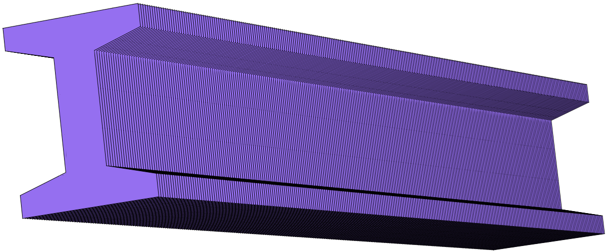
Antrittsvorlesung G. Sweers – Köln, 4.7.2008

Randbedingungen

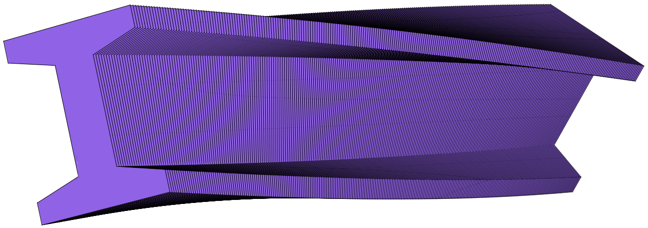
- **Schwachstellen**
- **Symmetrievererbung**
- **Positivität und elliptische Systeme**
- **Gleichungen höherer Ordnung**
- **Druck und Auslenkung**
- **Lebenserwartung**

Schwachstellen

Schwachstellen bei der Torsion eines Stabes



Schwachstellen bei der Torsion eines Stabes

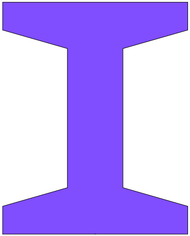


Das Modell:

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Die Schwachstelle x_0 maximiert

$$|\nabla u(x)|.$$

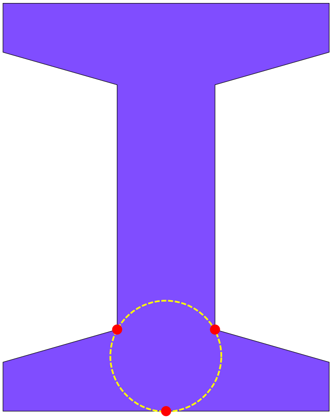


Sei $|\nabla u(x_0)| = \max_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla u(x)|$.

- $v(x) = \nabla u(x_0) \cdot \nabla u(x)$ ist harmonisch.
- $\implies \max_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)| = \max_{x \in \partial\Omega} |v(x)|$.
- $\implies x_0 \in \partial\Omega$.

Faustregel der Ingenieure, Vermutung von De Saint Venant

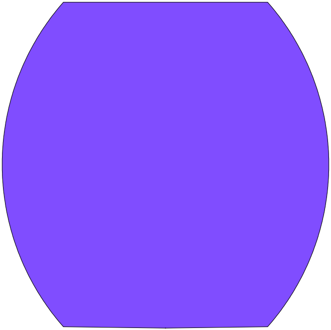
Wenn das Gebiet zwei Symmetrieachsen hat, liegt x_0 dort, wo der größte einbeschriebene Kreis den Rand berührt.



Theorem *Sei Ω wie unten und setze*

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; u(x) > \varepsilon\}.$$

Die Faustregel gilt nicht für Ω oder nicht für Ω_ε mit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

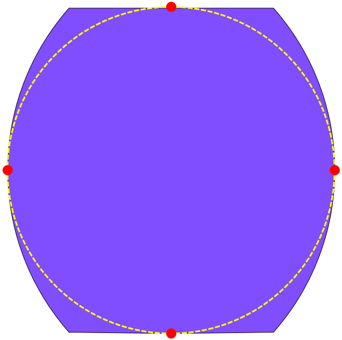


S., A counterexample with convex domain to a conjecture of De Saint Venant, Journal of Elasticity 22 (1989), 57-61

Theorem *Sei Ω wie unten und setze*

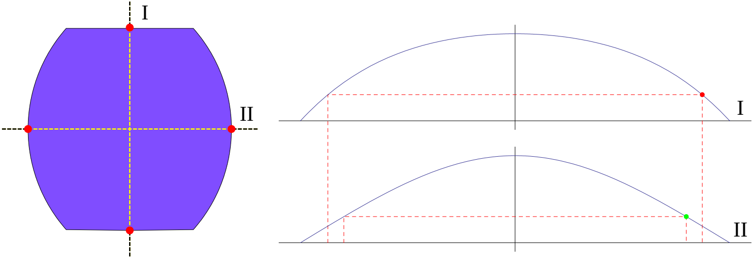
$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; u(x) > \varepsilon\}\,.$$

Die Faustregel gilt nicht für Ω oder nicht für Ω_ε mit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.



S., A counterexample with convex domain to a conjecture of De Saint Venant, Journal of Elasticity 22 (1989), 57-61

Beweis :



Wenn u die Lösung auf Ω ist, ist $u-\varepsilon$ die Lösung auf Ω_ε.

- $|\nabla u(x)| = \frac{\partial}{\partial n_i} u(x)$.
- $\frac{\partial}{\partial n_i} u(x_{\mathsf{I}}) \neq \frac{\partial}{\partial n_i} u(x_{\mathsf{II}}) \implies$ Widerspruch für Ω_ε.
- $\frac{\partial}{\partial n_i} u(x_{\mathsf{I}}) = \frac{\partial}{\partial n_i} u(x_{\mathsf{II}}) \implies \frac{\partial^2}{\partial n_i^2} u(x_{\mathsf{I}}) > \frac{\partial^2}{\partial n_i^2} u(x_{\mathsf{II}})$.

Symmetrievererbung

Wird Symmetrie vererbt?

Ω ist symmetrisch.

$\Downarrow$**?**

Positive Lösungen von

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

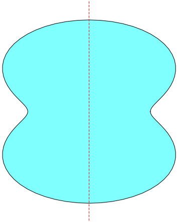
haben die gleiche Symmetrie.

Theorem (Gidas-Ni-Nirenberg, Serrin)
Sei Ω eine Kugel und f Lipschitz. Dann ist jede positive Lösung von

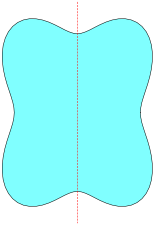
$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

radialsymmetrisch.

'Moving-Plane' Argument. Der Beweis liefert Symmetrie der Lösung, wenn das Gebiet Steiner-symmetrisch ist.



Steiner-symmetrisch



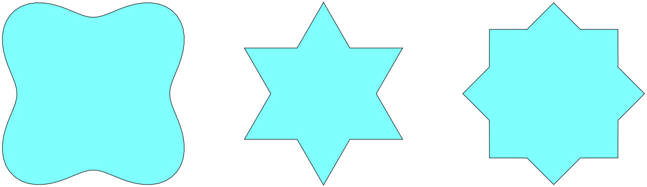
nicht Steiner-symmetrisch

Theorem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ Steiner-symmetrisch bezüglich einer Achse und invariant bei Drehungen um π/n. Sei f Lipschitz. Dann ist jede positive Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

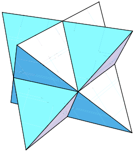
symmetrisch bezüglich dieser Achse und invariant bei Drehungen um π/n.

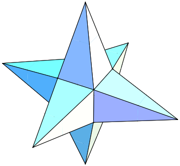


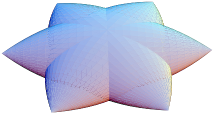
B.Kawohl – S., Inheritance of symmetry for positive solutions of semilinear elliptic boundary value problems, Annales Inst. H.Poincaré 19 (2002), 705-714.

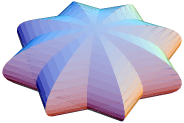
Symmetrievererbung?

Ja:

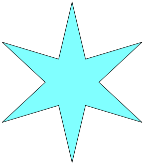


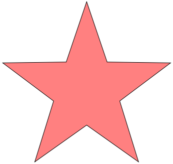


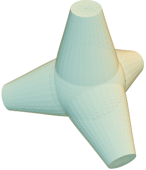




Offen:

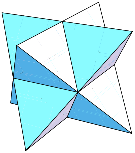
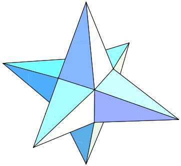
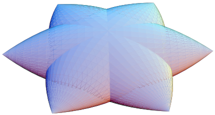
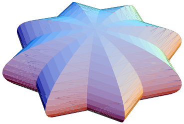




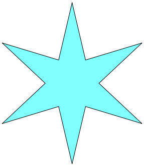
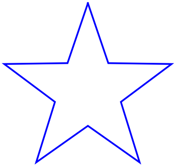
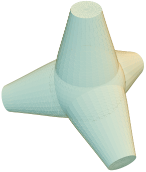


Symmetrievererbung?

Ja:

Offen:

Positivität und elliptische Systeme

Theorem (Maximumprinzip) *Sei $u \neq c$.*
Wenn $-\Delta u \geq 0$, dann hat u kein Minimum innerhalb des Gebietes.

Theorem (Positivitätserhaltung) *Sei Ω ein Gebiet.*
Dann gibt es $\lambda_\Omega \geq 0$ derart, dass für $\lambda < \lambda_\Omega$:

$$\begin{cases} -\Delta u \geq \lambda u & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \implies u \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

Theorem* *Sei Ω ein Gebiet.*

- *Matrix M ist* **kooperativ**: *$M_{ij} \geq 0$ für $i \neq j$.*
- *$\exists \vec{\varphi} > 0$ mit $-\Delta\vec{\varphi} - M\vec{\varphi} > 0$.*

Dann gibt es $\lambda_\Omega \geq 0$ derart, dass für $\lambda < \lambda_\Omega$:

$$\begin{cases} -\Delta \vec{u} - M\vec{u} \geq \lambda \vec{u} & \text{in } \Omega \\ \vec{u} \geq 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \implies \vec{u} \geq 0 \text{ in } \Omega.$$

* S., Strong positivity in for elliptic systems, Math. Zeitschrift 209 (1992), 251-271.

Und wenn M nicht kooperativ ist?

- Protter und Weinberger: '*a genuine restriction*'.
- Statt Erhalt der Positivität für $\lambda < \lambda_\Omega$ höchstens für $\lambda \in [\lambda_c, \lambda_\Omega)$:
  - Parabolische Probleme: $\triangle t \sim \frac{1}{-\lambda}$;
  - Bei singulären Perturbationen $\varepsilon \sim \frac{1}{-\lambda}$.

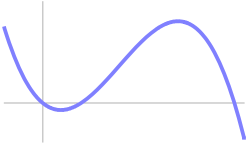
$\Longrightarrow$ Fundamentaler Unterschied zwischen einer Gleichung und System mehrerer Gleichungen.

Modell vom Typ FitzHugh-Nagumo

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon^2 u_{xx} = f(u) - \delta v & I \times \mathbb{R}^+ \\ v_t - v_{xx} = u - \gamma v & I \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

mit

$$f(u) = u(1-u)(u-a)$$
$$0 < \varepsilon \ll 1,\ \gamma \geq 0,\ \delta > 0,$$
$$I = [-1, 1].$$



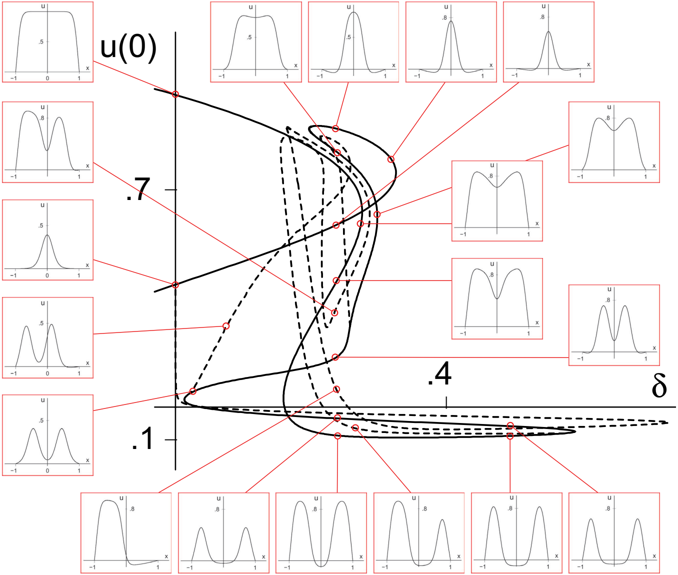
- Für $\delta \leq 0$ 'zwei' stabile stationäre Lösungen (und eine instabile).

Kooperativität $\Longrightarrow$ Maximumprinzip $\Longrightarrow$ Lokale Eindeutigkeit

- Für $\delta > 0$ ist dieses System nicht 'kooperativ'.

Wie ändert sich das für $\delta > 0$ unter $u = v = 0$ auf ∂I?

S. – W.C. Troy, On the bifurcation curve for an elliptic system of FitzHugh- Nagumo type, Physica D. 177 (2003), 1-22.



$\gamma = 0$
$\varepsilon = .05$
$a = \frac{1}{4}$
$I = (-1, 1)$

Gleichungen höherer Ordnung

Beispiel eines Randwertproblems vierter Ordnung:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Man setzt $v = -\Delta u$ und findet:

$$\boxed{\mathrm{II}} \quad \begin{cases} -\Delta v = f & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta u = v & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Die Positivität bleibt erhalten, denn das Maximumprinzip ergibt:

$$f \gneqq 0 \implies v > 0 \implies u > 0.$$

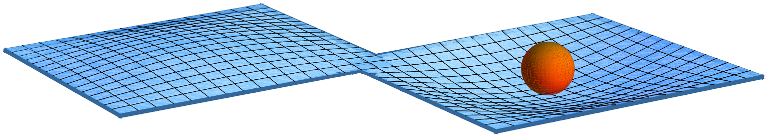
Leider zu einfach ...

Ein Modell für eine polygonale Platte Ω ist

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

- f ist die Massendichte.
- u die Auslenkung.
- $u = \Delta u = 0$ bedeutet gelenkig gelagert.

Erfahrungsgemäß:



Das eigentliche Problem:

- Minimiere das Energiefunktional:

$$J(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} (\Delta u)^2 + (1-\sigma) \left(u_{xy}^2 - u_{xx} u_{yy} \right) - fu \right) dxdy.$$

Finde $u_\mathrm{I} \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) =: W$ mit

$$\boxed{\mathrm{I} \quad J(u_\mathrm{I}) = \inf \{ J(u); u \in W \}.}$$

- Für das System II findet man eine Lösung u_II mit

$$u_\mathrm{II},\ \Delta u_\mathrm{II} \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

$$\boxed{u_\mathrm{I} = u_\mathrm{II}\ ?}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u = \Delta u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Theorem *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygon.*

- *Wenn Ω nur konvexe Ecken hat, gilt $u_{\mathrm{I}} = u_{\mathrm{II}}$.*
- *Wenn Ω mindestens eine konkave Ecke hat, gibt es $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$, so dass*

$$u_{\mathrm{I}} = u_{\mathrm{II}} \Leftrightarrow \langle f, \psi_i \rangle = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Im Fall einer konkaven Ecke folgt $u_{\mathrm{I}} \neq u_{\mathrm{II}}$ für $f \gneqq 0$.

S.A. Nazarov – S. A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners. J. Differential Equations 233 (2007), 151–180.

Beweisidee:

- Bei einer konkaven Ecke gibt es eine harmonische Funktion $h \neq 0$ mit 0-Randwerten fast überall und $h \in L^2(\Omega) \backslash W^{1,2}(\Omega)$.

- Es gibt eine Lösung $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ von

$$\begin{cases} -\Delta v = h & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

- $u_c = u_{\mathrm{II}} + cv$ 'lösst'

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt $u_c \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $\Delta u_c = 0$ fast überall.
  - Nur für $c = 0$ gilt $\Delta u_c \in W^{1,2}(\Omega)$.
  - Nur für $c = c_1$ gilt $u_c \in W^{2,2}(\Omega)$.

Beweisidee für $\Omega =$ :

- $h(r,\varphi) = \left(r^{-\beta} - r^{\beta}\right)\cos(\beta\,\varphi)$ und $\beta = \dfrac{\pi}{\psi} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ mit Öffnungswinkel ψ.

  $r^{-\beta}\cos(\beta\,\varphi) \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow 2\,(-\beta) + 1 > -1 \Leftrightarrow \beta < 1 \Leftrightarrow \psi > \pi.$

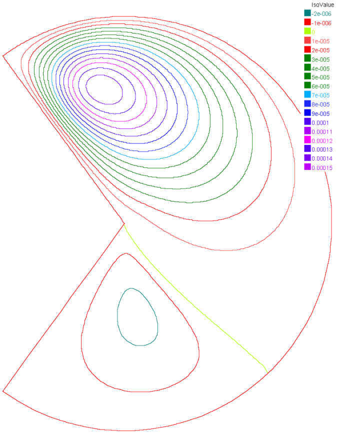
- Sei $\mathcal{G}$ der Greensche Operator:

$$v = \mathcal{G}g \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta v = g & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

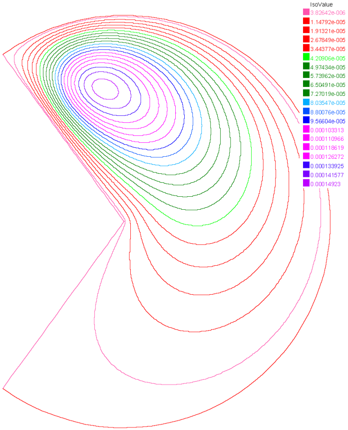
- Vergleich beider Lösungen:

$$u_{\mathrm{I}} = u_{\mathrm{II}} - \frac{\langle \mathcal{G}f, h\rangle}{\langle h, h\rangle}\mathcal{G}h.$$

Numerisches Resultat



u_{I}



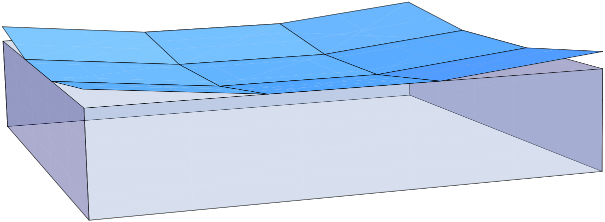
u_{II}

Offenes Problem

- Wenn $f \gneqq 0$, dann folgt $u_{\mathrm{II}} > 0$.
- Wenn $\psi > \pi$, dann folgt $u_{\mathrm{II}} \neq u_{\mathrm{I}}$.
- Analytische Methoden liefern für $\psi > \frac{3}{2}\pi$ und $f \gneqq 0$, dass $u_{\mathrm{I}} \not\geq 0$.
- Was passiert mit dem Vorzeichen für $\psi \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$?

Druck und Auslenkung

Gelenkig gelagerte und unterstütze Platten



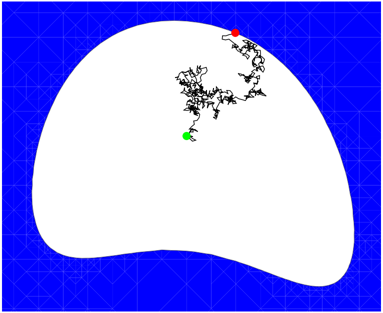
Thanasis Stylianou

erste Ergebnisse:

- Für $\sigma = 1$ bleibt die Platte liegen.
- Für $\sigma < 1$ kommt die Platte hoch.

Lebenserwartung

Erwartungszeit einer konditionierten Brownschen Bewegung



Matthias Erven

Konditionierte Brownsche Bewegung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ ein Gebiet.

- $X()$ startet in $x \in \Omega$.
- $X()$ wird gestoppt (killed), wenn sie $\partial \left(\Omega \backslash \left\{ B_\varepsilon(y) \right\} \right)$ erreicht.
- $\tau_{\Omega \backslash B_\varepsilon(y)}$ ist die Lebensdauer.
- Man ist interessiert an

$$\mathbb{E}_x^y \left[\tau_\Omega \right] := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_x \left[\tau_{\Omega \backslash B_\varepsilon(y)} ; X(\tau_{\Omega \backslash B_\varepsilon(y)}) \in \partial B_\varepsilon(y) \right].$$

Vermutung *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Dann gilt:*

$$\sup_{x,y \in \Omega} \mathbb{E}_x^y \left[\tau_\Omega \right] = \sup_{x,y \in \partial\Omega} \mathbb{E}_x^y \left[\tau_\Omega \right].$$

Vermutung (Walter und McKenna)
Eine isoperimetrische Ungleichung gilt.

Theorem (Kawohl, S.) *Eine isoperimetrische Ungleichung gilt nicht.*

Vermutung (Bañuelos, Carroll) *Für einfach zusammenhängende Gebiete in $\mathbb{R}^2$ wächst $\mathbb{E}_x^y[\tau_\Omega]$ entlang hyperbolischer Geodätischer.*

Theorem (Griffin, McConnell, Verchota) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gilt*

$$\sup_{x\in\partial\Omega, y\in\Omega} \mathbb{E}_x^y[\tau_\Omega] = \sup_{x,y\in\partial\Omega} \mathbb{E}_x^y[\tau_\Omega].$$

Theorem (Dall'Acqua, Grunau, S.) *Sei B eine Kreisscheibe:*

$$\sup_{x,y\in B} \mathbb{E}_x^y[\tau_B] = \sup_{x,y\in\partial B} \mathbb{E}_x^y[\tau_B].$$

Theorem (Erven, S.) *Auf dem Goldfischglas gilt das nicht:*

$$\sup_{x,y\in G} \mathbb{E}_x^y[\tau_G] > \sup_{x,y\in\partial G} \mathbb{E}_x^y[\tau_G].$$

Leonid Frank

Philippe Clément

Ik heb gezegd.