wir schreiben  $N(X) \succeq N(Y)$ , wenn  $N(X)_1 \geq N(Y)_1$  und  $N(X)_2 > N(Y)_2$ .

**Theorem 10.1.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^1$ . Seien  $X$  und  $Y$  Hölder- oder Sobolev-Räume wie in Definition 10.1.1. Dann gilt folgendes:

$$N(X) \succeq N(Y) \Rightarrow X \hookrightarrow Y.$$

**Bemerkung 10.1.3** Meistens braucht man für  $X \hookrightarrow Y$  nur  $N(X) \geq N(Y)$ . Es gibt jedoch einige Ausnahmen:

- Für  $p = n \neq 1$  gibt es keine Einbettung von  $W^{k,n}(\Omega)$  nach  $W^{k-1,\infty}(\Omega)$ .

Bemerke, dass

$$N(W^{k,n}(\Omega)) = (k, k - 1) \geq$$

$$(k - 1, k - 1) = N(W^{k-1,\infty}(\Omega)).$$

Für eine komplette Übersicht zu diesen Einbettungen verweisen wir auf das Buch von Adams und Fournier, [1, Theorem 4.12].

Übrigens gilt  $W^{k-1,\infty}(\Omega) = C^{k-1,1}(\bar{\Omega})$  im Sinne, dass jede Funktion in  $W^{k-1,\infty}(\Omega)$  einen Vertreter in  $C^{k-1,1}(\bar{\Omega})$  hat.

**Bemerkung 10.1.4** Man kann auch zeigen, dass  $X \hookrightarrow Y \Rightarrow N(X) \geq N(Y)$ .

**Bemerkung 10.1.5** Im folgenden Beweis werden Korollar 9.1.2 und Korollar 9.1.6 öfters verwendet, und das gelingt nur, wenn man auch in den Zwischenschritten nicht einem der in Bemerkung 10.1.3 genannten Fälle begegnet.

**Beweis.** Wir müssen 4 Fälle unterscheiden.

1) Wenn  $X = C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  und  $Y = W^{\ell,q}(\Omega)$ , dann folgt aus  $N(X) \geq N(Y)$ , dass  $k \geq \ell$ . Die Einbettung folgt sofort.

2) Wenn  $X = W^{k,p}(\Omega)$  und  $Y = W^{\ell,q}(\Omega)$ , dann bedeutet  $N(X) \geq N(Y)$ , dass

$$k \geq \ell \text{ und } k - \frac{n}{p} > \ell - \frac{n}{q}. \quad (10.1)$$

Für  $k = \ell$  folgt  $p > q$  und das Ergebnis folgt aus

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für  $k > \ell$  nehmen wir erst an, dass  $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$  und wir setzen  $m = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ . Wenn  $k \leq m + \ell$  gilt, findet man durch wiederholte Anwendung von Korollar 9.1.2, dass

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) &\hookrightarrow W^{k-1, \frac{np}{n-p}}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-2, \frac{np}{n-2p}}(\Omega) \hookrightarrow \dots \\ &\dots \hookrightarrow W^{\ell, \frac{np}{n-(k-\ell)p}}(\Omega) \end{aligned} \quad (10.2)$$

und die Bedingung in (10.1) liefert  $W^{\ell, \frac{np}{n-(k-\ell)p}}(\Omega) \hookrightarrow W^{\ell,q}(\Omega)$ . Wenn  $k > m + \ell$  gilt, findet man:

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) &\hookrightarrow W^{k-1, \frac{np}{n-p}}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-2, \frac{np}{n-2p}}(\Omega) \hookrightarrow \dots \\ &\dots \hookrightarrow W^{k-m, \frac{np}{n-mp}}(\Omega) \end{aligned} \quad (10.3)$$

und mit Korollar 9.1.6 dass

$$\begin{aligned} W^{k-m, \frac{np}{n-mp}}(\Omega) &\hookrightarrow C^{k-m-1, 1-\frac{n-mp}{p}}(\bar{\Omega}) \\ &\hookrightarrow C^{\ell, 1-\frac{n-mp}{p}}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow W^{\ell,q}(\Omega). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Wenn  $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$ , dann fangen wir an mit  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p-\varepsilon}(\Omega)$  für  $\varepsilon > 0$  aber genügend klein und benutzen den Spielraum, den wir durch die Ungleichung in (10.1) haben.

3) Wenn  $X = C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  und  $Y = C^{\ell,\delta}(\bar{\Omega})$ , dann bedeutet  $N(X) \geq N(Y)$ , dass entweder  $k > \ell$  oder  $k = \ell$  mit  $\gamma > \delta$ .

Wir müssen hier  $|u(x) - u(y)|$  durch  $|x - y|$  abschätzen und wenn  $\Omega$  konvex ist, gilt mit dem Mittelwertsatz, dass

$$|u(x) - u(y)| = |(x - y) \cdot \nabla u(\xi)| \leq |x - y| |\nabla u(\xi)|$$

für ein  $\xi$  auf der Verbindungsstrecke von  $x$  nach  $y$ . Wenn jedoch  $\Omega$  nicht konvex ist, dann liegt diese kürzeste Verbindungsstrecke möglicherweise außerhalb von  $\Omega$ .

Nur wenn  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  gilt, gibt es eine Konstante  $c_\Omega$  so, dass es für jedes Paar Punkte  $x, y \in \bar{\Omega}$  eine glatte Kurve  $\kappa : [0, 1] \rightarrow \Omega$  gibt, mit  $\kappa(0) = x$  und  $\kappa(1) = y$ , bei der

$$|x - y| \leq \ell_{x,y} := \int_0^1 |\kappa'(t)| dt \leq c_\Omega |x - y|.$$

Wenn man diese Kurve nach Bogenlänge umparametrisiert und dann den Mittelwertsatz anwendet, gibt es  $s \in (0, \ell_{x,y})$  derart, dass

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= |u(\kappa(\ell_{x,y})) - u(\kappa(0))| \\ &= \left| \ell_{x,y} \frac{d}{dt} u(\kappa(t)) \Big|_{t=s} \right| = \ell_{x,y} |\nabla u(\kappa(s)) \cdot \kappa'(s)| \\ &\leq \ell_{x,y} |\nabla u(\kappa(s))| \leq c_\Omega |x - y| |\nabla u(\kappa(s))|. \end{aligned}$$

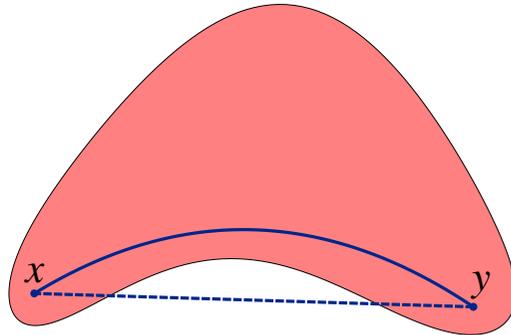


Abbildung 10.1: Bei nicht-konvexen Gebieten muss man mal einen Umweg nehmen. Wenn  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet ist und  $\partial\Omega \in C^{0,1}$  gilt, dann kann man immer einen solchen Umweg finden mit Länge  $\ell_{x,y} \leq c_\Omega |x - y|$  für eine feste Konstante  $c_\Omega$ .

Es folgt, dass

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \leq c_\Omega \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Weil auch folgendes gilt für  $0 \leq \gamma < \delta \leq 1$ ,

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \leq \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\delta} \sup_{a,b \in \Omega} |a - b|^{\delta - \gamma},$$

findet man die betreffenden Einbettungen.

4) Wenn  $X = W^{k,p}(\Omega)$  und  $Y = C^{\ell,\gamma}(\bar{\Omega})$ , dann bedeutet  $N(X) \supseteq N(Y)$ , dass

$$k - \frac{n}{p} > \ell + \gamma \tag{10.5}$$

und es folgt, dass

$$k - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor > \ell.$$

Wiederum mit  $m = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$  und  $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ , finden wir wie in (10.3) und (10.4), dass

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-m-1, 1-\frac{n-mp}{p}}(\bar{\Omega}).$$

Wenn  $k - m - 1 = \ell$ , dann sind wir fertig weil (10.5) liefert, dass

$$\gamma < 1 - \frac{n - mp}{p}.$$

Wenn  $k - m - 1 > \ell$ , dann sind wir fertig mit Hilfe des dritten Abschnitts. Auch hier können wir im Falle, dass  $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$  gilt, einen  $\varepsilon$ -Spielraum einbauen. ■

## 10.2 Altes und Neues zur Stetigkeit

Bevor wir uns mit der Kompaktheit beschäftigen, wiederholen und erweitern wir mal kurz einige der verschiedenen Sorten von Stetigkeit.

**Definition 10.2.1** Seien  $X$  und  $V$  normierte Vektorräume.

1. Die Funktion  $f : X \rightarrow V$  heißt **stetig in**  $x \in X$ , wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in X : \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

2. Die Funktion  $f : X \rightarrow V$  heißt **stetig**, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists \delta > 0 \forall y \in X : \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

3. Die Funktion  $f : X \rightarrow V$  heißt **gleichmäßig stetig**<sup>1</sup>, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \forall y \in X : \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

<sup>1</sup>gleichmäßig stetig = *uniformly continuous*

Für die Gleichmäßigkeit bezüglich einer Indexmenge verwendet man gleichgradig:

1. Die Funktionenmenge  $\{f_i : X \rightarrow V\}_{i \in I}$  heißt **gleichgradig stetig in**  $x \in X$ , wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall i \in I \forall y \in X : \\ \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon.$$

2. Die Funktionenmenge  $\{f_i : X \rightarrow V\}_{i \in I}$  heißt **gleichgradig stetig<sup>2</sup>**, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists \delta > 0 \forall i \in I \forall y \in X : \\ \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon.$$

3. Die Funktionenmenge  $\{f_i : X \rightarrow V\}_{i \in I}$  heißt **gleichmäßig gleichgradig stetig**, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \forall i \in I \forall y \in X : \\ \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon.$$

Für  $V = \mathbb{R}$  gibt es auch noch halbstetige<sup>3</sup> Funktionen:

**Definition 10.2.2** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum.

1. Die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **unterhalbstetig<sup>4</sup>**, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists \delta > 0 \forall y \in X : \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow f(y) > f(x) - \varepsilon.$$

2. Die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **oberhalbstetig<sup>5</sup>**, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X \exists \delta > 0 \forall y \in X : \|x - y\|_X < \delta \Rightarrow f(y) < f(x) + \varepsilon.$$

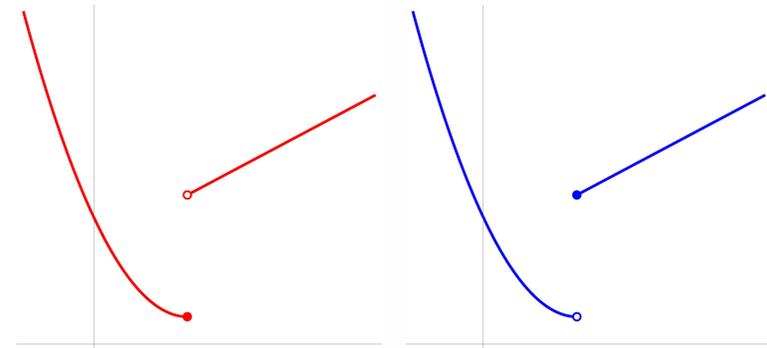


Abbildung 10.2: Unterhalbstetig und oberhalbstetig

**Aufgabe 10.1** Stetigkeit und Halbstetigkeit sind auch mit Hilfe von Folgen zu definieren. Zum Beispiel kann man auch sagen, dass  $f$  unterhalbfolgenstetig in  $x \in X$  ist, wenn für jede Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  gilt

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \geq f(x).$$

Zeige Folgendes für  $f : V \rightarrow Y$  mit  $V \subset X$  und  $X, Y$  normierten Vektorräume:

1. Stetig und folgenstetig sind äquivalent.
2. Unterhalbstetig und unterhalbfolgenstetig sind äquivalent.

Schlussendlich folgt dann noch schwache Folgenstetigkeit:

<sup>2</sup>gleichgradig stetig = *equicontinuous*

<sup>3</sup>halbstetig = *semicontinuous*

<sup>4</sup>unterhalbstetig = *lower semicontinuous*

<sup>5</sup>oberhalbstetig = *upper semicontinuous*

**Definition 10.2.3** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum.

1. Die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **schwach folgenstetig** in  $x \in X$ , wenn für jede Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  mit  $x_k \rightarrow x$  in  $X$  gilt, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$ .
2. Die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **schwach unterhalbfolgenstetig**<sup>6</sup> in  $x \in X$ , wenn für jede Folge  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$  mit  $x_k \rightarrow x$  in  $X$  gilt, dass  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \geq f(x)$ .

Vielleicht tönt diese letzte Definition wie die marode Marke eines masochistischen Mathematikers, aber es wird sich zeigen, dass genau diese Definition eine wichtige Rolle spielt in der Variationsrechnung.

**Bemerkung 10.2.4** Übrigens ist schwach folgenstetig stärker als folgenstetig, denn es gibt im Allgemeinen mehr Folgen  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $x_k \rightarrow x$ , als Folgen mit  $x_k \rightarrow x$ . Hier ist schwächer also stärker (2. Korinther 12:9-10).

## 10.3 Kompakte Abbildungen

Eine Teilmenge  $K$  von einem topologischen Vektorraum  $X$  heißt kompakt, wenn für jede Überdeckung von  $K$  mit offenen Mengen  $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$  endlich viele dieser offenen Mengen schon reichen, um  $K$  zu überdecken. Für einen normierten Vektorraum ist die folgende Definition oft bequemer:

<sup>6</sup>schwach unterhalbfolgenstetig = *weakly sequentially lower semicontinuous*

**Definition 10.3.1** Sei  $X$  ein normierter Vektorraum. Die Teilmenge  $K$  heißt **kompakt**, wenn jede Folge in  $K$  einen Häufungswert in  $K$  hat, oder noch anders gesagt, wenn jede Folge in  $K$  eine konvergente Teilfolge hat mit Limes in  $K$ .

**Bemerkung 10.3.2** Die Teilmenge  $M$  heißt **präkompakt**, wenn jede Folge in  $M$  eine konvergente Teilfolge hat. Anders gesagt, wenn  $\overline{M}$  kompakt ist.

**Bemerkung 10.3.3** Kompaktheit in der hier stehenden Definition heißt eigentlich folgenkompakt<sup>7</sup>. Für einen normierten Raum ist folgenkompakt äquivalent mit kompakt.

**Definition 10.3.4** Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume.

1. Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **kompakt**<sup>8</sup>, wenn für jede beschränkte Menge  $A$  gilt, dass  $f(A)$  kompakt ist.
2. Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt **vollstetig**<sup>9</sup>, wenn  $f$  stetig und kompakt ist.

**Aufgabe 10.2** Zeigen Sie, dass eine kompakte lineare Funktion vollstetig ist.

## 10.4 Kompakte Einbettungen

Von Minimalfolgen kann man oft zeigen, dass sie beschränkt sind in einem bestimmten Vektorraum. Ist dieser Raum kompakt eingebettet in einem zweiten Raum, der ein Banachraum

<sup>7</sup>folgenkompakt = *sequentially compact*

<sup>8</sup>kompakt = *compact*

<sup>9</sup>vollstetig = *completely continuous*

ist, dann kann man folgern, dass die Minimalfolge jedenfalls eine in dem zweiten Raum konvergente Teilfolge hat. Der dazugehörige Limes könnte ein Kandidat sein für ein Minimum. Mehr dazu finden Sie in dem nächsten Kapitel. In diesem Abschnitt stellen wir einige solcher kompakten Einbettungen vor.

**Theorem 10.4.1** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt  $\partial\Omega \in C^1$ . Seien  $k, \ell \in \mathbb{N}$  und  $\gamma, \delta \in [0, 1]$ .*

*Wenn  $k + \gamma > \ell + \delta$ , dann ist  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{\ell,\delta}(\bar{\Omega})$  kompakt.*

**Beweis.** Es reicht, wenn wir zeigen, dass  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,0}(\bar{\Omega})$  kompakt ist für  $\gamma > 0$  und dass  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\delta}(\bar{\Omega})$  kompakt ist für  $\gamma > \delta$ .

Wenn wir eine beschränkte Menge  $A$  in  $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$  nehmen, sagen wir

$$\sup_{f \in A} \|f\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq M,$$

dann gilt für alle  $f \in A$ , dass

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\gamma.$$

Dann sind die Funktionen aus  $A$  gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig gleichgradig stetig. Aus dem Satz von Arzela-Ascoli (Siehe Theorem D.5) folgt, dass jede Folge in  $A$  eine in  $C(\bar{\Omega})$  konvergente Teilfolge hat, die sogar gleichmäßig konvergiert. Das heißt, dass  $A$  präkompakt in  $C(\bar{\Omega})$  ist.

Für  $k > 0$  und für eine durch  $M$  beschränkte Menge  $A$  in  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ , finden wir für jede Folge  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , dass die eine in  $C(\bar{\Omega})$  konvergente Teilfolge hat. Für diese Teilfolge gibt es eine weitere Teilfolge derart, dass  $\{\partial_1 f_{j_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  in  $C(\bar{\Omega})$  konvergiert usw. Wir finden so eine Teilfolge, wiederum  $\{\partial^\alpha f_{j_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$

genannt, die für jedes  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  in  $C(\bar{\Omega})$  konvergiert. Die gleichmäßige Konvergenz zeigt uns sogar, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \partial^\alpha f_{j_m} = \partial^\alpha \left( \lim_{m \rightarrow \infty} f_{j_m} \right).$$

Dann gilt  $f := \lim_{m \rightarrow \infty} f_{j_m} \in C^k(\bar{\Omega})$  und es folgt, dass  $A$  präkompakt ist in  $C^k(\bar{\Omega})$ .

Für  $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\delta}(\bar{\Omega})$  reicht dies noch nicht. Es reicht aber wenn wir zeigen können, dass  $\{f_{j_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist in  $C^{k,\delta}(\bar{\Omega})$ . Und dafür reicht es, wenn wir zeigen, dass für  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$

$$[\partial^\alpha f_{j_m} - \partial^\alpha f_{j_\ell}]_\delta = \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|\partial^\alpha (f_{j_m}(x) - f_{j_\ell}(x)) - \partial^\alpha (f_{j_m}(y) - f_{j_\ell}(y))|}{|x - y|^\delta}$$

nach 0 konvergiert für  $k, \ell \rightarrow \infty$ . Für  $u \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$  und  $\delta \in (0, \gamma)$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\delta} &= \left( \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right)^{\delta/\gamma} |u(x) - u(y)|^{1-\delta/\gamma} \\ &\leq \left( \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right)^{\delta/\gamma} (|u(x)| + |u(y)|)^{1-\delta/\gamma}, \end{aligned}$$

und wir finden

$$[u]_\delta \leq [u]_\gamma^{\delta/\gamma} (2\|u\|_\infty)^{1-\delta/\gamma}.$$

Für  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset A$  gilt  $\|f_i - f_j\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq 2M$  und es folgt für die in  $C^k(\bar{\Omega})$  konvergierende Teilfolge  $\{f_{j_m}\}_{j \in \mathbb{N}}$ , dass

$$[\partial^\alpha f_{j_m} - \partial^\alpha f_{j_\ell}]_\delta \leq (2M)^{\delta/\gamma} \left( 2\|f_{j_m} - f_{j_\ell}\|_{C^k(\bar{\Omega})} \right)^{1-\delta/\gamma}.$$

Das bedeutet, diese Teilfolge ist auch eine Cauchy-Folge in  $C^{k,\delta}(\bar{\Omega})$  und weil  $C^{k,\delta}(\bar{\Omega})$  vollständig ist, konvergiert diese Teilfolge in  $C^{k,\delta}(\bar{\Omega})$ . ■

**Theorem 10.4.2 (Rellich-Kondrachov)** Sei  $p, q \in [1, \infty]$ ,  $\gamma \in [0, 1]$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit  $\partial\Omega \in C^1$ .

- Wenn  $p < n$  und  $q < \frac{np}{n-p}$  gilt, dann ist die Einbettung  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  kompakt.
- Wenn  $p > n$  und  $\gamma < 1 - \frac{n}{p}$  gilt, dann ist die Einbettung  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$  kompakt.

**Bemerkung 10.4.3** Ähnliches gilt auch für Hölder- und Sobolev-Räume höherer Ordnung. Wenn  $X, Y$  aus den Klassen der Hölder-Räume  $C^{k,\delta}(\bar{\Omega})$  und Sobolev-Räume  $W^{k,p}(\Omega)$  genommen werden mit  $N(X) \succeq N(Y)$ , dann ist die Einbettung  $X \hookrightarrow Y$  kompakt. Weiter kann man zeigen, dass wenn die Einbettung  $X \hookrightarrow Y$  existiert und  $N(X)_2 = N(Y)_2$ , diese Einbettung nicht kompakt ist.

**Beweis.** Wir werden anfangen mit der zweiten Aussage. Weil  $\gamma < 1 - \frac{n}{p}$  gilt, gibt es  $\delta \in (\gamma, 1 - \frac{n}{p})$ . Theorem 10.4.1 sagt aus, dass  $C^{0,\delta}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$  kompakt ist. Wegen Korollar 9.1.6 gilt  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\delta}(\bar{\Omega})$  und das Ergebnis folgt, wenn wir beides kombinieren.

Die erste Aussage ist wesentlich schwieriger zu beweisen. Sei  $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $W^{1,p}(\Omega)$ , sagen wir  $\|f_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq M$ . Weil  $\partial\Omega \in C^1$  angenommen worden ist, können wir diese Funktionen fortsetzen zu  $Ef_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  und wir dürfen annehmen, dass  $\text{support}(Ef_m) \subset V$  für ein

beschränktes Gebiet  $V$ , das  $\Omega$  enthält. Wir glätten diese  $Ef_m$  mit dem Friedrichs'schen Glätter und definieren

$$f_m^\varepsilon := \varphi_\varepsilon * Ef_m.$$

Wir wissen, dass  $\|f_m^\varepsilon - Ef_m\|_{L^q(V)} \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \downarrow 0$  aber möchten noch zeigen, dass die Konvergenz gleichmäßig bezüglich  $m$  ist. Für  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{support}(v) \subset \tilde{V}$  mit  $V \subset\subset \tilde{V}$  gilt

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(x) - v(x) &= \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(z) (v(x+z) - v(x)) dz \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(z) \int_{t=0}^1 \left( \frac{d}{dt} v(x+tz) \right) dt dz \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(z) \int_{t=0}^1 (\nabla v(x+tz) \cdot z) dt dz \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{V}} |v^\varepsilon(x) - v(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(z) \int_{t=0}^1 \varepsilon |\nabla v(x+tz)| dt dz dx \\ &= \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon(z) \int_{t=0}^1 \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x+tz)| dx dt dz \\ &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)| dx = \varepsilon \int_{\tilde{V}} |\nabla v(x)| dx \\ &\leq \varepsilon \left| \tilde{V} \right|^{1-\frac{1}{p}} \left( \int_{\tilde{V}} |\nabla v(x)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Weil man  $Ef_m \in W^{1,p}(V)$  durch  $v$  wie oben approximieren kann, gilt auch

$$\|f_m^\varepsilon - Ef_m\|_{L^1(V)} \leq c\varepsilon \|Ef_m\|_{W^{1,p}(V)} \leq \tilde{c}\varepsilon \|f_m\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

mit  $\tilde{c}$  unabhängig von  $m$ . Außerdem gilt für  $p^* = \frac{np}{n-p}$  und  $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{p^*}$  für ein  $\theta \in (0, 1)$ , dass

$$\|u\|_{L^q(V)} \leq \|u\|_{L^1(V)}^\theta \|u\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}. \quad (10.6)$$

In Theorem 6.3.5 haben wir gesehen, dass  $\|f_m^\varepsilon\|_{L^1(V)} \leq \|Ef_m\|_{L^1(V)}$ . So finden wir mit der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev Ungleichung, dass

$$\begin{aligned} \|f_m^\varepsilon - Ef_m\|_{L^q(V)} &\leq \|f_m^\varepsilon - Ef_m\|_{L^1(V)}^\theta \|f_m^\varepsilon - Ef_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta} \\ &\leq \left(\tilde{c}\varepsilon \|f_m\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)^\theta \left(2\|Ef_m\|_{L^{p^*}(V)}\right)^{1-\theta} \leq \\ &\leq C\varepsilon^\theta \|f_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq CM\varepsilon^\theta. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Als nächsten Schritt möchten wir zeigen, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  die Funktionen  $\{f_m^\varepsilon\}_{m \in \mathbb{N}}$  die Bedingungen von Arzela-Ascoli erfüllen. Die Beschränktheit folgt aus

$$\begin{aligned} |f_m^\varepsilon(x)| &= |(\varphi_\varepsilon * Ef_m)(x)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x-y) |Ef_m(y)| dy \\ &\leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(B_\varepsilon(0))} \|Ef_m\|_{L^1(V)} \\ &\leq c\varepsilon^{-n} \|f_m\|_{L^1(\Omega)} \leq c_1 M \varepsilon^{-n} \end{aligned}$$

und die gleichgradige Stetigkeit aus

$$\begin{aligned} |\nabla f_m^\varepsilon(x)| &= |(\nabla \varphi_\varepsilon * Ef_m)(x)| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_\varepsilon(x-y)| |Ef_m(y)| dy \\ &\leq \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(B_\varepsilon(0))} \|Ef_m\|_{L^1(V)} \\ &\leq c\varepsilon^{-n-1} \|f_m\|_{L^1(\Omega)} \leq c_1 M \varepsilon^{-n-1}. \end{aligned}$$

Wegen (10.7) gibt es  $\varepsilon_1 > 0$  derart, dass für  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$  gilt

$$\|f_m^\varepsilon - Ef_m\|_{L^q(V)} < \frac{1}{2}.$$

Mit Arzela-Ascoli gibt es:

eine Teilfolge  $\left\{f_{m_1,k}^{\varepsilon_1}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$  der Folge  $\{f_m^{\varepsilon_1}\}_{m \in \mathbb{N}}$ ,  
die gleichmäßig konvergiert in  $C(\bar{V})$ .

Dann gilt insbesondere, dass  $\{f_{m_1,k}^{\varepsilon_1}\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^q(V)$  ist. Wegen (10.7) gibt es  $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$  derart, dass für  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$  gilt

$$\|f_m^\varepsilon - Ef_m\|_{L^q(V)} < \frac{1}{4}.$$

Mit Arzela-Ascoli gibt es:

eine Teilfolge  $\left\{f_{m_2,k}^{\varepsilon_2}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$  der Folge  $\left\{f_{m_1,k}^{\varepsilon_2}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  
die gleichmäßig konvergiert in  $C(\bar{V})$ .

Dann gilt insbesondere:

$\left\{f_{m_2,k}^{\varepsilon_2}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy-Folge in  $L^q(V)$ .

Dieses Prozedere setzen wir fort.

Wir betrachten nun die Folge  $\{f_{m_k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Sei  $\delta > 0$ . Wir nehmen  $j$  derart, dass für  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j]$  gilt

$$\|f_m^\varepsilon - Ef_m\|_{L^q(V)} < \frac{1}{3}\delta.$$

und finden für  $\ell > k$ , dass

$$\begin{aligned} \|f_{m_k,k} - f_{m_\ell,\ell}\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|Ef_{m_k,k} - Ef_{m_\ell,\ell}\|_{L^q(V)} \\ &\leq \|f_{m_k,k}^{\varepsilon_j} - Ef_{m_k}\|_{L^q(V)} + \|f_{m_k,k}^{\varepsilon_j} - f_{m_\ell,\ell}^{\varepsilon_j}\|_{L^q(V)} \\ &\quad + \|f_{m_\ell,\ell}^{\varepsilon_j} - Ef_{m_\ell}\|_{L^q(V)} \\ &\leq \frac{2}{3}\delta + \|f_{m_k,k}^{\varepsilon_j} - f_{m_\ell,\ell}^{\varepsilon_j}\|_{L^q(V)}. \end{aligned}$$

Weil  $\{f_{m_j,k}^{\varepsilon_j}\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^q(V)$  ist, und  $\{f_{m_k,k}^{\varepsilon_j}\}_{k \geq j}$  eine Teilfolge ist, kann man zeigen, dass es  $k_j$  gibt derart, dass für  $k, \ell \geq j$  gilt  $\|f_{m_k,k}^{\varepsilon_j} - f_{m_\ell,\ell}^{\varepsilon_j}\|_{L^q(V)} < \frac{1}{3}\delta$ . Weil wir dies für jedes  $\delta > 0$  zeigen können, folgt, dass  $\{f_{m_k,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist in  $L^q(\Omega)$ . ■



## Die direkten Methoden

### 11.1 Drei Hauptbestandteile

#### 11.1.1 Koerzitiv, reflexiv und schwach unterhalbstetig

Um die Existenz eines Minimums für das Funktional  $J$  im Banachraum  $X$  zu beweisen, benutzt man oft die folgenden drei Bestandteile:

- **Koerzitivität:**<sup>1</sup>

Nehmen wir an, dass  $J$  wohldefiniert ist auf  $X$  und eine untere Schranke hat. Damit gibt es ein Infimum von  $J$  auf  $X$  und wenn es ein Infimum gibt, dann gibt es eine Minimalfolge. Eine Folge  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  heißt Minimalfolge, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \inf_{u \in X} J(u).$$

**Definition 11.1.1** Das Funktional  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **koer-**

<sup>1</sup>Koerzitivität = *coercivity*, *koerzitiv* = *coercive*

*zitiv*, wenn

$$\|u\|_X \rightarrow \infty \implies J(u) \rightarrow \infty,$$

oder genauer gesagt: Für alle  $N > 0$  gibt es  $M_N > 0$  derart, dass

$$\|u\|_X > M_N \implies J(u) > N.$$

Aus der Koerzitivität folgt, dass eine Minimalfolge gleichmäßig beschränkt ist: Wenn

$$J(u_k) \rightarrow I := \inf_{u \in X} J(u) \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

dann gilt für  $n$  genügend groß, dass  $J(u_k) \leq I + 1$  und so

$$\|u_k\|_X \leq M_{I+1}.$$

Manchmal wird Koerzitivität des Funktionals  $J$  auch definiert als:

Es gibt eine stetige Funktion  $p : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty \text{ und } J(u) \geq p(\|u\|_X).$$

Dann ist sowohl die untere Schranke als auch das Verhalten in  $\infty$  bestimmt.

Die Koerzitivität sorgt dafür, dass eine Minimalfolge uns nicht „davonrennt“:  $\|u_k\| \leq M$ .

- **Reflexiver Banachraum:**

$$X'' = X.$$

Dann sagt Kakutani (Theorem 5.3.13), dass jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge hat. Wenn das Funktional außerdem nach unten beschränkt und koerzitiv ist, finden wir, dass eine Minimalfolge  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  beschränkt ist in  $X$  und damit eine schwach konvergente Teilfolge  $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  hat:

Es gibt also  $\bar{u} \in X$  derart, dass  $u_{k_m} \rightharpoonup \bar{u}$  in  $X$ .

Die Reflexivität liefert einen Kandidaten  $\bar{u}$  für ein Minimum.

- **Schwach Unterhalbfolgenstetigkeit:**

$$v_k \rightharpoonup v \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} J(v_k) \geq J(v).$$

Wenn  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Minimalfolge in  $X$  ist, ist auch jede Teilfolge  $\{u_{k_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  eine Minimalfolge und es gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(u_{k_m}) = \inf_{u \in X} J(u).$$

Wegen der unteren Schranke und der Koerzitivität von  $J$ , und wegen der Reflexivität von  $X$ , gibt es eine schwach

konvergente Minimalfolge und man findet mit der schwachen Unterhalbfolgenstetigkeit, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(u_{k_m}) = \liminf_{m \rightarrow \infty} J(u_{k_m}) \geq J(\bar{u}).$$

Es folgt, dass

$$J(\bar{u}) \geq \inf_{u \in X} J(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} J(u_{k_m}) \geq J(\bar{u})$$

und daher

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in X} J(u) = \min_{u \in X} J(u).$$

Der Kandidat erfüllt unsere Wünsche: er liefert ein Minimum.

Weiter soll noch bemerkt werden, dass Stetigkeit nicht ausreicht. Wir haben nämlich keine konvergente Folge, sondern bloß eine schwach konvergente Folge. Und wieso verlangen wir nur Halbstetigkeit? Die Antwort ist, dass man meistens halt nicht mehr erwarten kann.

Wir fassen dies zusammen im folgenden Ergebnis, das man den Hauptsatz für die direkten Methoden nennen könnte:

**Theorem 11.1.2 (Existenz eines Minimums)** Sei  $X$  ein reflexiver Banachraum und sei das Funktional  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Wenn  $J$  nach unten beschränkt, koerzitiv und schwach unterhalbfolgenstetig ist, dann hat  $J$  ein Minimum.

**Bemerkung 11.1.3** Man kann  $X$  auch ersetzen durch eine Teilmenge  $A \subset X$ , wenn diese Teilmenge abgeschlossen ist bezüglich der schwachen Topologie, das heißt, wenn aus  $A \ni u_k \rightharpoonup u$  folgt, dass  $u \in A$ .

### 11.1.2 Anwendung auf ein Dirichlet-Problem

Damit wird oft folgendes Randwertproblem angedeutet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.1)$$

wobei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  ist und die Funktionen  $f$  und  $g$  vorgeschrieben sind. Eine dazu passende variationelle Formulierung ist folgende:

Finde ein Minimum für

$$J : \{u = u_1 + u_g; u_1 \in W_0^{1,2}(\Omega)\} \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei  $u_g \in W^{1,2}(\Omega)$  so ist, dass  $Tu_g = g$  und

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \right) dx. \quad (11.2)$$

Damit dieses Funktional wohldefiniert ist, nehmen wir  $f \in L^2(\Omega)$  und legen statt  $g$  die Funktion  $u_g \in W^{1,2}(\Omega)$  fest.

#### Homogene Randwerte

„Homogene Randwerte“ bedeutet, dass  $u_g = 0$ . Das heißt, wir suchen ein Minimum für  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch (11.2).

1. **Koerzitiv.** Die Ungleichung von Poincaré besagt, es gibt  $C_P \in \mathbb{R}^+$  so, dass

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq C_P \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Damit kann man zeigen, dass, anstelle der Standardnorm  $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$  auch  $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ , definiert durch

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2},$$

als Norm benutzt werden darf. Anders gesagt  $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$  und  $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$  sind äquivalente Normen für  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Mit Young's Ungleichung findet man als nächstes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u f dx &= \int_{\Omega} (\varepsilon^{1/2} u) (\varepsilon^{-1/2} f) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Nimmt man  $\varepsilon = \frac{1}{2} C_P^{-1}$ , so folgt

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \left( \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} C_P \right) \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - C_P \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

und Koerzitivität.

2. **Reflexiver Banachraum.**  $W_0^{1,2}(\Omega)$  ist sogar ein Hilbertraum. Man darf also annehmen, dass es eine schwach konvergente Minimalfolge gibt.
3. **Schwach unterhalbfolgenstetig.** Sei  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$  eine schwach konvergente Folge mit  $\bar{u}$  als schwachen Li-

mes. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 & J(u_k) - J(\bar{u}) \\
 &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla u_k|^2 - |\nabla \bar{u}|^2) dx - \int_{\Omega} f (u_k - \bar{u}) dx \\
 &= \int_{\Omega} \nabla (u_k - \bar{u}) \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla (u_k - \bar{u})|^2 dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} f (u_k - \bar{u}) dx \\
 &\geq \int_{\Omega} \nabla (u_k - \bar{u}) \cdot \nabla \bar{u} dx - \int_{\Omega} f (u_k - \bar{u}) dx
 \end{aligned}$$

Weil  $u_k \rightharpoonup \bar{u}$  in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ , folgt  $\int_{\Omega} \nabla (u_k - \bar{u}) \cdot \nabla \bar{u} dx \rightarrow 0$  und  $\int_{\Omega} f (u_k - \bar{u}) dx \rightarrow 0$ . Angewendet auf die oben genannte Minimalfolge finden wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) \geq J(\bar{u})$ . Also gilt

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u).$$

Damit haben wir erreicht was wir wollten: Existenz eines Minimums.

Es sei noch bemerkt, dass im Allgemeinen die Ungleichung  $\int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla (u_k - \bar{u})|^2 dx \geq 0$  in (3) nicht ersetzt werden kann durch  $\int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla (u_k - \bar{u})|^2 dx \rightarrow 0$ . Das letztere würde eben aussagen, dass  $\|u_k - \bar{u}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0$  und die Minimalfolge würde stark konvergieren. Ohne weitere Argumente wird so etwas nicht zutreffen.

Wir haben folgendes bewiesen:

**Proposition 11.1.4** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann hat  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert in (11.2), ein Minimum.*

## Inhomogene Randwerte

**Aufgabe 11.1** *Zeigen Sie: Es gibt ein Minimum auch für den Fall  $u_g \neq 0$ .*

## Ähnliche Funktionale

**Aufgabe 11.2** *Sei  $f \in L^2(\Omega)$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Für welche der folgenden Probleme hat man die Existenz eines Minimums? Braucht man dazu zusätzliche Bedingungen für  $f$  oder  $c$ ?*

1.  $\inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + u^2 - fu) dx ;$
2.  $\inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - fu) dx ;$
3.  $\inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - cu^2 - fu) dx .$

### 11.1.3 Ein semilineares Dirichlet-Problem

Die einfachste Erweiterung vom Laplace-Problem zu einem nicht-linearen Problem wäre durch eine Potenz von  $u$ . Wir betrachten für  $p > 0$  mit entweder + oder -:

$$\begin{cases} -\Delta u = \pm u |u|^{p-1} + f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.3)$$

Wie vorher ist  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und die Funktion  $f$  ist vorgeschrieben. Wir werden versuchen herauszufinden, für welche  $p$  und welches Vorzeichen  $\pm$  man eine dazu passende variationelle Formulierung finden kann.

Als Funktional käme

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \mp \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} - f u \right) dx \quad (11.4)$$

in Betracht.

Was braucht man, damit dieses Funktional wohldefiniert ist? Nehmen wir an, dass  $f \in L^2(\Omega)$ . So brauchen wir für die drei hintereinander stehenden Terme

$$u \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$$

und wegen der Randwerte  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Wegen des Sobolevschen Einbettungssatzes gilt  $W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^{p+1}(\Omega)$ , wenn  $1 - \frac{n}{2} \geq 0 - \frac{n}{p+1}$ . Das lässt sich umformen zu

$$p \leq \frac{n+2}{n-2}. \tag{11.5}$$

Wenn (11.5) erfüllt ist, ist das Funktional  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  in (11.4) also wohldefiniert. Die Zahl  $p = \frac{n+2}{n-2}$  ist die sogenannte kritische Wachstumsrate für (11.3). Für die Probleme, die auftreten bei  $p > \frac{n+2}{n-2}$ , verweisen wir auf eine berühmte Arbeit von Pohozaev [13].

Schauen wir das Problem in (11.3) mit + mal genauer an. Eigentlich erwarten wir nur ein Problem mit der Existenz eines Minimums, wenn in (11.4) das Minuszeichen auftritt. Betrachten wir also

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} - f u \right) dx. \tag{11.6}$$

**Proposition 11.1.5** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $0 < p < \frac{n+2}{n-2}$ . Sei  $J$  definiert in (11.6) mit  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann gibt es  $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart, dass*

$$J(\bar{u}) = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u).$$

**Beweis.** Wegen der Ungleichungen von Poincaré-Friedrichs und von Cauchy-Schwarz gibt es eine nur von  $\Omega$  abhängende Konstante  $c_1 > 0$  derart, dass

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq c_1 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 - \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

und es folgt, dass  $J$  koerzitiv ist auf  $W_0^{1,2}(\Omega)$ .

$W_0^{1,2}(\Omega)$  ist ein Hilbert-Raum und Hilbert-Räume sind reflexiv. Eine minimierende Folge  $\{u_m\}$ , die beschränkt ist wegen der Koerzitivität, hat dann eine schwach konvergente Teilfolge

$$\{u_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ mit } u_{m_k} \rightharpoonup \bar{u} \text{ in } W_0^{1,2}(\Omega).$$

Weil  $\{u_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  und weil die Einbettung  $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$  kompakt ist für  $p < \frac{n+2}{n-2}$ , hat diese Teilfolge wiederum eine in  $L^{p+1}(\Omega)$  konvergente Teilfolge

$$\{u_{m_{k_\ell}}\}_{\ell \in \mathbb{N}} \text{ mit } u_{m_{k_\ell}} \rightarrow \hat{u} \text{ in } L^{p+1}(\Omega).$$

Insbesondere gilt dies für  $p = 1$ , das heißt  $u_{m_{k_\ell}} \rightarrow \hat{u}$  in  $L^2(\Omega)$ . Weil  $u_{m_{k_\ell}}$  in  $L^2(\Omega)$  sowohl schwach gegen  $\bar{u}$  als auch (sogar stark) gegen  $\hat{u}$  konvergiert, folgt  $\hat{u} = \bar{u}$ . Schreiben wir wieder  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  für diese Teilfolge.

Wir haben schon gesehen, dass für eine minimierende Folge  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  aus  $u_m \rightharpoonup \bar{u}$  in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  folgt, dass

$$\int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}|^2 dx.$$

Aus der starken Konvergenz in  $L^{p+1}(\Omega)$  und in  $L^2(\Omega)$  folgt

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{1}{p+1} |u_m|^{p+1} dx &= \int_{\Omega} \frac{1}{p+1} |\bar{u}|^{p+1} dx, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m f dx &= \int_{\Omega} \bar{u} f dx. \end{aligned}$$

Dies liefert uns

$$\inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} J(u_m) \geq J(\bar{u}) \geq \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u).$$

Also ist  $\bar{u}$  ein Minimum für  $J$ . ■

## 11.2 A-priori Abschätzungen

Wenn man ein Minimum des Funktionals  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  in dem Banachraum  $X$  sucht und dieses Funktional ist Gateaux-differenzierbar, dann gilt für ein solches Minimum  $\bar{u}$ , dass die schwache Euler-Lagrange Gleichung erfüllt ist:

$$\partial J(\bar{u}, \varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in X.$$

Für dieses  $\varphi$  könnte man  $\bar{u}$  einsetzen und so lassen sich manchmal Abschätzungen finden für den Teil mit den höchsten Ableitungen. Gehen wir zurück zu (11.6). Nehme an, es gibt ein Minimum  $\bar{u}$  für (11.6) in  $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ . Dann ist die schwache Euler-Lagrange-Gleichung wie folgt: für alle  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} (\nabla \bar{u} \cdot \nabla \varphi + \bar{u} |\bar{u}|^{p-1} \varphi - f \varphi) dx = 0 \quad (11.7)$$

Testen wir jetzt mit  $\varphi = \bar{u}$ , dann folgt

$$\int_{\Omega} (|\nabla \bar{u}|^2 + |\bar{u}|^{p+1} - f \bar{u}) dx = 0$$

und so findet man

$$\begin{aligned} \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla \bar{u}|^2 dx \leq \int_{\Omega} (|\nabla \bar{u}|^2 + |\bar{u}|^{p+1}) dx \\ &= \int_{\Omega} f \bar{u} dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_{PF} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Hier ist die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

$$\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{PF} \|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

benutzt worden. Zusammenfassend:

**Lemma 11.2.1** *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und sei  $f \in L^2(\Omega)$ . Wenn  $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$  mit  $p > 0$  eine Lösung von (11.7) ist, dann gilt*

$$\|\nabla \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{PF} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (11.8)$$

Das heißt, dass wir ohne die Existenz einer Lösung betrachtet zu haben und ohne Einschränkung bezüglich  $p$ , schon wissen, dass ein etwaiges Minimum die Abschätzung in (11.8) erfüllt.

Ein ähnliches Argument zeigt uns die Eindeutigkeit auch ohne irgendwelche Abhängigkeit von  $p$ .

**Lemma 11.2.2** *Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$ ,  $p > 0$  und sei  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann hat (11.7) höchstens eine Lösung in  $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ .*

**Beweis.** Nehmen wir an  $\hat{u}$  und  $\bar{u}$  in  $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$  sind beide Lösungen von (11.7). Dann gilt für alle  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ :

$$\int_{\Omega} (\nabla(\hat{u} - \bar{u}) \cdot \nabla\varphi + (\hat{u}|\hat{u}|^{p-1} - \bar{u}|\bar{u}|^{p-1})\varphi) dx = 0. \quad (11.9)$$

Für  $\varphi = \hat{u} - \bar{u}$  findet man

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (|\nabla(\hat{u} - \bar{u})|^2 + (\hat{u}|\hat{u}|^{p-1} - \bar{u}|\bar{u}|^{p-1})(\hat{u} - \bar{u})) dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla(\hat{u} - \bar{u})|^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

und es folgt, dass  $\hat{u} = \bar{u}$ . Die Ungleichung gilt, weil  $s - t$  und  $(s|s|^{p-1} - t|t|^{p-1})$  die gleichen Vorzeichen haben. ■

**Aufgabe 11.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \sin(u) + f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.10)$$

1. Wie sollte man eine schwache Lösung dieses Randwertproblems definieren?
2. Geben Sie das passende Funktional für (11.10), um mit den direkten Methoden eine schwache Lösung zu finden.
3. Zeigen Sie, dass die Bedingungen für die direkte Methode erfüllt sind.

**Aufgabe 11.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{u^3}{1+u^4} + f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass man durch die direkte Methode eine schwache Lösung finden kann.

**Aufgabe 11.5** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} + f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für  $\Omega \subset B_R(0)$  mit  $R$  genügend klein, man durch die direkte Methode eine schwache Lösung finden kann.

**Aufgabe 11.6** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten das Funktional

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \sqrt{1 + |\nabla u|^2} - fu \right) dx$$

für  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .

1. Welches Randwertproblem soll hier gelöst werden?
2. Ist  $J$  nach unten beschränkt?
3. Ist  $J$  nach unten beschränkt unter Bedingungen an  $f$  und  $\Omega$ ?
4. Zeigen Sie, dass

$$J_{\varepsilon}(u) = \int_{\Omega} \left( \sqrt{1 + |\nabla u|^2} + \varepsilon |\nabla u|^2 - fu \right) dx$$

für jedes  $\varepsilon > 0$  koerzitiv ist.

5. Sei  $u_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega)$  ein Minimum von  $J_\varepsilon(u)$ . Was brauchen Sie, damit  $u_\varepsilon$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  nach  $u_0$  konvergiert? Ist  $u_0$  ein Minimum von  $J$ ?

**Aufgabe 11.7** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet. Wir betrachten das Funktional

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{u^3}{1 + \exp(-u)} + fu \right) dx.$$

1. Für welche Dimensionen  $n$  ist dieses Funktional wohldefiniert für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ?
2. Zu welchem klassisch formulierten Randwertproblem wäre ein Minimum eine Lösung?
3. Zeigen Sie, dass unabhängig von der Dimension gilt, dass für  $0 \neq u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^3(\Omega)$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(ku) = \infty.$$

4. Zeigen Sie, dass unabhängig von der Dimension gilt, dass für  $0 \neq u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^3(\Omega)$  gilt

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - c \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

5. Für welche Dimensionen  $n$  gibt es eine Abschätzung der Form

$$J(u) \geq c_1 \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + c_2 \|u\|_{L^3(\Omega)} - c_3$$

mit  $c_i > 0$ ?

## Das Maximumprinzip

### 12.1 Besonderes für Funktionale erster Ordnung

Für Funktionale erster Ordnung verwendet man meistens einen Sobolev-Raum mit Index 1. Für solche Funktionale liefert die Euler-Lagrange Gleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben eine Positivität erhaltende Eigenschaft. Zum Beispiel gilt für

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (12.1)$$

mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und  $f \in L^2(\Omega)$  die folgende Behauptung: Wenn  $f$  positiv ist, dann ist auch die Lösung  $u$  positiv. Genauer gesagt<sup>1</sup>:

$$f \geq 0 \text{ in } \Omega \implies u > 0 \text{ in } \Omega.$$

<sup>1</sup>Mit  $f \geq 0$  in  $\Omega$  ist gemeint, dass die Funktion nicht-negativ und nicht identisch 0 ist. Für Lebesgue-messbare Funktionen heißt das  $\lambda \{x \in \Omega; f(x) < 0\} = 0$  und  $\lambda \{x \in \Omega; f(x) > 0\} > 0$ .

Für einen Beweis dieses starken Maximumprinzips verweisen wir auf eine Vorlesung partielle Differentialgleichungen. Eine schwache Form werden wir hier schon näher anschauen.

Nehmen wir an, dass  $f \geq 0$  und dass  $u < 0$  auf  $A \subset \Omega$ . Wir wählen  $A$  sogar derart, dass  $A$  eine Zusammenhangskomponente von  $\{x \in \Omega; u(x) < 0\}$  ist. Wenn  $u$  stetig wäre, dann gilt  $u = 0$  auf  $\partial A$ . Es ist nicht sehr klar, ob man so etwas machen kann (ist  $A$  ein Gebiet?), aber leben wir mal gefährlich. So hoffen wir, dass  $u$  auch

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } A, \\ u = 0 & \text{auf } \partial A, \end{cases} \quad (12.2)$$

erfüllt. Mit partieller Integration (ist der Normalenvektor auf  $\partial A$  wohldefiniert?) folgt jedoch

$$0 \leq \int_A \nabla u \cdot \nabla u \, dx = - \int_A u \Delta u \, dx = \int_A u f \, dx \leq 0.$$

Das heißt  $|\nabla u| = 0$  f.ü. in  $A$  und es folgt, dass  $u$  konstant ist in  $A$ . Weil  $u = 0$  auf  $\partial A$ , folgt  $u = 0$  in  $A$ , ein Widerspruch.

Also würden wir finden, dass  $A = \emptyset$  und es würde folgen, dass  $u \geq 0$  auf  $\Omega$ . Weil  $u \neq 0$  für  $f \neq 0$  gilt, hätte man

$$f \geq 0 \text{ in } \Omega \implies u \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

Diese Folgerungen sind ein wenig unsorgfältig. Wir werden es noch hieb- und stichfest machen. Dazu brauchen wir das folgende Ergebnis:

**Lemma 12.1.1** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Dann gilt*

$$u \in W^{1,2}(\Omega) \implies |u| \in W^{1,2}(\Omega)$$

mit  $\nabla |u| = \text{sgn}(u) \nabla u$  als schwache Ableitung. Auch gilt

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) \implies |u| \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (12.3)$$

**Bemerkung 12.1.2** *Weil  $\nabla |u| = \text{sgn}(u) \nabla u \in W^{1,2}(\Omega)$  gilt, folgt*

$$\| |u| \|_{W^{1,2}(\Omega)} = \| u \|_{W^{1,2}(\Omega)}. \quad (12.4)$$

**Beweis.** Man sieht sofort, dass  $\| |u| \|_{L^2(\Omega)} = \| u \|_{L^2(\Omega)}$ . Wenn  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , dann gilt  $\text{sgn}(u) \in L^\infty(\Omega)$  und  $\nabla u \in L^2(\Omega)$  und es folgt  $\text{sgn}(u) \nabla u \in L^2(\Omega)$ . Es ist etwas schwieriger zu zeigen, dass  $\| \nabla |u| \|_{L^2(\Omega)} = \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}$ .

1) Wir dürfen annehmen, dass  $\Omega$  beschränkt ist. Wenn  $\Omega$  unbeschränkt ist, dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $R_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  derart, dass für  $\Omega_R = \Omega \cap B_R(0)$  gilt, dass

$$\| u \|_{W^{1,2}(\Omega)} - \varepsilon \leq \| u \|_{W^{1,2}(\Omega_R)} \leq \| u \|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Außerdem gibt es  $\chi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ , definiert durch

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r \geq R + 2 \end{cases}$$

mit  $|\chi'(r)| \leq 1$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \| (1 - \chi(|\cdot|)) u(\cdot) \|_{W^{1,2}(\Omega)} \\ \leq \| u \|_{W^{1,2}(\Omega \setminus \Omega_R)} + \| u \|_{L^2(\Omega_{R+2} \setminus \Omega_R)} \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Weil  $\text{support}(\chi u) \subset \Omega_{R+2}$  dürfen wir  $\chi u \in W_0^{1,2}(\Omega_{R+2})$  statt  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  betrachten. Wir nehmen also an, dass  $\Omega$  beschränkt ist.

2) Sei  $\varphi_\varepsilon$  der Friedrichs'sche Glätter und definiere  $\ell_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  durch

$$\ell_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * |\cdot|.$$

Man zeigt direkt, dass

$$\begin{cases} \ell_\varepsilon(s) = |s| & \text{für } |s| \geq \varepsilon, \\ |\ell_\varepsilon(s) - |s|| \leq \frac{1}{2}\varepsilon & \text{für alle } s, \\ \ell'_\varepsilon(s) = \text{sgn}(s) & \text{für } |s| \in \{0\} \cup [\varepsilon, \infty), \\ |\ell'_\varepsilon(s) - \text{sgn}(s)| \leq 1 & \text{für alle } s. \end{cases}$$

Für  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  setzen wir

$$u_n(x) = \ell_{1/n}(u(x)) \quad (12.5)$$

und behaupten, dass  $u_n \rightarrow |u|$  in  $W^{1,2}(\Omega)$ .

3. Es folgt sofort, dass

$$\begin{aligned} \| u_n - |u| \|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ \int_\Omega (\ell_{1/n}(u(x)) - |u(x)|)^2 dx \leq \frac{1}{4n^2} |\Omega| \quad (12.6) \end{aligned}$$

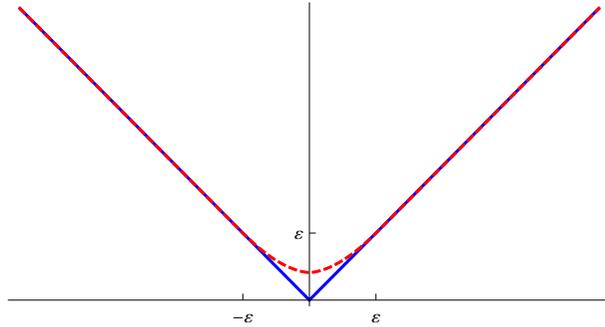


Abbildung 12.1: Glätten von der Betragsfunktion

und mit Hilfe der majorisierten Konvergenz, dass

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n - \operatorname{sgn}(u) \nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\ell'_{1/n}(u(x)) - \operatorname{sgn}(u(x)))^2 |\nabla u(x)|^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} (\ell'_{1/n}(u(x)) - \operatorname{sgn}(u(x)))^2 |\nabla u(x)|^2 dx = 0.
 \end{aligned} \tag{12.7}$$

Also konvergiert  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  und  $\{\nabla u_n\}_{n=1}^{\infty}$  in  $L^2(\Omega)$ . Dann ist  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  eine Cauchy-Folge in  $W^{1,2}(\Omega)$  und deshalb auch konvergent in  $W^{1,2}(\Omega)$  und  $u_n \rightarrow |u|$  in  $W^{1,2}(\Omega)$ . Im Sinne von schwachen Ableitungen gilt also, dass  $\nabla |u| = \operatorname{sgn}(u) \nabla u$ .

4. Wir müssen noch zeigen, dass die schwache Formulierung der Randbedingungen erfüllt ist. Für  $u_n$  in (12.5) gilt leider nur  $u_n \in W^{1,2}(\Omega) \setminus W_0^{1,2}(\Omega)$ . Statt diese Approximation  $u_n$  betrachten wir für die Behauptung in (12.3) nun

$$u_n(x) = \tilde{\ell}_{1/n}(u(x))$$

mit

$$\tilde{\ell}_{1/n}(s) = \ell_{1/n}(s) - \ell_{1/n}(0).$$

Wir finden wie in (12.6) und (12.7), dass

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{\ell}_{1/n}(u) - |u|\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\ell_{1/n}(u) - |u|\|_{L^2(\Omega)} + \|\ell_{1/n}(0)\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \left(\frac{1}{2n} + \ell_{1/n}(0)\right) \sqrt{|\Omega|} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \|\nabla \tilde{\ell}_{1/n}(u) - \operatorname{sgn}(u) \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
 = \|\nabla \ell_{1/n}(u) - \operatorname{sgn}(u) \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Sei  $\varepsilon > 0$  und nehme  $n_1$  so groß, dass für  $n \geq n_1$  gilt

$$\|\tilde{\ell}_{1/n}(u) - |u|\|_{W^{1,2}(\Omega)} < \frac{1}{3}\varepsilon. \tag{12.8}$$

Weil  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt es  $\{\tilde{u}_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$  derart, dass  $\tilde{u}_m \rightarrow u$  in  $W^{1,2}(\Omega)$ . Weil  $|\ell'_{1/n_1}| \leq 1$  gilt, folgt aus dem Mittelwertsatz, dass

$$\|\tilde{\ell}_{1/n_1}(u_m) - \tilde{\ell}_{1/n_1}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_m - u\|_{L^2(\Omega)}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \|\nabla \tilde{\ell}_{1/n_1}(u_m) - \nabla \tilde{\ell}_{1/n_1}(u)\|_{L^2(\Omega)} \\
 &= \|\tilde{\ell}'_{1/n_1}(u_m) \nabla u_m - \tilde{\ell}'_{1/n_1}(u) \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \|\tilde{\ell}'_{1/n_1}(u_m) |\nabla u_m - \nabla u|\|_{L^2(\Omega)} + \\
 &\quad + \|\left(\tilde{\ell}'_{1/n_1}(u_m) - \tilde{\ell}'_{1/n_1}(u)\right) \nabla u\|_{L^2(\Omega)}
 \end{aligned}$$

$$\leq \|\nabla u_m - \nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \left( \tilde{\ell}'_{1/n_1}(u_m) - \tilde{\ell}'_{1/n_1}(u) \right) \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)}. \quad (12.9)$$

Es gilt, dass  $\|\nabla u_m - \nabla u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ , also brauchen wir nur noch den letzten Term in (12.9) abzuschätzen und nehmen an, für alle  $m > m_2$  gilt

$$\|\nabla u_m - \nabla u\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (12.10)$$

Weil  $s \mapsto \tilde{\ell}'_{1/n_1}(s)$  stetig ist, und  $u_m(x) \rightarrow u(x)$  f.ü., gilt auch, dass

$$\tilde{\ell}'_{1/n_1}(u_m(x)) \rightarrow \tilde{\ell}'_{1/n_1}(u(x)) \text{ f.ü. für } m \rightarrow \infty.$$

Die Ableitung  $\tilde{\ell}'_{1/n_1}$  ist beschränkt, und es folgt mit Hilfe der majorisierten Konvergenz, dass

$$\left\| \left( \tilde{\ell}'_{1/n_1}(u_m) - \tilde{\ell}'_{1/n_1}(u) \right) \nabla u \right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Dies bedeutet, dass es  $m_1$  gibt derart, dass

$$\left\| \tilde{\ell}'_{1/n_1}(u_{m_1}) - \tilde{\ell}'_{1/n_1}(u) \right\|_{L^2(\Omega)} < \frac{1}{3}\varepsilon \quad (12.11)$$

Wenn wir (12.8), (12.10) und (12.11) verwenden, folgt für  $m$  genügend groß, dass

$$\left\| \tilde{\ell}'_{1/n_1}(u_{m_1}) - |u| \right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon. \quad (12.12)$$

Man muss nur noch bemerken, dass die Träger von  $u_{m_1}$  und  $\tilde{\ell}'_{1/n_1}(u_{m_1})$  identisch sind ( $\tilde{\ell}'_{1/n_1}(0) = 0$ ) und dass  $\tilde{\ell}'_{1/n_1}(u_{m_1})$  als Kombination unendlich differenzierbarer Funktionen in  $C^\infty(\Omega)$  liegt. Weil man dies für jedes  $\varepsilon > 0$  machen kann, gilt  $|u| \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . ■

**Korollar 12.1.3** Man definiert

$$u^+ := \frac{1}{2}(|u| + u) = \max(0, u), \\ u^- := \frac{1}{2}(|u| - u) = \max(0, -u),$$

Dann gilt  $u^+, u^- \geq 0$ ,  $u = u^+ - u^-$ ,

$$u \in W^{1,2}(\Omega) \Rightarrow u^+, u^- \in W^{1,2}(\Omega), \quad (12.13)$$

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) \Rightarrow u^+, u^- \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad (12.14)$$

und für  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  folgt

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 = \|u^+\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \|u^-\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2. \quad (12.15)$$

**Bemerkung 12.1.4** Die folgende Norm ist hier gemeint:

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u(x)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Beweis.** Man benutze Lemma 12.1.1. ■

Für Differentialgleichungen höherer Ordnung braucht man mindestens einen Sobolev-Raum  $W^{2,p}(\Omega)$  und ähnliches wie in (12.13) für  $W^{1,2}(\Omega)$  gilt nicht für  $W^{2,2}(\Omega)$ :

$$u \in W^{2,2}(\Omega) \not\Rightarrow u^+ \in W^{2,2}(\Omega).$$

Betrachte zum Beispiel  $u(x) = \sin(x)$  auf  $\Omega = (-\pi, \pi)$ . Dann gilt

$$|u|'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x > 0, \\ -\cos(x) & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Die Funktion  $|u|$  hat keine schwache zweite Ableitung in  $L^2(-\pi, \pi)$ . Wenn  $v$  eine solche Ableitung wäre, dann gilt

$v(x) = -|\sin(x)|$  f.ü., weil starke Ableitungen auf  $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$  mit schwachen Ableitungen f.ü. übereinstimmen. Jedoch folgt dann für  $\varphi \in C_0^\infty(-\pi, \pi)$  mit  $\varphi(0) \neq 0$ , dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} (v(x)\varphi(x) - |u(x)|\varphi''(x)) dx = -2\varphi(0) \neq 0.$$

Man kann manchmal auch Funktionen in Sobolev-Räumen mit höherem Index zerlegen in einen positiven und einen negativen Teil, und so, dass auch (12.15) erfüllt ist, aber nicht durch  $u = \max(0, u) + \min(0, u)$ . Näheres dazu findet man in [7, Section 3.1.2].

## 12.2 A-priori Abschätzungen und Maximumprinzip

Für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist das Maximum-Prinzip ein sehr wichtiges Instrument. Wenn die Euler-Lagrange Gleichung zweiter Ordnung ist, bedeutet das, dass das Funktional höchstens Terme erster Ordnung hat. Zum Beispiel  $I : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$I(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \right) dx, \quad (12.16)$$

führt uns durch die Euler-Lagrange Gleichung zum Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12.17)$$

Genauer gesagt, wenn (12.16) ein Minimum in  $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$  hat und  $\tilde{u}$  sogar in  $C^2(\bar{\Omega})$  liegt, dann erfüllt  $\tilde{u}$  das Randwertproblem in (12.17). Für (12.17) kann man zeigen, dass  $f \geq 0$

impliziert, dass auch  $u \geq 0$ . Das starke Maximumprinzip zeigt sogar, dass für  $0 \neq f \geq 0$  sogar folgendes gilt:  $u > 0$  innerhalb von  $\Omega$ .

Mit Hilfe der schwachen Euler-Lagrange Gleichung kann man auch ein Maximumprinzip beweisen für das Minimum von (12.16).

### Lemma 12.2.1 (Maximum-prinzip für schwache Lösungen)

Nehme an,  $f \in L^2(\Omega)$  und  $f \geq 0$ . Wenn  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart ist, dass für alle  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt:

$$\partial I(u, \varphi) := \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi - f \varphi) dx = 0, \quad (12.18)$$

dann folgt  $u \geq 0$ . Wenn außerdem  $f \not\equiv 0$  gilt, dann gilt auch  $u \not\equiv 0$ .

**Bemerkung 12.2.2** Wie gesagt, der Grund, wieso ein solches Maximumprinzip nur für Funktionale  $J$  mit höchstens Ableitungen erster Ordnung gilt, ist folgender:

$$u \in W^{1,2}(\Omega) \Rightarrow u^+ \in W^{1,2}(\Omega) \quad (12.19)$$

Ähnliches wie in (12.19) für  $W^{1,2}(\Omega)$  hat man nicht für  $W^{2,2}(\Omega)$ .

**Beweis.** Wegen Lemma 12.1.1 folgt aus  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , dass auch  $u^+, u^- \in W^{1,2}(\Omega)$ . Man hat für  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  sogar, dass auch  $u^+, u^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt. Setzt man  $\varphi = u^-$  ein in (12.18) so findet man

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2 dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^- dx = - \int_{\Omega} f u^- dx \leq 0.$$

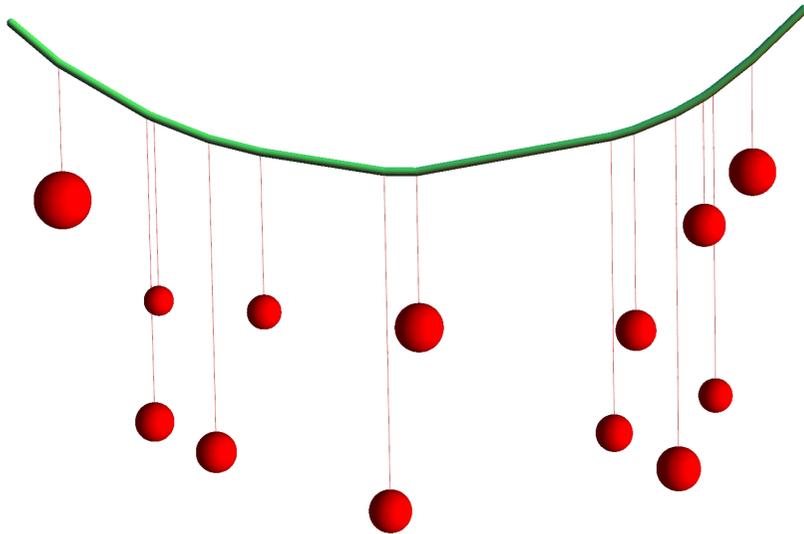


Abbildung 12.2: Die Funktion  $u$  als grünes Seil, das am Rand festgehalten wird. Diese Funktion liefert das Minimum für (12.16) in einer Dimension bei einer bestimmten Weihnachtskugelverteilung  $f$ . Das Maximumprinzip sagt, dass das Modell sich so benimmt, wie wir hoffen:  $f \lesssim 0$  impliziert  $u \lesssim 0$ . Denn hängt man Gewichte ans Seil, dann geht es nach unten.

Es folgt  $|\nabla u^-| \equiv 0$  und weil  $u^- \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , dass  $u^- \equiv 0$  und so  $u \geq 0$ . ■

Wie wir schon gesehen haben, hat das Funktional (12.16) ein eindeutiges Minimum  $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Wir können mit Hilfe dieses Maximumprinzips die Funktion  $\tilde{u}$  vergleichen mit den

Minimallösungen von

$$I_1(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f^+ u \right) dx \quad (12.20)$$

$$I_2(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f^- u \right) dx, \quad (12.21)$$

wobei  $f^+ = \max(0, f)$  und  $f = f^+ - f^-$ .

**Korollar 12.2.3** Seien  $\tilde{u}, u_1, u_2$  die Minima von  $I, I_1$  beziehungsweise  $I_2$  aus (12.16) und (12.20, 12.21). Dann gilt

$$\tilde{u} = u_1 - u_2 \text{ und } u_1, u_2 \geq 0.$$

Also gilt auch  $-u_2 \leq \tilde{u} \leq u_1$ .

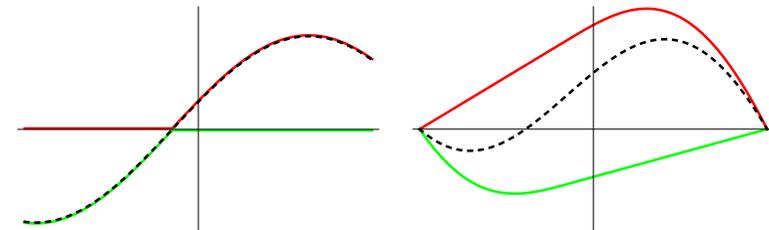


Abbildung 12.3: Links  $-f^- \leq f \leq f^+$  und rechts  $-u_2 \leq u \leq u_1$ .

**Beweis.** Das Funktional  $I$  ist strikt konvex auf  $W_0^{1,2}(\Omega)$  und hat also höchstens ein Minimum  $\tilde{u}$  und für dieses Minimum und nur für dieses Minimum gilt  $\partial I(\tilde{u}, \varphi) = 0$ . Ähnliches gilt auch für  $I_1$  und  $I_2$  und weil

$$\partial I(u_1 - u_2, \varphi) = \partial I_1(u_1, \varphi) - \partial I_2(u_2, \varphi) = 0,$$

folgt  $\tilde{u} = u_1 - u_2$ . Wegen Lemma 12.2.1 hat man  $u_1, u_2 \geq 0$ . ■

**Korollar 12.2.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  derart, dass  $\Omega \subset B_R(0)$  und nehme an,  $f \in L^\infty(\Omega)$  mit  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$ . Wenn  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  derart ist, dass (12.18) erfüllt ist, dann gilt

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{M}{2n} R^2.$$

**Beweis.** Setze  $v(x) := \frac{1}{2n} M (R^2 - |x|^2)$  und bemerke, dass  $0 \leq v \leq \frac{M}{2n} R^2$  und  $-\Delta v = M \geq |f|$  in  $\Omega$  gilt. Damit folgt  $0 \leq (u - v)^+ \leq u^+$  und man hat  $(u - v)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Dann findet man

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} |\nabla (u - v)^+|^2 dx = \int_{\Omega} \nabla (u - v) \cdot \nabla (u - v)^+ dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u - v)^+ dx - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla (u - v)^+ dx \\ &= \int_{\Omega} f (u - v)^+ dx + \int_{\Omega} \Delta v (u - v)^+ dx \\ &= \int_{\Omega} (f - M) (u - v)^+ dx \leq 0. \end{aligned}$$

Wir haben partiell integriert und dabei benutzt, dass  $(u - v)^+ = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Wiederum folgt  $(u - v)^+ \equiv 0$  und es gilt  $u \leq v$ . Ebenso zeigt man  $(u + v)^- \equiv 0$  und es folgt, dass  $u \geq -v$ . Dann gilt auch, dass

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \frac{M}{2n} R^2. \quad \blacksquare$$

## 12.3 Anwendung auf ein semilineares Problem

Wir betrachten nochmals das Funktional in (11.6), nämlich

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} - f u \right) dx. \quad (12.22)$$

Die schwache Euler-Lagrange-Gleichung ist wie folgt: für alle  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} (\nabla \bar{u} \cdot \nabla \varphi + \bar{u} |\bar{u}|^{p-1} \varphi - f \varphi) dx = 0. \quad (12.23)$$

Das oben genannte Maximumprinzip benutzen wir für die folgende a-priori Abschätzung:

**Theorem 12.3.1** Sei  $f \in L^2(\Omega)$  und seien  $u_1, u_2$  die Minimallösungen von  $I_1$  beziehungsweise  $I_2$  wie in (12.20, 12.21). Für jede Funktion  $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , die die schwache Euler-Lagrange Identität (12.23) erfüllt, gilt, dass

$$u_2 \leq \bar{u} \leq u_1.$$

**Beweis.** Aus Lemma 12.2.1 folgt  $u_2 \leq 0 \leq u_1$ . Fast wie oben finden wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega} |\nabla (\bar{u} - u_1)^+|^2 dx = \int_{\Omega} \nabla (\bar{u} - u_1) \cdot \nabla (\bar{u} - u_1)^+ dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla \bar{u} \cdot \nabla (\bar{u} - u_1)^+ dx - \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla (\bar{u} - u_1)^+ dx \\ &= \int_{\Omega} (-\bar{u} |\bar{u}|^{p-1} + f) (\bar{u} - u_1)^+ dx - \int_{\Omega} f^+ (\bar{u} - u_1)^+ dx \\ &= - \int_{\Omega} \bar{u} |\bar{u}|^{p-1} (\bar{u} - u_1)^+ dx - \int_{\Omega} f^- (\bar{u} - u_1)^+ dx \leq 0. \end{aligned}$$

In der letzten Abschätzung haben wir benutzt, dass  $u_1 \geq 0$ , denn wenn  $\bar{u} \geq u_1$  gilt, dann folgt  $\bar{u} \geq 0$  und wenn  $\bar{u} \leq u_1$  gilt, dann folgt  $(\bar{u} - u_1)^+ = 0$ . Wir finden so, dass  $\nabla (\bar{u} - u_1)^+ \equiv 0$ , also  $(\bar{u} - u_1)^+ = c$  und weil  $(\bar{u} - u_1)^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt, findet man sogar dass  $(\bar{u} - u_1)^+ \equiv 0$ . Das bedeutet  $\bar{u} \leq u_1$ . Auf ähnliche Art folgt  $\bar{u} \geq u_2$ . ■

**Bemerkung 12.3.2** *Der Beweis hier fordert in keinem Schritt, dass der nichtlineare Term wie eine Potenz aussieht, sondern nur, dass die Ableitung  $g$  das richtige Vorzeichen hat. Das ähnliche Ergebnis folgt also auch für*

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + G(\cdot, u) - f u \right) dx, \quad (12.24)$$

wenn  $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds$  und  $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  derart ist, dass folgendes gilt:

$$u g(x, u) \geq 0 \text{ für } (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

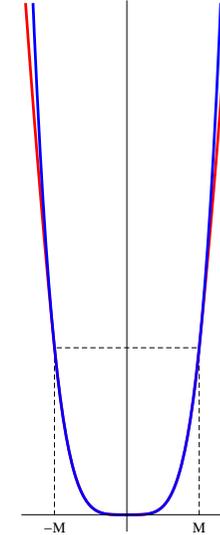
Diese letzte Bedingung sorgt dafür, dass  $u \mapsto G(x, u)$ , ähnlich wie  $u \mapsto \frac{1}{p+1} |u|^{p+1}$ , ein Minimum für  $u = 0$  hat.

Dieses Ergebnis können wir wie folgt benutzen für (11.6):

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} - f u \right) dx, \quad (12.25)$$

wenn  $p$  superkritisch ist, also für  $p > \frac{n+2}{n-2}$ . Wir nehmen zusätzlich  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Statt (12.25) betrachten wir (12.24) mit  $G(\cdot, u) = G_M(u)$  für  $M \in \mathbb{R}^+$  mit

$$G_M(u) := \begin{cases} \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} & \text{if } |u| \leq M, \\ \frac{1}{2} M^{p-1} u^2 - \frac{p-1}{2(p+1)} M^{p+1} & \text{if } |u| > M. \end{cases}$$



Jetzt ist

$$J_M(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + G_M(u) - f u \right) dx \quad (12.26)$$

wohldefiniert auf  $W_0^{1,2}(\Omega)$  und sogar für jede  $M > 0$  hat man  $J_M \in C^1(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ . Wegen der Bemerkung 12.3.2 und der vorhergehenden Theoreme finden wir, dass das Minimum  $u_M$  für (12.26) die folgende a-priori Abschätzung erfüllt:

$$\|u_M\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{2n} R^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (12.27)$$

Hier haben wir  $R$  derart gewählt, dass  $\Omega \subset B_R(0)$ . Die Abschätzung in (12.27) ist unabhängig von  $M$ .

Nehmen wir jetzt  $M_1 \geq \frac{1}{2n} R^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ , dann folgt, dass  $G_{M_1}(u_{M_1}) = \frac{1}{p+1} |u_{M_1}|^{p+1}$  und damit erfüllt  $u_{M_1}$  nicht nur die

Euler-Lagrange Gleichung für (12.25), sondern auch die für (12.24). Es gilt sogar, dass

$$\begin{aligned} J(u_{M_1}) = J_{M_1}(u_{M_1}) &= \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J_{M_1}(u) \\ &\leq \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} J(u) \leq J(u_{M_1}). \end{aligned}$$

Übrigens hätte man auch statt  $G_M$  die folgende Funktion verwenden können:

$$\tilde{G}_M(u) = \min(G(u), G(M)).$$

Obwohl die Funktion  $\tilde{G}_M$  nicht differenzierbar ist, ist das Funktional  $J_M$  Gateaux-differenzierbar.

**Aufgabe 12.1** Wir haben für (12.25) angenommen, dass  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Zeigen Sie, dass man auch für  $f \in L^2(\Omega)$  ein Minimum in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  findet für  $p > \frac{n+2}{n-2}$ .

**Aufgabe 12.2** Wenn  $u \in W^{2,2}(\Omega)$  gilt, dann gilt  $\Delta u \in L^2(\Omega)$ .

1. Geben Sie ein Beispiel einer Funktion  $u \in W^{2,2}(\Omega)$  mit  $\Delta |u| \notin L^2(\Omega)$ .
2. Geben Sie ein Beispiel einer Funktion  $u \in W^{2,2}(\Omega)$ , die ihr Vorzeichen wechselt, mit  $\Delta |u| \in L^2(\Omega)$ .
3. Wenn eine Funktion  $u \in W^{2,2}(\Omega)$  zufälligerweise doch so ist, dass  $\Delta |u| \in L^2(\Omega)$ , gilt dann auch, dass

$$\|\Delta |u|\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}?$$

Wenn man durch die Literatur stöbert, findet man die folgende **Ungleichung von Kato**:

$$\Delta |u| \geq \text{sign}(u) \Delta u, \quad (12.28)$$

mit  $\text{sign}(u)$  das Vorzeichen von  $u$ . Wie soll man diese Ungleichung verstehen? Weil es hier eine Ungleichung gibt, könnte man vermuten, dass auch im letzten Teil der Aufgabe wohl eine Ungleichung stehen sollte. Die Ungleichung von Kato ist jedoch gemeint im Sinne von Distributionen für positive Testfunktionen.

So wie man schwache Ableitungen definiert hat, werden ähnlich auch die distributionellen Ableitungen definiert:  $\Delta v$  ist derart, dass

$$(\Delta v, \varphi) = (-1)^2 (v, \Delta \varphi) \text{ für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Eine distributionelle Ungleichung wird dann via positive Testfunktion  $\varphi$  definiert und so wird für eine Funktion  $u$ , mit  $u, \Delta u$  integrierbar, die Ungleichung von Kato wie folgt:

$$\begin{aligned} (\Delta |u|, \varphi) &:= (-1)^2 (|u|, \Delta \varphi) = (|u|, \Delta \varphi) \\ &= \int_{\Omega} |u(x)| \Delta \varphi(x) dx \geq \int_{\Omega} \text{sign}(u(x)) \Delta u(x) \varphi(x) dx \\ &= (\text{sign}(u) \Delta u, \varphi) \text{ für alle } 0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

**Aufgabe 12.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet und sei  $u \in C^2(\Omega)$  derart, dass  $\{x \in \Omega; u(x) = 0\}$  die Vereinigung einiger glatter  $n-1$ -dimensionaler  $C^1$ -Mannigfaltigkeiten ist. Beweise

in dem Fall die Ungleichung von Kato. Hinweis:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{sign}(u(x)) \Delta u(x) \varphi(x) dx \\ = \int_{\Omega^+} \Delta u(x) \varphi(x) dx - \int_{\Omega^-} \Delta u(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

mit  $\Omega^+ = \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$  und  $\Omega^- = \{x \in \Omega; u(x) < 0\}$ .

## Extrema und Sattelpunkte

### 13.1 Stationäre Stellen

Die erste Frage, die einem bezüglich Variationsrechnung bei einem Funktional  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  einfällt, ist, ob dieses Funktional ein Minimum hat. Wenn  $J$  differenzierbar ist und es ein Minimum hat in  $\tilde{u} \in X$ , dann folgt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial J(\tilde{u}, \varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \text{ mit } \tilde{u} + \varphi \in X.$$

Für  $J : W_{(0)}^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$J_f(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + G(u, x) - f(x)u(x) \right) dx, \quad (13.1)$$

mit  $f \in L^2(\Omega)$  und  $G$  differenzierbar, wird dies wie folgt: Für alle  $\varphi \in W_{(0)}^{1,2}(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} (\nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) + G_u(u(x), x) \varphi(x) - f(x)\varphi(x)) dx = 0 \quad (13.2)$$

Wenn  $u \mapsto G(u, x)$  konvex ist und  $G(u, x) = \mathcal{O}(u^2)$  für  $|u| \rightarrow \infty$ , dann hat  $J_f$  ein Minimum. Wenn  $u \mapsto G(u, x)$  differenzierbar ist, dann bedeutet konvex in  $u$ , dass  $u \mapsto G_u(u, x)$  eine wachsende Funktion ist.

**Lemma 13.1.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Sei  $G \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$  konvex in  $u$  und sogar derart, dass es  $c_i \in \mathbb{R}^+$  gibt mit

$$G(u, x) \geq c_1 u^2 - c_2.$$

Wir schreiben  $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$  für die Funktion, die (13.1) mit  $f \in L^2(\Omega)$  minimiert in  $W_0^{1,2}(\Omega)$ . Dann gilt folgendes:

$$f_1 \geq f_2 \implies u_{f_1} \geq u_{f_2}.$$

Ist  $G \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\Omega})$  sogar strikt konvex in  $u$ , dann gilt für die Funktion  $u_f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , die das Minimum von (13.1) über  $W_0^{1,2}(\Omega)$  ergibt für  $f \in L^2(\Omega)$ , folgendes:

$$f_1 \geq f_2 \implies u_{f_1} \geq u_{f_2}.$$

**Beweis.** Man hat

$$0 = \int_{\Omega} \left( \nabla(u_{f_1} - u_{f_2}) \cdot \nabla\varphi + (G_u(u_{f_1}, \cdot) - G_u(u_{f_2}, \cdot))\varphi - (f_1 - f_2)\varphi \right) dx \quad (13.3)$$

und weil man zeigen möchte, dass  $u_{f_2} - u_{f_1} \leq 0$ , testen wir mit  $\varphi = (u_{f_2} - u_{f_1})^+$ . Wir betrachten die drei Terme einzeln. Es folgt erstens, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla(u_{f_1} - u_{f_2}) \cdot \nabla(u_{f_2} - u_{f_1})^+ dx \\ &= - \int_{\Omega} |\nabla(u_{f_2} - u_{f_1})^+|^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Konvexität mit Differenzierbarkeit liefert, dass die Funktion  $s \mapsto G_u(s, x)$  wachsend ist. Dies bedeutet für den zweiten Term, dass für alle  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$

$$(G_u(s_1, x) - G_u(s_2, x))(s_1 - s_2) \geq 0$$

und auch, dass

$$\int_{\Omega} (G_u(u_{f_1}, x) - G_u(u_{f_2}, x))(u_{f_2} - u_{f_1})^+ dx \leq 0. \quad (13.4)$$

Weil auch noch

$$- \int_{\Omega} (f_1 - f_2)(u_{f_2} - u_{f_1})^+ dx \leq 0$$

gilt, müssen diese drei Terme einzeln 0 sein und es folgt  $(u_{f_2} - u_{f_1})^+ = c$ . Im Fall, dass  $u_{f_2}, u_{f_1} \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt, folgt  $c = 0$  und  $(u_{f_2} - u_{f_1})^+ = 0$ . Das heißt  $u_{f_1} \geq u_{f_2}$ . Im Fall, dass

wir nur  $u_{f_2}, u_{f_1} \in W^{1,2}(\Omega)$  annehmen, finden wir noch immer  $(u_{f_2} - u_{f_1})^+ = c$ . Um zu zeigen, dass  $c = 0$  gilt, verwenden wir jetzt die strikte Konvexität von  $G$ . Wenn  $c > 0$  gilt, finden wir eine strikte Ungleichung in (13.4) und dies gibt den Widerspruch. ■

Pi mal Daumen kann man sagen, dass man bei einem Minimum von (13.1) lokal ein Maximumprinzip hat. Ein Minimum bedeutet, dass  $J$  in Nähe des Minimums konvex ist und nur dann liefern die ersten beiden Terme in (13.3) das richtige Vorzeichen.

Auch bei einem Sattelpunkt für ein Funktional der Form in (13.1) ist die Euler-Lagrange-Gleichung (13.2) erfüllt. Hier kann man jedoch kein Maximumprinzip erwarten, denn für einen Sattelpunkt gibt es eine nicht-konvexe Richtung und für ein  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$  in dieser Richtung geben die ersten beiden Terme in (13.3) das falsche Vorzeichen.

**Definition 13.1.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $(W(\Omega), \|\cdot\|)$  ein normierter Raum,  $X \subset W(\Omega)$  und sei  $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ . Betrachte das Funktional  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), \nabla u(x)) dx.$$

Sei  $\tilde{u} \in X$  derart, dass

$$\partial J(\tilde{u}; \varphi) = 0 \text{ für alle } \varphi \in W(\Omega) \text{ mit } \tilde{u} + \varphi \in X. \quad (13.5)$$

- $J$  hat ein lokales Minimum in  $\tilde{u}$ , wenn es  $\varepsilon > 0$  gibt derart, dass

$$J(u) \geq J(\tilde{u}) \text{ für alle } u \in X \text{ mit } \|u - \tilde{u}\| < \varepsilon. \quad (13.6)$$

- $J$  hat ein lokales Maximum in  $\tilde{u}$ , wenn es  $\varepsilon > 0$  gibt derart, dass

$$J(u) \leq J(\tilde{u}) \text{ für alle } u \in X \text{ mit } \|u - \tilde{u}\| < \varepsilon. \quad (13.7)$$

- $J$  hat einen Sattelpunkt in  $\tilde{u}$ , wenn  $J$  in  $\tilde{u}$  kein lokales Minimum und kein lokales Maximum hat.

**Bemerkung 13.1.3** Ein Sattelpunkt in  $\tilde{u}$  bedeutet also, dass  $\tilde{u}$  die schwache Euler- Lagrange-Gleichung (13.5) erfüllt und es für jedes  $\varepsilon > 0$  Funktionen  $\bar{u}_\varepsilon$  und  $\underline{u}_\varepsilon$  in  $X$  gibt mit  $\|\bar{u}_\varepsilon - \tilde{u}\| < \varepsilon$ ,  $\|\underline{u}_\varepsilon - \tilde{u}\| < \varepsilon$  und derart, dass

$$J(\underline{u}_\varepsilon) < J(\tilde{u}) < J(\bar{u}_\varepsilon).$$

**Bemerkung 13.1.4** Für Funktionen von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}$  kann man sich sofort vorstellen, was man unter einem lokalen Minimum, lokalen Maximum oder Sattelpunkt versteht. Funktionen auf höher dimensional Gebieten lassen sich mit Bildern schon schlechter darstellen.  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  fängt sogar in dem unendlich dimensionalen Raum  $W_0^{1,2}(\Omega)$  an.

## 13.2 Lokales Minimum

Das Minimierungsproblem

$$\min_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} - f u \right) dx$$

haben wir ausgiebig betrachtet. Was passiert, wenn man das Pluszeichen durch ein Minuszeichen ersetzt?

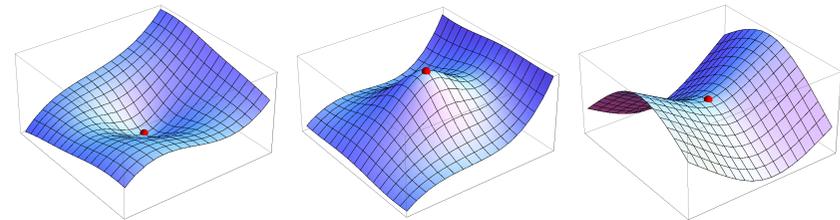


Abbildung 13.1: Lokales Minimum, lokales Maximum und Sattelpunkt für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn das Extremum lokal ist, findet man meistens auch noch einen Sattelpunkt in der Nähe.

Schauen wir uns das Problem mal an:

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} - f u \right) dx. \quad (13.8)$$

Wenn  $p > 1$  kann man, jedenfalls für kleine  $f$ , ein lokales Minimum nahe bei  $u = 0$  erwarten. Um genauer zu sein; wenn der Term  $\frac{1}{p+1} |u|^{p+1}$  superlinear und subkritisch ist, das heißt  $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$ , dann finden wir mit:

- der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ;

- der darausfolgenden Äquivalenz der Normen auf  $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)} \text{ und } \|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)} ;$$

- der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung

$$\|u\|_{L^{p+1}(\Omega)} \leq c_S^* \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

für alle  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ;

dass

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - \frac{c_S}{p+1} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^{p+1} - c_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \quad (13.9)$$

$$J(u) \leq \frac{1}{2} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 + c_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \quad (13.10)$$

und damit hat man folgendes Bild für  $u \mapsto J(u)$ , wenn  $\|f\|_{L^2(\Omega)}$  genügend klein ist. Grafisch ist es dargestellt in Abbildung 13.2. Im hellen Bereich könnte man ein Minimum vermuten.

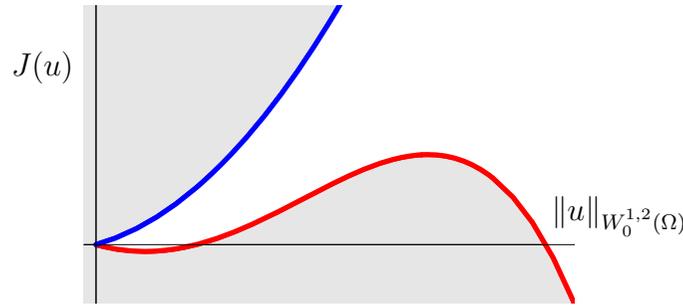


Abbildung 13.2: Obere und untere Schranke für  $J(u)$ .

**Lemma 13.2.1** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $n > 2$  und sei  $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ . Dann gibt es  $\varepsilon > 0$  derart, dass das Funktional  $J$ , definiert in (13.8), für alle  $f \in L^2(\Omega)$  mit  $\|f\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$  ein lokales Minimum hat.

**Beweis.** Wir betrachten die Funktion  $g_t : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$g_t(s) = \frac{1}{2} s^2 - \frac{c_S}{p+1} s^{p+1} - c_P t s.$$

Aus (13.9) folgt, dass  $J(u) \geq g_t\left(\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\right)$  mit  $t = \|f\|_{L^2(\Omega)}$ . Man zeigt mit elementaren Methoden, dass  $g_0$  ein lokales Maximum hat für  $s = s_0 := \sqrt[p-1]{1/c_S}$ . Nehmen wir  $t \geq 0$  derart, dass

$$c_P t s_0 < g_0(s_0).$$

Also dann gilt  $g_t(s_0) > 0$  und  $s \mapsto g_t(s)$  hat ein positives Maximum in irgendeinem  $s_t > 0$ .

Weil  $J(0) = 0$  gilt, bedeutet dies, dass für  $\|f\|_{L^2(\Omega)} < \frac{g_0(s_0)}{c_P s_0}$  das Funktional  $J$  ein nicht-positives Infimum hat auf

$$\mathcal{B}_{s_0}(0) := \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) ; \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} < s_0 \right\}.$$

Dann gibt es eine minimierende Folge  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{B}_{s_0}(0)$  und wegen des Theorems von Kakutani hat diese Folge eine schwach konvergente Teilfolge:

$$u_{m_k} \rightharpoonup \tilde{u} \text{ in } W_0^{1,2}(\Omega).$$

Die schwache Unterhalbfolgenstetigkeit von  $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$  liefert, dass

$$s_0^2 \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \|\nabla u_{m_k}\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Weil die Einbettungen  $W_0^{1,2}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$  kompakt sind für  $p \in [1, \frac{n+2}{n-2})$ , gibt es eine in  $L^{p+1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$  konvergente Teilfolge  $\{u_{m_{k_\ell}}\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ . Und wenn man nochmals die schwache Unterhalbfolgenstetigkeit von  $u \mapsto \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2$  verwendet, folgt

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} J(u_{m_{k_\ell}}) \geq J(\tilde{u}).$$

Weil das Infimum nicht positiv ist, folgt auch  $J(\tilde{u}) \leq 0$ . ■

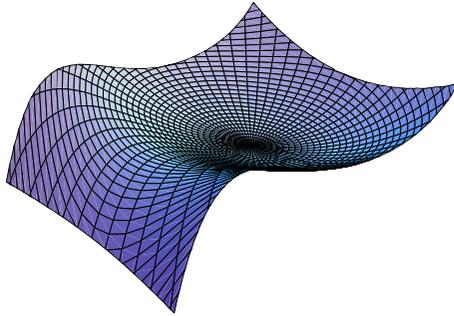


Abbildung 13.3: Beispiel 13.3.1 zeigt neben einem lokalen Minimum auch einen Sattelpunkt: Wenn man Wasser einfüllen würde, würde es da überlaufen.

### 13.3 Sattelpunktlösungen

Für (13.8) mit  $f$  genügend klein haben wir soeben ein lokales Minimum gefunden. Wie wir in Abbildung 13.1 schon angedeutet haben, findet man in der Nähe oft einen zweiten stationären Punkt und der ist meistens kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt.

**Beispiel 13.3.1** Das Funktional  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{2}{5}x^5$ , hat zwei stationäre Stellen:  $(0, 0)$  und  $(1, 0)$ . Die erste ist ein lokales Minimum und die zweite ein Sattelpunkt.

Um ein Ergebnis in dieser Richtung für unendlich dimensionale Banachräume mathematisch korrekt zu formulieren, werden wir erst die sogenannte Palais-Smale Bedingung formulieren.

**Definition 13.3.2** Sei  $X$  ein Banachraum und  $J \in C^1(X; \mathbb{R})$ .

Eine Folge  $\{u_k\} \subset X$  heißt eine **Palais-Smale-Folge** für  $J$ , wenn

1. es  $M \in \mathbb{R}$  gibt so, dass  $|J(u_k)| \leq M$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und
2.  $\|\partial J(u_k; \cdot)\|_{X'} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

**Bedingung 13.3.3** Man sagt das Funktional  $J \in C^1(X; \mathbb{R})$  erfüllt die **Palais-Smale-Bedingung**, wenn jede Palais-Smale-Folge für  $J$  eine stark konvergente Teilfolge hat.

Die Palais-Smale Bedingung sorgt dafür, dass man bei Folgen, bei denen das Funktional gleichmäßig beschränkt ist und bei denen die Ableitung nach 0 geht, einen Limes finden kann. Das ist eigentlich genau das, was die drei in Kapitel 11.1 genannten Hauptbestandteile liefern. Damit sieht man auch, dass es nicht der einfachste Schritt im Beweis sein wird, zu zeigen, dass diese Bedingung erfüllt ist.

**Theorem 13.3.4 (Mountain-Pass Theorem von Ambrosetti-Rabinowitz [2])** Sei  $X$  ein Banachraum und nehme an  $J \in C^1(X; \mathbb{R})$  erfüllt die Palais-Smale-Bedingung. Weiter sollen gelten:

1.  $J(0) = 0$ ;
2. es gibt  $\rho > 0$  und  $\alpha > 0$  so, dass  $J(u) \geq \alpha$  für  $\|u\|_X = \rho$ ;
3. es gibt  $u_1 \in X$  mit  $\|u_1\|_X \geq \rho$  und  $J(u_1) < \alpha$ .

Definieren wir

$$\Gamma = \{\Phi \in C([0, 1]; X); \Phi(0) = 0 \text{ und } \Phi(1) = u_1\}. \quad (13.11)$$

Dann gibt es  $\hat{u} \in X$  derartig, dass  $\partial J(\hat{u}; \cdot) = 0$  und

$$J(\hat{u}) = \inf_{\Phi \in \Gamma} \sup_{t \in [0, 1]} J(\Phi(t)) \geq \alpha.$$

**Bemerkung 13.3.5** Die erste und zweite Bedingung zeigen, dass  $u \mapsto J(u)$  bei  $u = 0$  eine Delle hat. Selbstverständlich findet man ein ähnliches Ergebnis, wenn die Delle um  $u_0$  sitzt, mit  $J(u_0) = h$  und  $J(u) \geq \alpha + h$  für  $\|u - u_0\|_X = \rho$ .

Den Beweis werden wir hier nicht geben. Man findet ihn zum Beispiel im Buch von Struwe [14].

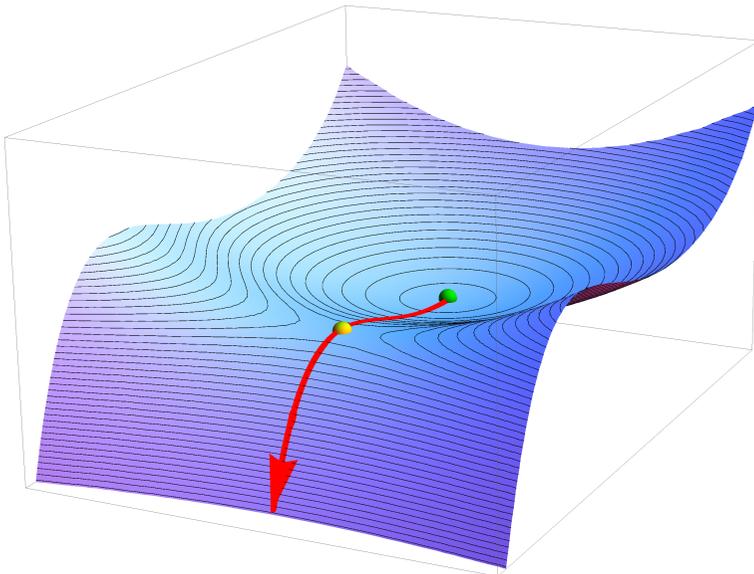


Abbildung 13.4: Vorstellung bei einem lokalen Minimum mit einem „Mountain-Pass“.

Die Palais-Smale-Bedingung bedeutet, dass bei einer Folge von Funktionen, bei denen das Funktional  $J$  lokal immer „flacher“ wird, die Funktionen nicht nach  $\infty$  abhauen können. Die Darstellung eines Funktionals, bei dem diese Bedingung nicht erfüllt ist, findet man in Abbildung 13.5.

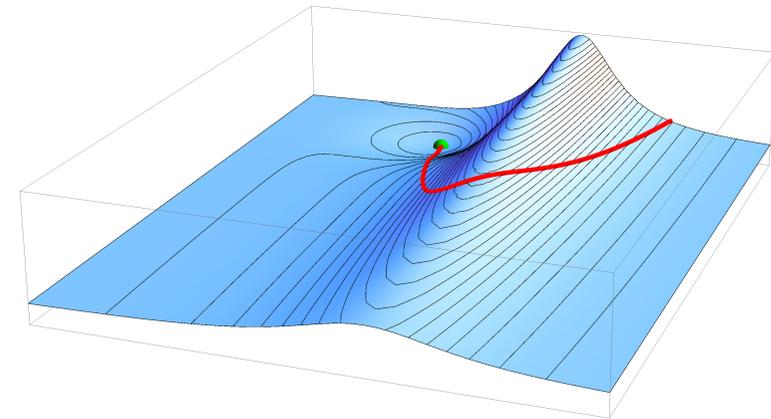


Abbildung 13.5: In  $\mathbb{R}^2$  führt nicht über jeden Bergrücken ein Pass. Eine nach Palais-Smale genannte Bedingung lässt Fälle, wie in diesem Bild dargestellt, nicht zu.

## 13.4 Numerische Approximierungen

### 13.4.1 Konstruktive Approximationen beim Minimum

Wenn  $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  als einzigen stationären Punkt ein Minimum hat, können wir wie folgt vorgehen, um dieses Minimum zu finden:

1. Nehme eine Stelle  $x_0$ , am liebsten in der Nähe des Minimums.
2. Wenn  $\nabla f(x_0) = 0$  gilt, ist  $x_0$  das Minimum. Wenn  $\nabla f(x_0) \neq 0$ , dann wird  $f(x)$  kleiner, wenn man in die Richtung  $-\nabla f(x_0)$  geht. Das heißt, wenn man das Anfangswertproblem für das System gewöhnlicher Differen-

tialgleichungen betrachtet

$$\begin{cases} x'(t) = -\nabla f(x(t)) & t \in \mathbb{R}^+, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (13.12)$$

dann wird  $x(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  zu einer Stelle  $x_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ , führen mit  $\nabla f(x_\infty) = 0$  und diese Stelle wird das Minimum sein.

Numerisch kann man die Schritte bezüglich  $t$  wie folgt diskretisieren:

$$\frac{x(t + \varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} = -\nabla f(x(t)).$$

Für  $0 < \varepsilon$  genügend klein und  $x_n := x(n\varepsilon)$  führt dies zum folgenden Rezept:

---

**Algorithmus 1** für ein Minimum von  $f$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  genügend klein.

1. Nehme eine Stelle  $x_0$ , am liebsten in der Nähe des Minimums.
2. Berechne iterativ  $x_{n+1} = x_n - \varepsilon \nabla f(x_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Das Minimum wird approximiert durch  $x_n$  für  $n$  genügend gross.

---

Abbildung 13.6 stellt einen solchen Vorgang dar.

Man kann das gleiche Rezept anwenden, um ein lokales Minimum zu finden, wenn man genügend nahe am Minimum anfängt.

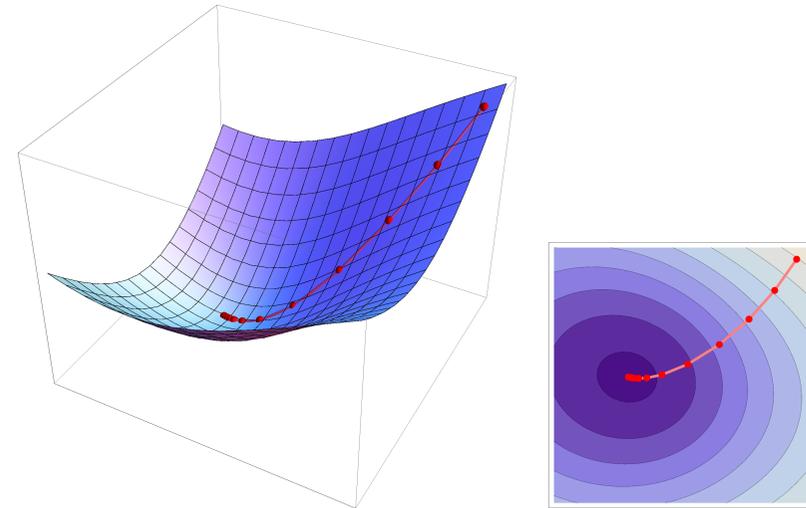


Abbildung 13.6: Numerische Approximation eines Minimums; rechts die Niveaumengen.

Für  $J \in C^1(W_{(0)}^{1,2}(\Omega); \mathbb{R})$  kann man ähnlich vorgehen. Sei  $G \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  und definiere  $J : W_{(0)}^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + G(u) \right) dx.$$

Dann findet man

$$\partial J(u; \varphi) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + G_u(u) \varphi) dx.$$

Weil  $W^{1,2}(\Omega)$  und  $W_{(0)}^{1,2}(\Omega)$  Hilberträume sind, kann man  $\partial J(u; \cdot) \in (W_{(0)}^{1,2}(\Omega))'$  auch auffassen als Element von  $W_{(0)}^{1,2}(\Omega)$ . Das heißt, es gibt  $w_u \in W_{(0)}^{1,2}(\Omega)$  derart, dass

$$\partial J(u; \varphi) = \langle w_u, \varphi \rangle.$$

Für  $W_{(0)}^{1,2}(\Omega)$  hat man

$$\langle w, \varphi \rangle := \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \varphi + w \varphi) dx.$$

Für  $W_0^{1,2}(\Omega)$  kann man übrigens auch  $\langle w, \varphi \rangle := \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi dx$  benutzen.

Man approximiert nun wie folgt:

1. Man nehme eine geschickte Anfangsfunktion  $u_0 \in W_{(0)}^{1,2}(\Omega)$ .
2. Man berechnet iterativ  $u_{n+1} := u_n - \varepsilon w_{u_n}$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

Für Schritt 2 müssen wir also die folgende lineare Euler-Lagrange Gleichung in  $w$  lösen:

$$\int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla \varphi + w \varphi) dx = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \varphi + G_u(u) \varphi) dx. \quad (13.13)$$

Wir finden durch partielle Integration formell, dass

- für  $W^{1,2}(\Omega)$ :

$$\begin{cases} -\Delta w + w = -\Delta u + G_u(u) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.14)$$

- und für  $W_0^{1,2}(\Omega)$ :

$$\begin{cases} -\Delta w + w = -\Delta u + G_u(u) & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \quad (13.15)$$

Übrigens werden die Lösungen dieser linearen Randwertprobleme numerisch approximiert durch zum Beispiel die Finite-Elemente-Methode. Diese Methode basiert auf einer Diskretisierung von (13.13) und benutzt nicht die starke Formulierung in (13.14) oder (13.15).

### 13.4.2 Konstruktive Approximationen beim Sattelpunkt

Man verwendet die Idee, die auch hinter dem Theorem von Ambrosetti-Rabinowitz steckt. Das heißt, man berechnet erstens das lokale Minimum  $x_{\min}$  und sucht eine Sphäre  $B_{\rho}(x_{\min})$  derart, dass  $f(x) > f(x_{\min}) + \alpha$  für alle  $x \in \partial B_{\rho}(x_{\min})$ . Als Nächstes sucht man eine Funktion  $x_{\text{test}} \notin B_{\rho}(x_{\min})$  mit  $f(x_{\text{test}}) < f(x_{\min}) + \alpha$ . Statt Punkte benutzt man diesmal Kurven. Man fängt an mit dem Polygonzug  $[x_{\min}, x_{\text{test}}]$  oder genauer gesagt:

$$k_0(s) = (1-s)x_{\min} + sx_{\text{test}} \text{ für } s \in [0, 1],$$

und lässt jeden Punkt auf dieser Kurve sich ändern durch die Differentialgleichung in (13.12), das heißt

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} k(t, s) = -\nabla f(k(t, s)) & t \in \mathbb{R}^+, \\ k(t, s) = k_0(s). \end{cases} \quad (13.16)$$

Berechnet man für jedes  $t \in \mathbb{R}^+$  anschließend die Stelle auf  $s \mapsto k(t, s)$ , wo  $f|_{x \in \{k(t, s); s \in [0, 1]\}}$  ihr Maximum annimmt, sagen wir in  $s(t)$ , dann sollte man den Sattelpunkt wie folgt finden können:

$$x_{\text{sattel}} = \lim_{t \rightarrow \infty} k(t, s(t)).$$

Eine ganze Kurve numerisch zu modifizieren, wie (13.16) vorschreibt, ist sehr aufwendig. Es reicht, wenn man so etwas nur macht an der Stelle auf der Kurve, wo  $f$  maximal ist. Statt mit Kurven kann man sogar mit Polygonzügen arbeiten.

---

**Algorithmus 2** für einen Sattelpunkt von  $f$ . Sei  $x_{\min}$  ein lokales Minimum.

1. Finde  $x_{\text{test}}$  mit  $f(x_{\text{test}}) < f(x_{\text{min}})$  und fixiere den Polygonzug  $P_0 = [x_{\text{min}}, x_{\text{test}}]$ .
2. Sei  $P_n = [x_{\text{min}} = x_0^n, x_1^n, \dots, x_k^n, x_{k+1}^n = x_{\text{test}}]$  ein Polygonzug. Berechne  $y^n \in P_n$  derart, dass

$$f(y^n) = \max \{f(x); x \in P_n\},$$

setze  $p^n = y^n - \varepsilon \nabla f(y^n)$  und definiere  $P_{n+1}$  durch

$$P_{n+1} = \begin{cases} [x_0^n, \dots, x_m^n, p^n, x_{m+1}^n, \dots, x_{k+1}^n] & \text{wenn } y^n \in (x_m^n, x_{m+1}^n), \\ [x_0^n, \dots, x_{m-1}^n, p^n, x_{m+1}^n, \dots, x_{k+1}^n] & \text{wenn } y^n = x_m^n. \end{cases}$$

Für  $n$  genügend gross, sollte  $y^n$  einen Sattelpunkt approximieren.

Eine Skizze einer solchen Approximation eines Sattelpunktes findet man in Abbildung 13.7. Der Punkt  $y^n$  ist jeweils in rot dargestellt und der Punkt  $p^n$  in grün. Ein blauer Pfeil markiert die Richtung der Verschiebung  $y^n$  nach  $p^n$ .

**Bemerkung 13.4.1** Wenn  $y^n \in (x_m^n, x_{m+1}^n)$  gilt, dann folgt, weil  $f$ , eingeschränkt auf  $[x_m^n, x_{m+1}^n]$ , in  $y^n$  ein Maximum hat und weil  $f$  differenzierbar ist, dass

$$\nabla f(y^n) \cdot (x_{m+1}^n - x_m^n) = 0.$$

Anders gesagt, für die neue Stelle  $p^n = y^n - \varepsilon \nabla f(y^n)$  gilt

$$(p^n - y^n) \perp (x_{m+1}^n - x_m^n).$$

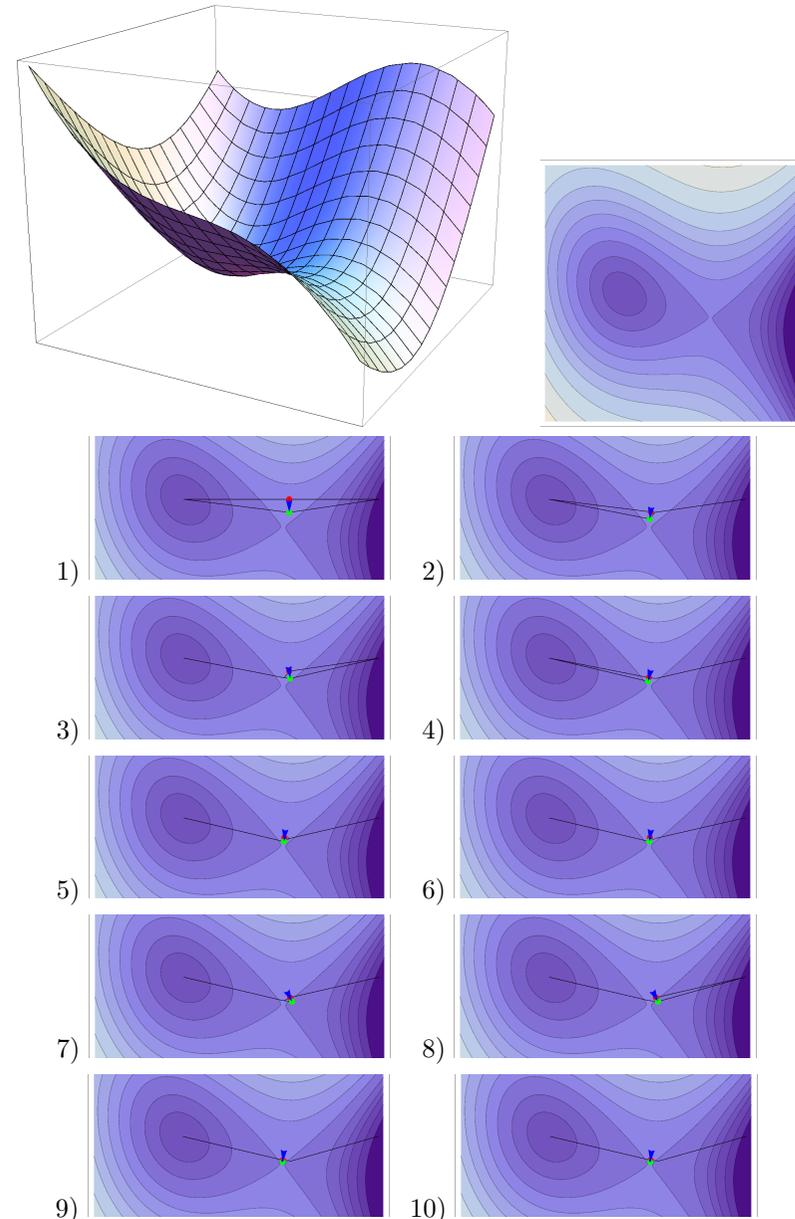


Abbildung 13.7: Darstellung einer Funktion mit Minimum und Sattelpunkt; oben rechts die Niveaumengen; unten eine Approximation des Sattelpunktes durch Algorithmus 2.

## 13.5 Subkritisch und superlinear

Die Anwendung von Theorem 13.3.4 auf

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - G(x, u(x)) \right) dx. \quad (13.17)$$

sieht dann wie folgt aus:

**Theorem 13.5.1** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und  $G(x, u) = \int_0^u g(x, s) ds$  mit  $g \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ . Nehme an, die folgenden Bedingungen sind erfüllt:

1.  $\limsup_{u \rightarrow 0} u^{-1} g(x, u) \leq 0$  gleichmäßig in  $x \in \Omega$ ;
2. es gibt  $C \in \mathbb{R}$  und  $p < \frac{n+2}{n-2}$  so, dass  $|g(x, u)| \leq C(1 + |u|^p)$  für alle  $(x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ ;
3. es gibt  $q > 2$  und  $R \in \mathbb{R}$  so, dass  $0 \leq qG(x, u) \leq ug(x, u)$  für alle  $(x, u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  mit  $|u| \geq R$ .

Dann hat (13.17) einen "Mountain-Pass"  $\hat{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , das heißt: für alle  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} (\nabla \hat{u}(x) \cdot \nabla \varphi(x) - g(x, \hat{u}(x)) \varphi(x)) dx = 0$$

und

$$J(\hat{u}) = \inf_{\Phi \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J(\Phi(t)) > 0$$

für eine geschickt gewählte Kurvenmenge  $\Gamma$  (eigentlich wählt man  $u_1$ ) wie in (13.11).

**Bemerkung 13.5.2** Die drei Bedingungen lassen sich wie folgt beschreiben:

1. Die erste Bedingung sorgt dafür, dass der quadratische Term in der Nähe von 0 bestimmend ist und für eine Delle sorgt.
2. Die zweite Bedingung sorgt dafür, dass die Wachstumsrate von der Nichtlinearität subkritisch ist.
3. Die dritte Bedingung sorgt dafür, dass die Nichtlinearität stärker als quadratisch wächst für große  $u$  und bedeutet, dass die Nichtlinearität im dazu gehörenden Randwertproblem superlinear ist.

**Aufgabe 13.1** Zeigen Sie, dass unter den Bedingungen in Theorem 13.5.1 die 0-Funktion ein lokales Minimum für (13.17) liefert.

**Aufgabe 13.2** Beweisen Sie dieses Theorem.

**Aufgabe 13.3** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet in  $\mathbb{R}^n$  und

$$2 < p < \frac{n+2}{n-2}.$$

Betrachte

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} - f u \right) dx, \quad (13.18)$$

wenn  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$  genügend klein ist. Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung für  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  aus (13.18) zwei Lösungen hat für solche  $f$ .

## Regularität

### 14.1 Einleitung

Beweise von Regularitätssätzen sind meistens sehr aufwendig. Wir möchten uns gerne beschränken auf das Funktional  $J : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \right) dx. \quad (14.1)$$

Die volle Regularität lässt sich aber nur beweisen, wenn wir die Sache etwas allgemeiner angehen. Wir werden uns aber beschränken auf Funktionale, bei denen das Randwertproblem aus der Euler-Lagrange Gleichung linear und gleichmäßig elliptisch von zweiter Ordnung ist. Wir geben schon mal, noch ohne Beweis, das Ergebnis für (14.1).

**Theorem 14.1.1** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit  $\partial\Omega \in C^{k+2}$  und  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$  das Minimum für  $J$  in (14.1) bei  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann gilt folgendes:*

- Wenn  $f \in W^{k,2}(\Omega)$ , dann folgt  $\tilde{u} \in W^{k+2,2}(\Omega)$ .

- Es gibt  $c(\Omega, k) \in \mathbb{R}^+$  derart, dass für alle  $f \in W^{k,2}(\Omega)$ :

$$\|\tilde{u}\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq c(\Omega, k) \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)}.$$

An der Formulierung sieht man schon, dass der Rand eine wichtige Rolle spielt. Der Beweis dieses Theorems enthält mehrere Teilbeweise. Das Verhalten im Innern des Gebietes und das Verhalten am Rande wird getrennt betrachtet. Im Innern wird verfahren wie auf  $\mathbb{R}^n$ . Der Rand wird mit einer Zerlegung der Eins in mehrere Stücke verteilt, jedes Stück wird flachgebügelt wie in Kapitel 8, und anschließend wird Regularität auf dem Halbraum bewiesen. Dieses Bügeln hat aber zur Folge, dass der zugrundeliegende elliptische Differentialoperator sich ändert.

Der transformierte Differentialoperator bleibt zwar elliptisch, aber das zugehörige Funktional wird durch die Trans-

formation  $x \mapsto y(x)$  und  $u(x) = w(y(x))$ :

$$\tilde{J}(w) = \int_{\tilde{\Omega}} \left( \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \right) \frac{\partial w}{\partial y_i} \frac{\partial w}{\partial y_j} - \tilde{f} w \right) \left| \det \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \right|^{-1} dy. \quad (14.2)$$

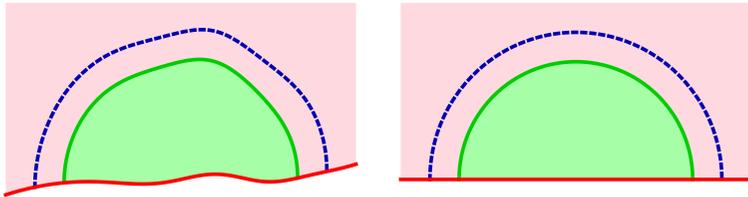


Abbildung 14.1: Transformation zur Halbkugel

Bei einer  $C^1(\bar{\Omega})$ -Transformation gilt  $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$  genau dann, wenn  $u \in W_0^{1,2}(\tilde{\Omega})$  erfüllt ist.

Weil man sich also notwendigerweise mit allgemeineren elliptischen Operatoren beschäftigen muss, werden wir kurz dazu Stellung nehmen.

Statt die schwache Form der Euler-Lagrange-Gleichung für (14.1) werden wir die folgende Gleichung betrachten für alle  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a^{ij} \partial_i u \partial_j \varphi + b^j u \partial_j \varphi - c^i \partial_i u \varphi - d u \varphi) dx \\ = \int_{\Omega} f \varphi dx. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Wir verwenden die Summenkonvention aus der Physik:

$$a^{ij} \partial_i u \partial_j \varphi := \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \partial_i u \partial_j \varphi \text{ usw.}$$

Wenn die Funktion  $u$  in (14.3) sogar in  $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$  liegt, dann folgt

$$\partial_j (a^{ij} \partial_i u) - \partial_j (b^j u) - c^i \partial_i u - d u = f \text{ in } \Omega.$$

Schaut man diese Gleichung an, dann sieht man, dass wir einige Annahmen bezüglich der Koeffizienten brauchen. Diese Konditionen fassen wir zusammen in der folgenden Bedingung, wobei wir  $k$  später bestimmen werden.

**Bedingung 14.1.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes offenes Gebiet. Für gegebenes  $k \in \mathbb{N}$  sei folgendes erfüllt:

1. Der Rand ist genügend glatt:  $\partial\Omega \in C^{k+2}$ .
2. Die Koeffizienten sind genügend regulär:  $a^{ij}, b^j \in C^{k+2}(\bar{\Omega})$  und  $c^{ij}, d \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$ .
3. Der Differentialoperator ist gleichmäßig elliptisch: es gibt  $\lambda > 0$  derart, dass

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ und } x \in \bar{\Omega}. \quad (14.4)$$

Mit diesen Bedingungen folgt noch nicht die Existenz oder die Eindeutigkeit einer Lösung. Wir brauchen noch eine Bedingung an  $d$ , denn wie bei einem variationellen Funktional braucht man Koerzivität, wenn  $u = \varphi$ , und dazu braucht  $-d$  eine untere Schranke:

**Lemma 14.1.3** Nehme an,  $a^{ij}$ ,  $b^j$  und  $c^i$  sind derart, dass Bedingung 14.1.2 erfüllt ist für  $k = 0$  und  $f \in L^2(\Omega)$ . Dann existiert  $\mu \in \mathbb{R}$  derart, dass für jedes  $d$  mit

$$-d(x) \geq \mu \text{ gilt für alle } x \in \bar{\Omega}, \quad (14.5)$$

es genau eine Funktion  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt, die (14.3) erfüllt. Außerdem gibt es dann ein  $C = C(\lambda, a_{ij}, b^j, c_i, d, \Omega)$  so, dass

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Beweis.** Eine Ungleichung von Poincaré (Theorem 7.3.5) sagt, dass wir  $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$  als Norm nehmen können. Zur Erinnerung:

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Weiter benutzen wir das Theorem von Lax-Milgram (Theorem 7.5.2) und setzen dazu als Bilinearform:

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (a^{ij} \partial_i u \partial_j v + b^j u \partial_j v - c^i \partial_i u v - d u v) dx.$$

Aus Bedingung 14.1.2.2 folgt die Beschränktheit:

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq M \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\ &\leq M C_P^2 \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Aus Bedingung 14.1.2.1 folgt

$$\int_{\Omega} a^{ij} \partial_i u \partial_j u dx \geq \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Weiter hat man für beliebiges  $\varepsilon > 0$ , dass

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (b^j u \partial_j u - c^i \partial_i u u) dx \\ &\geq -\| |b| + |c| \|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\geq -\frac{1}{2} \| |b| + |c| \|_{L^\infty(\Omega)} \left( \varepsilon^{-1} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Wir nehmen

$$\varepsilon = \| |b| + |c| \|_{L^\infty(\Omega)}^{-1} \lambda$$

und mit  $d_{\max} = \sup_{x \in \Omega} d(x)$  finden wir:

$$\begin{aligned} B(u, u) &\geq \\ &\frac{1}{2} \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( -d_{\max} - \frac{1}{2} \| |b| + |c| \|_{L^\infty(\Omega)}^2 \lambda^{-1} \right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Dann ist  $B(u, u)$  koerzitiv, wenn der zweite Koeffizient in (14.6) nicht negativ ist. Wählen wir

$$\mu = \frac{1}{2} \| |b| + |c| \|_{L^\infty(\Omega)}^2 \lambda^{-1} \quad (14.7)$$

dann ist  $B(u, u)$  für  $-d_{\max} > \mu$  koerzitiv.

Für  $f \in L^2(\Omega)$  gilt  $v \mapsto \int_{\Omega} f v dx \in (W_0^{1,2}(\Omega))'$  und es folgt aus Lax-Milgram, dass es genau eine Funktion  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gibt, die die Gleichung

$$B(u, v) = \int_{\Omega} f v dx \text{ für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad (14.8)$$

erfüllt. Weil (14.8) nichts anderes als (14.3) ist, ist hiermit Existenz und Eindeutigkeit bewiesen.

Aus (14.6), (14.5) mit  $\mu$  als in (14.7) und

$$\left| \int_{\Omega} f u dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

folgt die Abschätzung  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_P}{\beta} \|f\|_{L^2(\Omega)}$ . ■

## 14.2 Regularität im Innern

Die Ergebnisse werden wir nur für  $p = 2$  beweisen. Ähnliche Ergebnisse sind jedoch auch gültig für  $p \in (1, \infty)$ .

**Theorem 14.2.1 (Regularität im Innern)** *Sei  $f \in L^2(\Omega)$  und nehme an, Bedingung 14.1.2 2 und 3 sind erfüllt für  $k = 0$ . Sei  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  eine Funktion, die (14.3) erfüllt, und sei  $\Omega_s$  ein Teilgebiet von  $\Omega$  mit  $\bar{\Omega}_s \subset \Omega$ . Dann gilt:*

1.  $u \in W^{2,2}(\Omega_s)$ ;
2. es gibt  $C = C(\Omega, \Omega_s)$  derart, dass

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega_s)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (14.9)$$

**Bemerkung 14.2.2** *Die Annahmen  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  braucht man nicht für die innere Regularität. Wenn aber  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt und Lemma 14.1.3 zutrifft, dann findet man statt (14.9) sogar*

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega_s)} \leq \tilde{C} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (14.10)$$

Bevor wir dieses Theorem beweisen können, brauchen wir eine passende Approximation der Ableitung. Dafür benutzen wir

$$D_\ell^h(u)(x) = \frac{u(x + he_\ell) - u(x)}{h} \quad (14.11)$$

und

$$D^h(u)(x) = (D_1^h(u)(x), \dots, D_n^h(u)(x)).$$

Wenn  $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ , dann gilt auch  $D_\ell^h(u) \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ . Dieser Differenzoperator hat ähnliche Eigenschaften wie der Differentialoperator:

- Er ist linear:

$$D_\ell^h(c_1u + c_2v)(x) = c_1D_\ell^h(u)(x) + c_2D_\ell^h(v)(x).$$

- Es gibt eine Produktregel:

$$\begin{aligned} D_\ell^h(uv)(x) &= D_\ell^h(u)(x)v(x + he_\ell) + u(x)D_\ell^h(v)(x) \\ &= D_\ell^h(u)(x)v(x) + u(x + he_\ell)D_\ell^h(v)(x). \end{aligned}$$

Wenn  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ,  $\Omega_s \subset \Omega$  gilt und  $d_0$  wie folgt ist:

$$d_0 := \inf \{ |x - y| ; x \in \Omega_s, y \notin \Omega \} > 0, \quad (14.12)$$

dann gilt für  $0 < |h| < d_0$ , dass  $D_\ell^h(u) \in W^{k,p}(\Omega_s)$ .

**Proposition 14.2.3** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet, sei  $\bar{\Omega}_s \subset \Omega$  und  $u \in L^2(\Omega)$ .*

1. Wenn außerdem  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , dann gilt für  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $|h| < d_0$ ,

$$\|D^h(u)\|_{L^2(\Omega_s)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (14.13)$$

2. Wenn es  $C \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  gibt derart, dass  $\|D^h(u)\|_{L^2(\Omega_s)} \leq C$  für alle  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $|h| < \varepsilon$ , dann gilt  $u \in W^{1,2}(\Omega_s)$  und

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_s)} \leq C.$$

**Beweis.** 1. Sei  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ . Man findet

$$\begin{aligned} D_\ell^h(u)(x) &= \frac{u(x + he_\ell) - u(x)}{h} \\ &= \frac{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} u(x + hte_\ell) dt}{h} = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(x + hte_\ell) dt \end{aligned}$$

und es folgt mit Cauchy-Schwarz, dass

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(x + hte_\ell) dt \\ & \leq \left( \int_0^1 1 dt \right)^{1/2} \left( \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(x + hte_\ell) \right|^2 dt \right)^{1/2} \\ & = \left( \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(x + hte_\ell) \right|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} |D_\ell^h(u)(x)|^2 dx & \leq \int_{\Omega_s} \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(x + hte_\ell) \right|^2 dt dx \\ & = \int_0^1 \int_{\Omega_s - hte_\ell} \left| \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) \right|^2 dy dt \\ & \leq \int_0^1 \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) \right|^2 dy dt = \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) \right|^2 dy. \end{aligned}$$

2. Wegen  $\|D^h(u)\|_{L^2(\Omega_s)} \leq C$  folgt, dass es ein Folge  $h_k \downarrow 0$  gibt derart, dass  $D_\ell^{h_k}(u)$  schwach konvergent ist. Sagen wir  $D_\ell^{h_k}(u) \rightharpoonup v_\ell \in L^2(\Omega_s)$ . Wir werden zeigen, dass die  $v_\ell$  auf  $\Omega_s$  die schwachen Ableitungen von  $u$  sind.

Funktionen  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_s)$  können wir außerhalb von  $\Omega_s$  durch 0 fortsetzen. Wir dürfen also annehmen, dass  $\varphi \in$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Dann folgt für  $|h| < d_0$ , dass

$$\begin{aligned} & \int_\Omega D_\ell^h(u)(x) \varphi(x) dx \\ & = \frac{1}{h} \left( \int_{\Omega_s} u(x + he_\ell) \varphi(x) dx - \int_{\Omega_s} u(x) \varphi(x) dx \right) \\ & = \frac{1}{h} \left( \int_{\Omega_s + he_\ell} u(x) \varphi(x - he_\ell) dx - \int_{\Omega_s} u(x) \varphi(x) dx \right) \\ & = - \int_\Omega u(x) D_\ell^{-h}(\varphi)(x) dx, \end{aligned} \tag{14.14}$$

und dass

$$\begin{aligned} \int_\Omega v_\ell(x) \varphi(x) dx & = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega D_\ell^{h_k}(u)(x) \varphi(x) dx = \\ & = - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega u(x) D_\ell^{-h_k}(\varphi)(x) dx = - \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}(x) dx. \end{aligned}$$

Das heißt, dass  $v_\ell \in L^2(\Omega_s)$  die schwache Ableitung von  $u$  in der  $x_\ell$ -Richtung ist, und dass  $u \in W^{1,2}(\Omega_s)$ . Weiter folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_s} |D_\ell^{h_k}(u)(x)|^2 dy \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_s} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) - D_\ell^{h_k}(u)(x) \right|^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) D_\ell^{h_k}(u)(x) - \left| \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) \right|^2 \right) dy \\ & \geq \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \int_{\Omega_s} \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) D_\ell^{h_k}(u)(x) dy - \int_{\Omega_s} \left| \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) \right|^2 dy \\ & = \int_{\Omega_s} \left| \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) \right|^2 dy \end{aligned}$$

und die letzte Aussage. ■

**Beweis von Theorem 14.2.1.** 1. Statt (14.8) betrachten wir

$$\int_{\Omega} a^{ij} \partial_i u \partial_j v \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} v \, dx \quad (14.15)$$

mit

$$\tilde{f} = f + \partial_j (b^j u) + c^i \partial_i u + d u. \quad (14.16)$$

Dazu haben wir partiell integriert:

$$\int_{\Omega} -b^j u \partial_j v \, dx = \int_{\Omega} \partial_j (b^j u) v \, dx$$

für  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  und  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Unter anderem aus  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  und  $b^j \in C^1(\bar{\Omega})$  folgt  $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ .

2. Wir haben angenommen  $\bar{\Omega}_s \subset \Omega$ . Weil  $\Omega$  beschränkt ist folgt  $d_0 > 0$ . Definiere  $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  so, dass

$$\begin{aligned} 0 \leq \zeta(x) \leq 1 & \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ \zeta(x) = 1 & \quad \text{für } x \in \Omega_s, \\ \zeta(x) = 0 & \quad \text{wenn } d(x, \Omega_s) \geq \frac{1}{2}d_0. \end{aligned}$$

Für später definieren wir noch

$$\Omega_{s^*} = \{x \in \Omega; d(x, \Omega_s) < \frac{1}{2}d_0\}.$$

3. Sei  $D_\ell^h(u)$  wie in (14.11). Der ‘große Trick’ ist es in (14.15) die folgende Funktion einzusetzen:

$$v = D_\ell^{-h} (\zeta^2 D_\ell^h (u)).$$

Wenn  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  gilt, dann folgt nicht, dass  $D_\ell^h u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Wenn man  $\zeta^2$  hereinschiebt, dann folgt aber schon für  $|h| \leq$

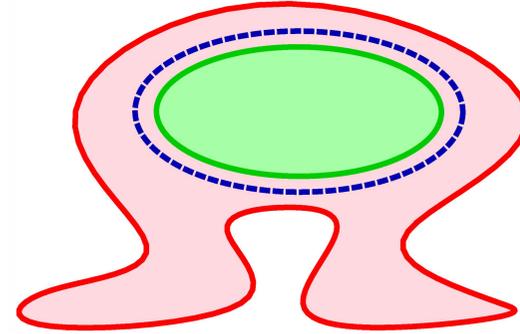


Abbildung 14.2:  $\Omega_s \subset \Omega_{s^*} \subset \Omega$

$\frac{1}{2}d_0$ , dass  $\zeta^2 D_\ell^h u \in W^{1,2}(\Omega)$  und auch  $D_\ell^{-h} (\zeta^2 D_\ell^h u) \in W^{1,2}(\Omega)$ . Der Träger dieser beiden Funktionen liegt in  $\Omega_{s^*}$ . Also gilt auch  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Wir werden die Gleichung

$$\int_{\Omega} a^{ij} \partial_i u \partial_j (D_\ell^{-h} (\zeta^2 D_\ell^h u)) \, dx = \int_{\Omega} \tilde{f} (D_\ell^{-h} (\zeta^2 D_\ell^h u)) \, dx \quad (14.17)$$

ausschreiben und für  $0 < |h| < \frac{1}{2}d_0$  die einzelnen Terme abschätzen.

4. Die linke Seite von (14.17) wird wie folgt abgeschätzt. Wenn wir wie in (14.14) vorgehen, finden wir

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a^{ij}(x) \partial_i u(x) \partial_j (D_\ell^{-h} (\zeta^2 D_\ell^h u))(x) \, dx \\ & = \int_{\Omega} (D_\ell^h (a^{ij} \partial_i u))(x) \partial_j (\zeta^2 D_\ell^h u)(x) \, dx. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Als Nächstes schreiben wir

$$(14.18) = \int_{\Omega_{s^*}} a^{ij} (\cdot + h e_\ell) (\partial_i D_\ell^h u) \zeta^2 (\partial_j D_\ell^h u) dx \quad (14.19)$$

$$+ \int_{\Omega_{s^*}} a^{ij} (\cdot + h e_\ell) (D_\ell^h \partial_i u) 2 (\partial_j \zeta) \zeta (D_\ell^h u) dx \quad (14.20)$$

$$+ \int_{\Omega_{s^*}} (D_\ell^h a^{ij}) (\partial_i u) \zeta^2 (D_\ell^h \partial_j u) dx \quad (14.21)$$

$$+ \int_{\Omega_{s^*}} (D_\ell^h a^{ij}) (\partial_i u) 2 (\partial_j \zeta) \zeta (D_\ell^h u) dx. \quad (14.22)$$

Für den ersten dieser vier Terme verwenden wir die gleichmäßige Elliptizität (14.4):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{s^*}} a^{ij} (x + h e_\ell) \partial_i (D_\ell^h u) (x) \zeta^2 (x) \partial_j (D_\ell^h u) (x) dx \\ \geq \lambda \int_{\Omega_{s^*}} \zeta^2 (x) |\nabla (D_\ell^h u) (x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Für die restlichen Terme folgt mit Hilfe von Cauchy-Schwarz,  $2st \leq \varepsilon s^2 + \varepsilon^{-1} t^2$  und Proposition 14.2.3, dass

$$\begin{aligned} (14.20) &\leq C_{\zeta,a} \left( \int_{\Omega_{s^*}} \zeta^2 (x) |\nabla (D_\ell^h u) (x)|^2 dx \right)^{1/2} \times \\ &\quad \left( \int_{\Omega_{s^*}} |(D_\ell^h u) (x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon \|\zeta D_\ell^h \nabla u\|_{L^2(\Omega_{s^*})}^2 + \varepsilon^{-1} C_{\zeta,a}^2 \|D_\ell^h u\|_{L^2(\Omega_{s^*})}^2 \\ &\leq \varepsilon \|\zeta D_\ell^h \nabla u\|_{L^2(\Omega_{s^*})}^2 + \varepsilon^{-1} C_{\zeta,a}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (14.24)$$

ähnlich

$$(14.21) \leq \varepsilon \|\zeta D_\ell^h \nabla u\|_{L^2(\Omega_{s^*})}^2 + \varepsilon^{-1} \tilde{C}_{\zeta,a}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_{s^*})}^2, \quad (14.25)$$

und auch

$$(14.22) \leq \hat{C}_{\zeta,a} \|D_\ell^h u\|_{L^2(\Omega_{s^*})} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_{s^*})}. \quad (14.26)$$

5. Für die rechte Seite in (14.17) finden wir, für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{f} (D_\ell^{-h} (\zeta^2 D_\ell^h) u) dx \\ \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |\tilde{f}|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} (D_\ell^{-h} (\zeta^2 D_\ell^h) u)^2 dx. \end{aligned} \quad (14.27)$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\tilde{f}|^2 dx \leq \\ C \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \end{aligned} \quad (14.28)$$

und mit Proposition 14.2.3, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D_\ell^{-h} (\zeta^2 D_\ell^h) u)^2 dx &= \int_{\Omega_{s^*}} (D_\ell^{-h} (\zeta^2 D_\ell^h) u)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega_{s^*}} |\nabla (\zeta^2 D_\ell^h) u|^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega_{s^*}} \zeta^2 |\nabla \zeta|^2 |D_\ell^h u|^2 dx + 2 \int_{\Omega_{s^*}} \zeta^2 |\nabla D_\ell^h u|^2 dx. \end{aligned} \quad (14.29)$$

Kombiniert man (14.27), (14.28) und (14.29), folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{f} (D_\ell^{-h} (\zeta^2 D_\ell^h) u) dx &\leq 3\varepsilon \int_{\Omega_{s^*}} \zeta^2 |\nabla D_\ell^h u|^2 dx + \\ &+ C_\varepsilon \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right). \end{aligned} \quad (14.30)$$

6. Wählen wir jetzt  $\varepsilon$  genügend klein, dann folgt aus (14.23,14.24,14.25,14.26) und (14.30), dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda \int_{\Omega_s} |D_\ell^h \nabla u|^2 dx &\leq \frac{1}{2}\lambda \int_{\Omega_{s^*}} \zeta^2 |D_\ell^h \nabla u|^2 dx \leq \\ &\leq \tilde{C}_\varepsilon \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right). \end{aligned} \quad (14.31)$$

Mit Proposition 14.2.3 folgt, dass  $\nabla u \in W^{1,2}(\Omega_s)$  und

$$\|\nabla u\|_{W^{1,2}(\Omega_s)}^2 \leq \frac{2}{\lambda} \tilde{C}_\varepsilon \left( \int_{\Omega} |f|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right).$$

Weil  $u, |\nabla u| \in W^{1,2}(\Omega_s)$  gilt, folgt  $u \in W^{2,2}(\Omega_s)$ . Die Abschätzung wird

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega_s)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \right). \quad (14.32)$$

7. Wie in Lemma 11.2.1 kann man noch einen Schritt weitergehen, wenn man in (14.15)  $v = u$  einsetzt

$$\begin{aligned} \lambda \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} a^{ij} \partial_i u \partial_j u dx = \int_{\Omega} \tilde{f} u dx \\ &\leq \int_{\Omega} (f + \partial_j (b^j u) + c^i \partial_i u + d u) u dx \\ &\leq \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon > 0$  und genügend klein folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (14.33)$$

Kombiniert man schlussendlich (14.32) und (14.33) folgt das Ergebnis im Theorem. ■

**Theorem 14.2.4 (Höhere Regularität im Innern)** *Nehme an,  $k \in \mathbb{N}^+$ ,  $f \in W^{k,2}(\Omega)$  und, dass Bedingung 14.1.2 erfüllt ist. Sei  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  eine Lösung von (14.3). Sei  $\Omega_s$  ein Teilgebiet von  $\Omega$  mit  $\bar{\Omega}_s \subset \Omega$ . Dann gilt:*

1.  $u \in W^{k+2,2}(\Omega_s)$ ;
2. es gibt  $C = C(\Omega, \Omega_s, k)$  derart, dass

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega_s)} \leq C \left( \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

**Beweis.** Im vorletzten Theorem ist das Resultat für  $k = 0$  bewiesen. Sei  $\Omega_{s^*}$  ein Gebiet zwischen  $\Omega$  und  $\Omega_s$ :

$$\bar{\Omega}_s \subset \Omega_{s^*} \text{ und } \bar{\Omega}_{s^*} \subset \Omega.$$

Wir werden  $u \in W^{k+1,2}(\Omega_{s^*})$  annehmen und zeigen, dass  $u \in W^{k+2,2}(\Omega_s)$ .

Dazu nehmen wir  $v \in C_c^\infty(\Omega)$  und setzen  $\varphi = (-1)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha v$  für irgendeinen Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k$ . Eine partielle Integration liefert für  $\tilde{u} = \partial_x^\alpha u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} a^{ij} \partial_i \tilde{u} \partial_j v dx \tag{14.34} \\ &= \int_{\Omega} a^{ij} \partial_i (\partial_x^\alpha u) \partial_j v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \partial_i u \partial_x^\alpha (a^{ij} \partial_j v) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( a^{ij} \partial_i u \partial_j \varphi + (-1)^{|\alpha|} \partial_i u \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial_x^{\alpha-\beta} a^{ij}) (\partial_x^\beta v) \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} \left( a^{ij} \tilde{f} \varphi + (-1)^{|\alpha|} \partial_i u \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial_x^{\alpha-\beta} a^{ij}) (\partial_x^{\beta} v) \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} \left( (\partial_x^{\alpha} (a^{ij} \tilde{f})) + (-1)^{|\alpha-\beta|} \times \right. \\
 &\quad \left. \partial_x^{\beta} \left( \partial_i u \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial_x^{\alpha-\beta} a^{ij}) \right) \right) v dx. \quad (14.35)
 \end{aligned}$$

Hier bedeutet  $\beta \preceq \alpha$ , dass  $\beta \leq \alpha$  und  $\beta \neq \alpha$ . Weil  $C_c^{\infty}(\Omega)$  dicht in  $W_0^{1,2}(\Omega)$  liegt, können wir in (14.34-14.35)  $v \in C_c^{\infty}(\Omega)$  ersetzen durch  $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . Weil

$$\begin{aligned}
 &\left\| \partial_x^{\alpha} (a^{ij} \tilde{f}) + (-1)^{|\alpha-\beta|} \partial_x^{\beta} \left( \partial_i u \sum_{\beta \preceq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial_x^{\alpha-\beta} a^{ij}) \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq C \left( \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \right)
 \end{aligned}$$

folgt aus Theorem 14.2.1, dass  $\tilde{u} \in W^{2,2}(\Omega_s)$ . Und weil man jeden Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k$  zulässt, folgt  $u \in W^{k+2,2}(\Omega_s)$  und sogar

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega_s)} &\leq C \left( \|u\|_{W^{k+1,2}(\Omega_{s^*})} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \right) \leq \\
 &\leq C' \left( \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} \right).
 \end{aligned}$$

Am Ende haben wir nochmals den Induktionsansatz benutzt. ■

### 14.3 Regularität am Rande

Wir werden die Regularität auf einer Halbkugel beweisen. Wie in der Einleitung dieses Kapitels beschrieben, kann man den

Rand lokal durch eine Transformation flachbügeln. Es reicht also für die Regularität am Rand, wenn wir dies für eine Halbkugel machen mit  $u = 0$  auf dem flachen Stück des Randes dieser Halbkugel:

$$B_R^+(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R \text{ und } x_1 > 0\}.$$

**Theorem 14.3.1** Sei  $f \in L^2(B_1^+(0))$ ,  $\varepsilon > 0$  und nehme an, Bedingung 14.1.2 2 und 3 ist erfüllt. Wenn  $u \in W_0^{1,2}(B_1^+(0))$  eine schwache Lösung von (14.3) ist, dann gilt:

1.  $u \in W^{2,2}(B_{1-\varepsilon}^+(0))$ ;
2. es gibt  $C = C(n, \varepsilon)$  derart, dass

$$\|u\|_{W^{2,2}(B_{1-\varepsilon}^+(0))} \leq C \left( \|f\|_{L^2(B_1^+(0))} + \|u\|_{L^2(B_1^+(0))} \right).$$

**Beweis.** Jetzt nehmen wir  $\zeta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  so, dass

$$\begin{aligned}
 0 \leq \zeta(x) \leq 1 &\quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\
 \zeta(x) = 1 &\quad \text{für } x \in B_{1-\varepsilon}^+(0), \\
 \zeta(x) = 0 &\quad \text{für } x \notin B_{1-\varepsilon/2}^+(0).
 \end{aligned}$$

Für  $\ell \in \{2, \dots, n\}$  kann man dem Beweis von Theorem 14.2.1 folgen und findet  $\partial_{\ell} \partial_i u \in L^2(B_{1-\varepsilon}^+(0))$ . Nur wenn  $\ell = 1$ , muss man sich etwas anderes überlegen. Man geht zurück zu der Gleichung (14.3) und findet nach partieller Integration unter Benutzung von  $\partial_i \partial_j u \in L^2(B_{1-\varepsilon}^+(0))$  für alle  $i, j$  außer  $i = j = 1$ , dass

$$\int_{B_1^+(0)} a^{11} \partial_1 u \partial_1 \psi \, dx = \int \tilde{f} \psi \, dx$$

mit  $\check{f} = \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \partial_j (a^{ij} \partial_i u) + \sum_j (\partial_j (b^j u) + c^j \partial_j u) + d u + f \in L^2(\Omega)$ . Weil die innere Regularität besagt, dass  $u \in W_{loc}^{2,2}(B_1^+(0))$ , folgt (fast überall)

$$a^{11} \partial_1^2 u = \partial_1 (a^{11} \partial_1 u) - \partial_1 a^{11} \partial_1 u = -\check{f} - \partial_1 a^{11} \partial_1 u \in L^2(\Omega) \quad (14.36)$$

Die gleichmäßige Elliptizität gibt  $a^{11} \geq \lambda > 0$  und so  $\partial_1^2 u \in L^2(\Omega)$ . Schlussendlich sei bemerkt, dass man für  $(i, j) \neq (1, 1)$ , wie im Beweis von Theorem 14.2.1, diese Abschätzung findet:

$$\|\partial_i \partial_j u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{L^2(B_1^+(0))} + \|u\|_{L^2(B_1^+(0))} \right).$$

Für  $(i, j) = (1, 1)$  benutzt man (14.36) und bekommt

$$\begin{aligned} \|\partial_1^2 u\|_{L^2(B_{1-\varepsilon}^+(0))} &\leq C \sum_{(i,j) \neq (1,1)} \|\partial_i \partial_j u\|_{L^2(B_{1-\varepsilon}^+(0))} + \\ &+ C \left( \|f\|_{L^2(B_1^+(0))} + \|u\|_{L^2(B_1^+(0))} \right). \end{aligned}$$

Um die Terme mit Ableitungen erster Ordnung von  $u$  loszuwerden, steckt in dieser letzten Abschätzung auch wieder Lemma 14.1.3. ■

**Theorem 14.3.2** Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f \in W^{k,2}(B_1^+(0))$ ,  $\varepsilon > 0$  und nehme an, Bedingung 14.1.2 2 und 3 ist erfüllt. Wenn  $u \in W_0^{1,2}(B_1^+(0))$  eine schwache Lösung von (14.3) ist, dann gilt:

1.  $u \in W^{k+2,2}(B_{1-\varepsilon}^+(0))$ ;
2. es gibt  $C = C(n, \varepsilon, k)$  derart, dass

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(B_{1-\varepsilon}^+(0))} \leq C \left( \|f\|_{W^{k,2}(B_1^+(0))} + \|u\|_{L^2(B_1^+(0))} \right). \quad (14.37)$$

**Beweis.** Wir verfahren durch vollständige Induktion. Für  $k = 0$  ist das Theorem bewiesen in 14.3.1. Wir nehmen an, Theorem 14.3.2 sei gültig für irgendein  $k \in \mathbb{N}$  und werden das Resultat für  $k + 1$  beweisen. Ähnlich wie im Beweis von 14.3.1 müssen wir zwei Fälle unterscheiden für  $\beta \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\beta| = k + 3$ , nämlich  $\beta_1 < k + 3$  und  $\beta_1 = k + 3$ . Wenn  $\beta_1 < k + 3$ , kann man vorgehen wie beim Beweis im Innern und bekommt  $\partial^\beta u \in L^2(B_{1-\varepsilon}^+(0))$  und

$$\|\partial^\beta u\|_{L^2(B_{1-\varepsilon}^+(0))} \leq C \left( \|f\|_{W^{k+1,2}(B_1^+(0))} + \|u\|_{L^2(B_1^+(0))} \right). \quad (14.38)$$

Für  $\beta = (k + 3, 0, \dots, 0)$  benutzen wir, dass  $u \in W_{loc}^{k+3,2}(B^+(0))$  und eine ähnliche Identität wie in (14.36). Wir finden  $\partial_1^{k+3} u \in L^2(B_{1-\varepsilon}^+(0))$  und

$$\begin{aligned} \|\partial_1^{k+3} u\|_{L^2(B_{1-\varepsilon}^+(0))} &\leq C \sum_{\substack{|\beta|=k+3 \\ \beta_1 < k+3}} \|\partial^\beta u\|_{L^2(B_{1-\varepsilon}^+(0))} + \\ &+ \left( \|f\|_{L^2(B_1^+(0))} + \|u\|_{L^2(B_1^+(0))} \right). \end{aligned}$$

Wiederum haben wir Lemma 14.1.3 verwendet. ■

Das Resultat für die Halbkugel lässt sich mit Hilfe einer Transformation verwenden auf Gebiete, die sich durch einen  $C^{k+2}$ -Diffeomorphismus auf solch einer Halbkugel abbilden lassen. Wir verweisen auf Kapitel 8. Eine geschickte Zerlegung der Eins auf dem Rande gibt die gewünschten Ergebnisse auf dem ganzen Rand.

**Aufgabe 14.1** Zeige, dass die soeben gemachte Aussage tatsächlich stimmt. Um genau zu sein: wenn man (14.3) betrachtet in einer Umgebung des Randes, wobei lokal die Be-

Bedingung 14.1.2 erfüllt ist, dann gibt es einen lokalen  $C^{k+2}$ -Diffeomorphismus  $T$ , der:

1. lokal den Rand flachbügelt:  $T(\partial\Omega \cap U) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ;
2. die schwache Identität (14.3) auf  $\Omega \cap U$  überführt in eine ähnliche Identität auf  $T(\Omega \cap U)$ , wobei wiederum Bedingung 14.1.2 erfüllt ist.

Mit  $U$  ist eine lokale Umgebung gemeint.

## 14.4 Regularitätssätze in Hölder- und Sobolev-Räumen

Mit einer geschickten Zerlegung der Eins kann man die beiden Ergebnisse zu Regularität im Innern und am Rande jetzt zusammenfügen zu:

**Theorem 14.4.1** Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f \in W^{k,2}(\Omega)$  und nehme an, Bedingung 14.1.2 ist erfüllt. Sei  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$  eine schwache Lösung von (14.3). Dann gilt:

1.  $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ ;
2. es gibt  $C = C(\Omega, k)$  derart, dass

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Ohne Beweis geben wir noch folgende Regularitätssätze an. Beweise für diese Aussagen findet man im Buch von Gilbarg und Trudinger [12].

**Theorem 14.4.2** Sei  $p \in (1, \infty)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f \in W^{k,p}(\Omega)$  und nehme an, Bedingung 14.1.2 ist erfüllt. Sei  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  eine schwache Lösung von (14.3). Dann gilt:

1.  $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ ;
2. es gibt  $C = C(\Omega, k, p)$  derart, dass

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C \left( \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \right).$$

**Theorem 14.4.3** Sei  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ ,  $f \in C^{k-1,\gamma}(\bar{\Omega})$  und nehme an, Bedingung 14.1.2 ist erfüllt. Sei  $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$  eine Lösung von (14.3). Dann gilt:

1.  $u \in C^{k+1,\gamma}(\bar{\Omega})$ ;
2. es gibt  $C = C(\Omega, k, \gamma)$  derart, dass

$$\|u\|_{C^{k+1,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq C \left( \|f\|_{C^{k-1,\gamma}(\bar{\Omega})} + \|u\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \right).$$

**Bemerkung 14.4.4** Die Bedingungen  $1 < p < \infty$  und  $0 < \gamma < 1$  sind scharf. Es gibt keine derartigen Ergebnisse für  $p \in \{1, \infty\}$  oder  $\gamma \in \{0, 1\}$ .

**Bemerkung 14.4.5** Wie bei der Regularität in Sobolev-Räumen hat  $u$  die Regularität in Hölder-Räumen von  $f$  plus zwei. Ein  $C^{k+2}$ -Rand reicht bei Hölder jedoch nicht, um nach  $C^{k+2,\gamma}(\bar{\Omega})$  zu kommen. Daher führt das letzte Theorem von  $f \in C^{k-1,\gamma}(\bar{\Omega})$  nach  $u \in C^{k+1,\gamma}(\bar{\Omega})$ .



# Anhang A

## Maßtheorie

Die Menge aller Teilmengen von  $V$  nennt man Potenzmenge und wird notiert durch  $\mathcal{P}(V)$ . Man sieht auch  $2^V$  als Notation.

**Definition A.1**  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  nennt man eine  $\sigma$ -**Algebra**, wenn folgendes gilt:

1.  $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$ ;
2.  $A \in \mathcal{A} \implies \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$ ;
3. für  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  gilt  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$  und  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ .

Man nennt  $A \in \mathcal{A}$  eine bezüglich dieser  $\sigma$ -Algebra messbare Menge.

Nenne  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  die Menge aller offenen Mengen in  $\mathbb{R}^n$ , also  $\mathcal{O} := \{A \subset \mathbb{R}^n; A \text{ offen}\}$ .

**Definition A.2** Die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$ , die  $\mathcal{O}$  enthält, nennt man die Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition A.3** Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein **Maß** auf  $\mathcal{A}$ , wenn folgendes erfüllt ist:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$  für alle paarweise disjunkte  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $A_i \in \mathcal{A}$  ( $\sigma$ -additiv).

Für  $A \in \mathcal{A}$  nennt man  $\mu(A)$  das Maß dieser Menge.

**Theorem A.4** Es existiert eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  und ein Maß  $\lambda : \mathcal{L} \rightarrow [0, \infty]$  mit den folgenden Eigenschaften;

1.  $\mathcal{O} \subset \mathcal{L}$ , also auch alle abgeschlossenen Mengen und endliche Schnittmengen und Vereinigungen dieser Mengen liegen in  $\mathcal{L}$ .
2. Für jeden Block  $B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  und jede Kugel  $B_r(x)$  gilt

$$\lambda(B) = \text{Vol}(B) \text{ und } \lambda(B_r(x)) = \text{Vol}(B_r(x)).$$

3. Wenn  $D \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  derart ist, dass es  $A \in \mathcal{L}$  gibt mit  $D \subset A$  und  $\lambda(A) = 0$ , dann gilt  $D \in \mathcal{L}$  und  $\lambda(D) = 0$ .

Die kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , die diese Eigenschaften hat, nennt man die Lebesgue- $\sigma$ -Algebra. Man nennt  $A \in \mathcal{L}$  eine Lebesgue-messbare Menge und  $\lambda$  das **Lebesgue-Maß**.

# Anhang B

## Integration und Konvergenz

Man definiert die Lebesgue-messbaren *einfachen* Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  als die Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $f$  nimmt höchstens abzählbar viele Werte an:

$$f(\mathbb{R}^n) = \{y_i \in \mathbb{R}; i \in \mathbb{N}\};$$

2.  $f^{-1}(y_i) \in \mathcal{L}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

Also gibt es für eine solche Funktion  $f$  abzählbar viele Lebesgue-messbare Mengen  $A_i$  derart, dass

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \mathbf{1}_{A_i}(x).$$

Für eine solche Lebesgue-messbare einfache Funktion  $f \geq 0$  definiert man

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \sum_{i \in \mathbb{N}} y_i \lambda(A_i)$$

und nennt diese Funktion Lebesgue-integrierbar, wenn  $\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx < \infty$ .

Sei  $L_{m,e}(\mathbb{R}^n)$  die Menge aller Lebesgue-messbaren einfachen Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition B.1** Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \geq 0$  nennt man Lebesgue-integrierbar, wenn

$$\begin{aligned} \ell &:= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g \, dx; g \leq f \text{ mit } g \in L_{m,e}(\mathbb{R}^n) \right\} \\ &= \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} h \, dx; h : h \geq f \text{ mit } h \in L_{m,e}(\mathbb{R}^n) \right\} < \infty \end{aligned}$$

und man definiert

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \ell.$$

Wenn  $f$  nicht überall positiv ist, dann nennt man  $f$  Lebesgue-integrierbar, wenn  $f^+ = \max(f, 0)$  und  $f^- = \max(-f, 0)$  es beide sind und setzt dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx.$$

Bemerke, dass  $f^+$  und  $f^-$  beide  $\geq 0$  sind und dass

$$f = f^+ - f^-.$$

**Definition B.2** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Man sagt  $f \in L^1(\Omega)$  wenn die Funktion  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \notin \Omega, \end{cases}$$

Lebesgue-integrierbar ist und setzt

$$\int_{\Omega} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} \, dx.$$

**Definition B.3**  $L^1_{loc}(\Omega)$  nennt man alle Lebesgue-messbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , für die gilt, dass  $f|_K \in L^1(K)$  für jede kompakte Menge  $K \subset \Omega$ .

Für  $f_1, f_2 \in L^1(\Omega)$  definiert man  $f_1 \sim f_2$ , wenn es eine Nullmenge  $N \in \mathcal{L}$  (also  $\lambda(N) = 0$ ) gibt derart, dass

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ für alle } x \in \Omega \setminus N,$$

und man sagt  $f_1 = f_2$  f.ü. (fast überall). Nur so wird  $(L^1(\Omega) / \sim, \|\cdot\|_{L^1(\Omega)})$  mit

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f| \, dx$$

ein normierter Vektorraum, denn aus  $\|f\|_{L^1(\Omega)} = 0$  folgt nur  $f = 0$  f.ü. Meistens nennt man diesen normierten Vektorraum auch wieder  $L^1(\Omega)$ , obwohl es dann Äquivalenzklassen statt Funktionen betrifft.

**Theorem B.4** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger  $C_c(\Omega)$  liegen dicht in  $L^1(\Omega)$ . Das heißt, für alle  $\varepsilon > 0$  und  $f \in L^1(\Omega)$  gibt es  $g \in C_c(\Omega)$  derart, dass  $\|f - g\|_{L^1(\Omega)} < \varepsilon$ .

**Theorem B.5 (Egoroff)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\lambda(\Omega) < \infty$  und sei  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$  eine Folge von Lebesgue-messbaren Funktionen auf  $\Omega$ . Nehme an, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  f.ü.

Dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine messbare Teilmenge  $A \subset \Omega$  derart, dass

1.  $\lambda(\Omega \setminus A) \leq \varepsilon$  und
2.  $f_k \rightarrow f$  gleichmäßig in  $A$ .

**Theorem B.6 (Lebesguesche Differenzierbarkeit)**

Für  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  gilt für  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  f.ü., dass

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{\lambda(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f \, dx = f(x_0).$$

**Theorem B.7 (Das Lemma von Fatou)**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$  eine derartige Folge, dass

- $f_k \geq 0$  f.ü. und
- $\sup \int_{\Omega} f_k \, dx < \infty$ .

Dann ist  $f \in L^1(\Omega)$  wohldefiniert durch

$$f(x) := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \text{ f.ü.}$$

und

$$\int_{\Omega} f \, dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k \, dx.$$

**Theorem B.8 (Majorisierter Konvergenzsatz von Lebesgue)**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$  eine derartige Folge, dass

- $f_k \rightarrow f$  f.ü. und
- es  $g \in L^1(\Omega)$  gibt so, dass  $|f_k| \leq g$  f.ü. für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,

Dann gilt, dass  $f \in L^1(\Omega)$  und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k \, dx = \int_{\Omega} f \, dx.$$

**Theorem B.9 (Monotoner Konvergenzsatz von Beppo-Levi)**

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1(\Omega)$  eine Folge,

- die monoton wächst:  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots$   
und
- $\sup_{k \geq 1} \int_{\Omega} f_k \, dx < \infty$  erfüllt.

Dann ist  $f \in L^1(\Omega)$  wohldefiniert durch  $f := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$  f.ü.

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k \, dx = \int_{\Omega} f \, dx.$$



# Anhang C

## Ungleichungen

**Theorem C.1 (Cauchy-Schwarz)** Für alle  $u, v \in L^2(\Omega)$  gilt

$$\int_{\Omega} uv dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Theorem C.2 (Hölder)** Seien  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Für alle  $u \in L^p(\Omega)$  und  $v \in L^q(\Omega)$  gilt:

$$\int_{\Omega} uv dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Diese Ungleichung gilt auch für  $p = 1$  und  $q = \infty$ .

**Theorem C.3 (Jensen)** Sei  $\lambda(\Omega) < \infty$  und sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex. Dann gilt

$$f\left(\frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_{\Omega} u(x) dx\right) \leq \frac{1}{\lambda(\Omega)} \int_{\Omega} f(u(x)) dx.$$

**Theorem C.4 (Calderon)** Sei  $\lambda(\Omega) < \infty$  und sei  $1 \leq p < q \leq \infty$ . Dann gilt

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \lambda(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Theorem C.5 (Young)** Seien  $p, q \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Für alle  $u \in L^p(\Omega)$  und  $v \in L^q(\Omega)$  gilt:

$$\int_{\Omega} uv dx \leq \frac{1}{p} \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|v\|_{L^q}^q.$$

**Theorem C.6 (Minkowski)** Sei  $p \in [1, \infty]$  und seien  $u, v \in L^p(\Omega)$ . Dann gilt

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$



# Anhang D

## Kompaktheit, Abgeschlossenheit

Als Erinnerung einige bekannte Sätze, die mit Kompaktheit und Abgeschlossenheit zu tun haben.

### Theorem D.1 (Bolzano-Weierstraß)

Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}^n$  hat einen Häufungswert.

**Korollar D.2** Sei  $\Omega$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

$\Omega$  ist beschränkt und abgeschlossen  $\Leftrightarrow \Omega$  ist kompakt.

Dieses Korollar kann so nur in endlichen Dimensionen gelten, denn F. Riesz hat folgendes Ergebnis bewiesen:

**Theorem D.3 (F. Riesz)** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum. Dann sind äquivalent:

- $X$  ist endlich dimensional.
- $\overline{B_1(0)} = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$  ist kompakt.

**Theorem D.4 (Weierstraß)** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und sei  $K \subset X$  kompakt. Eine stetige Funktion  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt sein Minimum an in  $K$ .

Dieses Theorem von Weierstraß gilt auch für topologische Räume  $(X, \mathcal{T})$ .

**Theorem D.5 (Arzela-Ascoli)** Sei  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C(\bar{\Omega})$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine Folge von Funktionen, die

1. gleichmäßig beschränkt sind: es gibt  $M > 0$  derart, dass

$$|f_k(x)| \leq M \text{ für alle } x \in \Omega \text{ und } k \in \mathbb{N},$$

2. gleichmäßig gleichgradig stetig sind: für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta > 0$  derart, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  und für alle  $x, y \in \bar{\Omega}$

$$|x - y| < \delta \implies |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon.$$

Dann gibt es eine Teilfolge  $\{f_{k_m}\}_{m=1}^\infty$  und eine stetige Funktion  $f$  derart, dass gilt:  $f_{k_m} \rightarrow f$  gleichmäßig auf kompakte Teilmengen von  $\bar{\Omega}$ .

**Theorem D.6 (Hahn-Banach)** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein Banachraum und seien  $A, B \subset X$  zwei nicht-leere konvexe Mengen mit  $A \cap B = \emptyset$ . Nehme an, dass  $A$  abgeschlossen ist und  $B$  ist kompakt. Dann gibt es eine lineare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  und reelle Zahlen  $\alpha < \beta$  derart, dass

$$A \subset \{x \in X; f(x) \leq \alpha\} \quad \text{und} \quad B \subset \{x \in X; f(x) \geq \beta\}.$$

Für die nächsten Ergebnisse braucht man Begriffe, die mit Dualraum und der schwachen Topologie und der schwachen Konvergenz zu tun haben.

**Schwach abgeschlossen.** Die Menge  $K \subset X$  heißt schwach abgeschlossen, wenn  $K \ni x_n \rightharpoonup x$  impliziert, dass  $x \in K$ .

**Schwach kompakt.** Die Menge  $K \subset X$  heißt schwach kompakt, wenn es für jede Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  eine Teilfolge  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  und  $\tilde{x} \in K$  gibt derart, dass  $x_{n_k} \rightharpoonup \tilde{x}$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Man nennt es schwach abgeschlossen wegen der schwachen Topologie und nicht weil der Begriff schwächer ist!

**Theorem D.7 (Mazur)** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein Banachraum und sei  $K \subset X$  konvex. Dann sind äquivalent:

- $K$  ist abgeschlossen.
- $K$  ist schwach abgeschlossen

Für den Dualraum eines Dualraums  $X'$  schreibt man  $X''$ .

**Theorem D.8 (Kakutani)** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein Banachraum. Äquivalent sind:

- Dieser Banachraum ist reflexiv:  $X'' \cong X$  (es gibt eine stetige Bijektion zwischen diesen normierten Vektorräumen).
- Die abgeschlossene Einheitskugel in  $X$ ,

$$\overline{B_X} := \{x \in X; \|x\| \leq 1\},$$

ist schwach kompakt.

# Literaturverzeichnis

- [1] R.A. Adams, J.J.F. Fournier, Sobolev spaces  $2^{nd}$  edition, Elsevier, Amsterdam, 2003.
- [2] Ambrosetti, Antonio; Rabinowitz, Paul H. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Functional Analysis 14 (1973), 349–381.
- [3] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer 2010.
- [4] B. Dacorogna, Direct Methods in the Calculus of Variations, Springer, Berlin, 1989.
- [5] B. Dacorogna, Introduction to the Calculus of Variations, Imperial College Press, London, 2004.
- [6] L.C. Evans, Partial Differential Equations, AMS, Providence, 1998.
- [7] F. Gazzola, H.-Ch. Grunau, G. Sweers, Polyharmonic boundary value problems, Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.
- [8] I.M. Gelfand, S.V. Fomin, Calculus of Variations, reprinted 1991 edition by Dover, New York, 2000.
- [9] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, Calculus of Variations I, Springer, Berlin, 1996.
- [10] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, Calculus of Variations II, Springer, Berlin, 1996.
- [11] M. Mesterton-Gibbons, A Primer on Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Student Math. Library, AMS, 2009.
- [12] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [13] Pohožaev, S. I., Eigenfunctions of the equation  $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ . Dokl. Akad. Nauk SSSR 165 1965, 36–39 (Soviet Math. Dokl. 1408-1411)
- [14] Struwe, Michael, Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

# Index

- Banachraum, 7
- beschränkte bilineare Abbildung, 84
- bilineare Abbildung, 83, 84
- Brachistochrone, 1
  
- $C(A)$ , 5
- Calderon-Ungleichung, 167
- Cauchy-Schwarz Ungleichung, 167
- $C^k(\Omega)$ , 8
- $C^{k,\gamma}(\Omega)$ , 10
  
- Darstellungssatz
  - von Riesz, 55
  - von Riesz-Fréchet, 75
- dicht, 54
- Divergenz, 14
- doppeldualer Raum, 55
- Dualraum, 54
  
- Einbettung, 101
- einfache Funktion, 51
- erste Variation, 3, 14
- Euler-Lagrange Gleichung, 18
- Existenz eines Minimums bei direkten Methoden, 122
  
- Faltung, 70
  
- Fortsetzungsoperator, 91
- Fréchet-differenzierbar, 12
- Friedrichs'scher Glätter, 43
- Funktional, 2
  
- Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung, 103
- Gateaux-differenzierbar, 12
- gegebene Randbedingungen, 26
  - für die Plattengleichung, 33
- gleichgradig stetig, 114
- gleichmäßig gleichgradig stetig, 114
- gleichmäßig stetig, 113
- Gradient, 14
  
- Hauptlemma der Variationsrechnung, 3, 17, 73
- Hölder-Raum, 10
- Hölder-Ungleichung, 54, 167
  
- Jensen-Ungleichung, 167
  
- kanonische Abbildung, 101
- Kato-Ungleichung, 137
- koerzitive bilineare Abbildung, 84
- koerzitives Funktional, 121
- kompakte Abbildung, 115

kompakte Menge, 115  
 konvex, 39, 40  
 Konvolution, 70

Lagrange-Multiplikator-Satz, 30  
 Lebesgue-Integral, 51  
 Lebesgue-Maß, 162  
 Lebesgue-Raum, 53  
 Legendre-Hadamard-Bedingung, 82  
 Lemma von Fatou, 59  
 $L^q(\Omega)$ , 53  
 $L^\infty(\Omega)$ , 53

Maß, 161  
 Maximum-prinzip  
   für schwache Lösungen, 133  
 Minimalfläche, 18  
 Minimalfolge, 56  
 Minkowski-Ungleichung, 167  
 Morrey-Ungleichung, 107  
 Mountain-Pass Theorem, 143

natürliche Randbedingungen, 26  
 Nebenbedingung, 30  
 Nebenbedingungen, 31  
 Norm, 6  
 Null-Lagrangian, 34

oberhalbstetig, 114

Palais-Smale-Bedingung, 143  
 Palais-Smale-Folge, 143  
 partielle Integration, 15

Poincaré-Friedrichs-Ungleichung, 79, 81  
 präkompakte Menge, 115

quasikonvex, 50

Randwerte im schwachen Sinne, 94  
 Rang-1-konvex, 50  
 reflexiv, 55  
 Riemann-Integral, 51

Satz von

  Arzela-Ascoli, 169  
   Beppo-Levi, 165  
   Bolzano-Weierstraß, 169  
   Egoroff, 164  
   F. Riesz, 169  
   Fatou, 164  
   Gauß, 16  
   Hahn-Banach, 170  
   Kakutani, 170  
   Lax-Migram, 84  
   Lebesgue zu monotoner Konvergenz, 165  
   Mazur, 170  
   Rellich-Kondrachov, 117  
   Riemann-Lebesgue, 60  
   Weierstraß, 169

Satz zu

  innerer Regularität, 152  
   Lebesguescher Differenzierbarkeit, 164  
   majorisierter Konvergenz, 165  
   monotoner Konvergenz, 165  
   schwach abgeschlossen, 170

- schwach folgenstetig, 115
- schwach kompakt, 170
- schwach unterhalbfolgenstetig, 115
- Schwach\*-Konvergenz, 57
- schwache Ableitung, 63
- schwache Konvergenz, 57
- schwache Lösung, 76
- separabel, 67
- $\sigma$ -Algebra, 161
- Sobolev-Raum, 63, 67
- starke Konvergenz, 57
- stetig, 113
  
- Testfunktion, 17
- Träger, 5, 90
- Treppenfunktion, 51
  
- Ungleichung von
  - Calderon, 167
  - Cauchy-Schwarz, 167
  - Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, 103
  - Hölder, 54, 167
  - Jensen, 167
  - Kato, 137
  - Minkowski, 167
  - Morrey, 107
  - Poincaré-Friedrichs, 79, 81
  - Wirtinger, 81
  - Young, 97, 167
- unterhalbstetig, 114
  
- vollstetige Abbildung, 115
  
- wesentlich Supremum, 53
- Wirtinger Ungleichung, 81
- $W^{k,p}(\Omega)$ , 63, 67
- $W_0^{k,p}(\Omega)$ , 68
- wohlgestellt nach Hadamard, 28
  
- Young-Ungleichung, 97, 167
  
- Zerlegung der Eins, 90