Zinsratentheorie in der Versicherung

Julia Eisenberg

04.05.2010

1. Bewertung durch Diversifikation
   - Gesetz der großen Zahl
   - Zinssatz, Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktoren
   - Verluste und Äquivalenzprinzip
   - Deterministische Bond-Preise
   - Duplikation mit Zerobonds
   - Marktwerte und Zerobonds

Gesetz der großen Zahl

Betrachte eine Münze. X^i bezeichne das Ergebnis des i-ten Wurfs

$$X^i = \begin{cases} 1 & \text{Kopf} \\ 0 & \text{Zahl} \end{cases} .$$

D.h. wir haben $X^i = \mathbb{1}_{A_i}$, wobei $\mathbb{1}$ die Indikatorfunktion und A^i das Ereignis "Kopf beim i-ten Wurf" bezeichnen.

Gesetz der großen Zahl

Betrachte eine Münze. X^i bezeichne das Ergebnis des i-ten Wurfs

$$X^i = \begin{cases} 1 & \text{Kopf} \\ 0 & \text{Zahl} \end{cases} .$$

D.h. wir haben $X^i = \mathbb{1}_{A_i}$, wobei $\mathbb{1}$ die Indikatorfunktion und A^i das Ereignis "Kopf beim i-ten Wurf" bezeichnen.

Das Gesetz der großen Zahl besagt dann

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A^i} \longrightarrow \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A^1}] = \mathbb{P}[A^1] ,$$

wenn $n \longrightarrow \infty$.

Portfolio von Versicherungsverträgen

Betrachte ein Portfolio von l_x identischen n-jährigen Erlebensfallversicherungsverträgen mit Versicherungssumme 1.

$$\Downarrow$$

Für $t \geq 0$: $l_{x+t} =$ die erwartete Anzahl der Überlebenden im Alter $x + t$.

Portfolio von Versicherungsverträgen

Betrachte ein Portfolio von l_x identischen n-jährigen Erlebensfallversicherungsverträgen mit Versicherungssumme 1.

$$\Downarrow$$

Für $t \geq 0$: $l_{x+t} =$ die erwartete Anzahl der Überlebenden im Alter $x + t$.

Annahmen:

Portfolio von Versicherungsverträgen

Betrachte ein Portfolio von l_x identischen n-jährigen

Erlebensfallversicherungsverträgen mit Versicherungssumme 1.

$$\Downarrow$$

Für $t \geq 0$: l_{x+t} = die erwartete Anzahl der Überlebenden im Alter $x+t$.

Annahmen:

- Alle Versicherten sind zum Zeitpunkt 0 x Jahre alt mit verbleibenden Lebenszeiten T^1, ..., T^{l_x} und der gleichen Überlebenswahrscheinlichkeit

$$_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \exp\left(-\int_0^t \mu(x+u)\,\mathrm{d}u\right)$$

Portfolio von Versicherungsverträgen

Betrachte ein Portfolio von l_x identischen n-jährigen

Erlebensfallversicherungsverträgen mit Versicherungssumme 1.

$$\Downarrow$$

Für $t \geq 0$: l_{x+t} = die erwartete Anzahl der Überlebenden im Alter $x + t$.

Annahmen:

- Alle Versicherten sind zum Zeitpunkt 0 x Jahre alt mit verbleibenden Lebenszeiten T^1, ..., T^{l_x} und der gleichen Überlebenswahrscheinlichkeit

$$ {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \exp\left(- \int_0^t \mu(x+u) \, \mathrm{d}u \right) $$

- Die Prämie $\pi(0)$ wird als einmalige Zahlung im Zeitpunkt 0 getätigt.

Wir wissen nicht: Wie viele von l_x sind nach n Jahren noch am Leben?

Ist das Portfolio groß genug $\Rightarrow$ die tatsächliche Anzahl der Überlebenden liegt nahe bei der erwarteten Anzahl l_{x+n}.

Dies ist die Folge des Gesetzes der großen Zahl: betrachte die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{[T^i>n]}$. Die Menge $[T^i > n]$ beschreibt das Ereignis, dass der i-te Versicherte den Zeitpunkt n überlebt.

Wir wissen nicht: Wie viele von l_x sind nach n Jahren noch am Leben?

Ist das Portfolio groß genug $\Rightarrow$ die tatsächliche Anzahl der Überlebenden liegt nahe bei der erwarteten Anzahl l_{x+n}.

Dies ist die Folge des Gesetzes der großen Zahl: betrachte die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{[T^i>n]}$. Die Menge $[T^i > n]$ beschreibt das Ereignis, dass der i-te Versicherte den Zeitpunkt n überlebt.

Nun ist klar

$$\frac{1}{l_x}\sum_{i=1}^{l_x}\mathbb{1}_{[T^i>n]} \to \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[T^1>n]}] = \mathbb{P}[T^1 > n] = {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktoren

Traditionell nimmt man an, dass das Kapital einer V. zu einem jährlichen Zins i investiert wird.

Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktoren

Traditionell nimmt man an, dass das Kapital einer V. zu einem jährlichen Zins i investiert wird.

1. i Zinssatz,

Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktoren

Traditionell nimmt man an, dass das Kapital einer V. zu einem jährlichen Zins i investiert wird.

1. i Zinssatz,
2. $r = \log(1 + i)$ Zinsintensität,

Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktoren

Traditionell nimmt man an, dass das Kapital einer V. zu einem jährlichen Zins i investiert wird.

1. i Zinssatz,
2. $r = \log(1+i)$ Zinsintensität,
3. $1+i = e^r$ Aufzinsungsfaktor,

Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktoren

Traditionell nimmt man an, dass das Kapital einer V. zu einem jährlichen Zins i investiert wird.

1. i Zinssatz,
2. $r = \log(1 + i)$ Zinsintensität,
3. $1 + i = e^r$ Aufzinsungsfaktor,
4. $v = (1 + i)^{-1} = e^{-r}$ Diskontierungsfaktor.

Aufzinsungs- und Diskontierungsfaktoren

Traditionell nimmt man an, dass das Kapital einer V. zu einem jährlichen Zins i investiert wird.

1. i Zinssatz,
2. $r = \log(1+i)$ Zinsintensität,
3. $1+i = e^r$ Aufzinsungsfaktor,
4. $v = (1+i)^{-1} = e^{-r}$ Diskontierungsfaktor.

Für die t-jährigen Faktoren setzen wir

$$(1+i)^t = e^{rt} = S(t) \ ,$$

woraus sich die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t) = rS(t) \tag{1}$$

mit $S(0) = 1$ ergibt.

Wie behandelt man Zinssätze, die während der Laufzeit des Kontraktes nicht konstant bleiben?

Eine Möglichkeit ist $i(s)$ zu betrachten, wobei $i(s) =$ jährlicher Zinssatz im Jahre s:

$$S(t) = (1 + i(1)) \cdots (1 + i(t)) = \exp\left(\sum_{s=1}^{t} r(s)\right).$$

Wie behandelt man Zinssätze, die während der Laufzeit des Kontraktes nicht konstant bleiben?

Eine Möglichkeit ist $i(s)$ zu betrachten, wobei $i(s)$ = jährlicher Zinssatz im Jahre s:

$$S(t) = (1 + i(1)) \cdots (1 + i(t)) = \exp\left(\sum_{s=1}^{t} r(s) \right) .$$

Betrachtet man den Fall, wo die Rendite sich mehrmals im Jahr ändert, dann sollte man zum stetigen Zins übegehen. Die Differentialgleichung (1) wird dann zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(t) = r(t) S(t) .$$

Die Lösung für $S(0) = 1$ ist $S(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)\,\mathrm{d}u \right)$.

Betrachte wieder ein Portfolio von l_x Erlebensfallversicherungsverträgen.

- Die Prämien werden als Einmalprämie $\pi(0)$ zum Zeitpunkt 0 abbezahlt.
- Die Anzahl der Überlebenden nach n Jahren ist durch l_{x+n} gegeben.

Der Wert der zukünftigen Zahlungen für den Versicherer ist gleich $S(n)^{-1} l_{x+n}$; die Prämieneinnahmen sind gleich $l_x \pi(0)$.
Demnach beläuft sich der aktuelle Verlust auf

$$L = l_{x+n} S(n)^{-1} - l_x \pi(0) \; .$$

Wir sagen, dass die Prämie $\pi(0)$ **fair** ist, wenn $L = 0$.

Betrachte wieder ein Portfolio von l_x Erlebensfallversicherungsverträgen.

- Die Prämien werden als Einmalprämie $\pi(0)$ zum Zeitpunkt 0 abbezahlt.
- Die Anzahl der Überlebenden nach n Jahren ist durch l_{x+n} gegeben.

Der Wert der zukünftigen Zahlungen für den Versicherer ist gleich $S(n)^{-1} l_{x+n}$; die Prämieneinnahmen sind gleich $l_x \pi(0)$.
Demnach beläuft sich der aktuelle Verlust auf

$$L = l_{x+n} S(n)^{-1} - l_x \pi(0) \,.$$

Wir sagen, dass die Prämie $\pi(0)$ **fair** ist, wenn $L = 0$. Ist $S(n)$ bekannt, so ist die faire Prämie gegeben durch

$$\pi(0) = \frac{l_{x+n}}{l_x} \exp\left(- \int_0^n r(u)\,\mathrm{d}u \right) = {}_n p_x \exp\left(- \int_0^n r(u)\,\mathrm{d}u \right) .$$

Achtung! Dieses Argument funktioniert nur, wenn wir $S(n)$ im Zeitpunkt 0 tatsächlich kennen.

Finanzierungsrisiko eines Versicherungsportfolios

Angenommen $S(t)$ ist eine Zufallsvariable. Dann kann $S(t)$ als Finanzierungsrisiko interpretiert werden.

Dieses Risiko werden wir auch durch die Portfoliovergrößerung nicht diversifizieren können.

Finanzierungsrisiko eines Versicherungsportfolios

Angenommen $S(t)$ ist eine Zufallsvariable. Dann kann $S(t)$ als Finanzierungsrisiko interpretiert werden.

Dieses Risiko werden wir auch durch die Portfoliovergrößerung nicht diversifizieren können.

Frage: Wie kontrolliere ich das Finanzierungsrisiko?

Finanzierungsrisiko eines Versicherungsportfolios

Angenommen $S(t)$ ist eine Zufallsvariable. Dann kann $S(t)$ als Finanzierungsrisiko interpretiert werden.

Dieses Risiko werden wir auch durch die Portfoliovergrößerung nicht diversifizieren können.

Frage: Wie kontrolliere ich das Finanzierungsrisiko?
Antwort in unserer idealen Welt: Durch Handeln mit Zerobonds!

Finanzierungsrisiko eines Versicherungsportfolios

Angenommen $S(t)$ ist eine Zufallsvariable. Dann kann $S(t)$ als Finanzierungsrisiko interpretiert werden.

Dieses Risiko werden wir auch durch die Portfoliovergrößerung nicht diversifizieren können.

Frage: Wie kontrolliere ich das Finanzierungsrisiko?
Antwort in unserer idealen Welt: Durch Handeln mit Zerobonds!

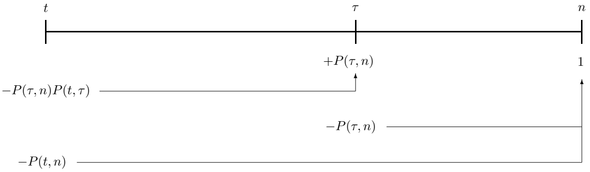
Definition 1

Ein Zerobond (auch Nullkuponanleihe) ist ein verzinsliches Wertpapier, bei dem es nur eine Auszahlung am Ende der Laufzeit gibt. Ein Zerobond mit Laufzeit n wird auch n-Bond genannt. Den Preis eines Zerobonds mit der Laufzeit n bezeichnen wir mit $P(t, n)$.

Hier betrachten wir eine völlig deterministische Welt.

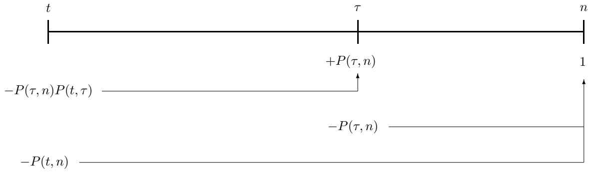
Hier betrachten wir eine völlig deterministische Welt.

Wähle $t \leq \tau \leq n$. Der Preis $P(\tau, n)$ zum Zeitpunkt τ eines n-Bonds ist dann gegeben durch $P(t, n) = P(t, \tau)P(\tau, n)$.



Hier betrachten wir eine völlig deterministische Welt.

Wähle $t \leq \tau \leq n$. Der Preis $P(\tau, n)$ zum Zeitpunkt τ eines n-Bonds ist dann gegeben durch $P(t, n) = P(t, \tau)P(\tau, n)$.

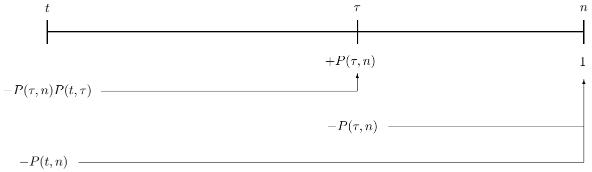


D.h. insbesondere, dass wir $P(t, \tau)$ und $P(\tau, n)$ als Diskontierungsfaktoren betrachten können:

1. Kaufe zum Zeitpunkt t $P(\tau, n)$ Einheiten eines $P(t, \tau)$ Bonds;
2. Kaufe in τ eine Einheit eines $P(\tau, n)$-Bonds.

Hier betrachten wir eine völlig deterministische Welt.

Wähle $t \leq \tau \leq n$. Der Preis $P(\tau, n)$ zum Zeitpunkt τ eines n-Bonds ist dann gegeben durch $P(t, n) = P(t, \tau)P(\tau, n)$.



D.h. insbesondere, dass wir $P(t, \tau)$ und $P(\tau, n)$ als Diskontierungsfaktoren betrachten können:

1. Kaufe zum Zeitpunkt t $P(\tau, n)$ Einheiten eines $P(t, \tau)$ Bonds;
2. Kaufe in τ eine Einheit eines $P(\tau, n)$-Bonds.

Man kann sogar die Existenz einer Funktion r^* nachweisen, sodass

$$P(t, n) = \exp\left(- \int_t^n r^*(u)\,\mathrm{d}u \right) .$$

Duplikation von Erlebensfallversicherungsportfolien

Angenommen der Versicherer investiert zum Zeitpunkt 0 in $l_x \kappa$ Einheiten eines n-Bonds.

Duplikation von Erlebensfallversicherungsportfolien

Angenommen der Versicherer investiert zum Zeitpunkt 0 in $l_x \kappa$ Einheiten eines n-Bonds. Der aktuelle Verlust des Versicherers beläuft sich dann auf

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \left(l_{x+n} S(n)^{-1} - l_x \pi(0)\right) + l_x \kappa \left(P(0,n) - S(n)^{-1}\right) \\ &= \left(l_{x+n} - l_x \kappa\right) S(n)^{-1} + l_x \left(\kappa P(0,n) - \pi(0)\right) . \end{aligned}$$

Der erste Term ist gleich 0, wenn $\kappa = l_{x+n}/l_x$; der zweite Term ist gleich 0, wenn $\pi(0) = {}_n p_x P(0,n)$.

Duplikation von Erlebensfallversicherungsportfolien

Angenommen der Versicherer investiert zum Zeitpunkt 0 in $l_x\kappa$ Einheiten eines n-Bonds. Der aktuelle Verlust des Versicherers beläuft sich dann auf

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= \left(l_{x+n}S(n)^{-1} - l_x\pi(0)\right) + l_x\kappa\left(P(0,n) - S(n)^{-1}\right) \\ &= \left(l_{x+n} - l_x\kappa\right)S(n)^{-1} + l_x\left(\kappa P(0,n) - \pi(0)\right) .\end{aligned}$$

Der erste Term ist gleich 0, wenn $\kappa = l_{x+n}/l_x$; der zweite Term ist gleich 0, wenn $\pi(0) = {}_np_x P(0,n)$.

Die faire Prämie ist dann gegeben durch

$$\pi(0) = {}_np_x P(0,n) .$$

Interpretation: Der Preis eines $P(0,n)$-Bonds multipliziert mit der n-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeit.

Duplikation von Erlebensfallversicherungsportfolien

Angenommen der Versicherer investiert zum Zeitpunkt 0 in $l_x \kappa$ Einheiten eines n-Bonds. Der aktuelle Verlust des Versicherers beläuft sich dann auf

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \left(l_{x+n} S(n)^{-1} - l_x \pi(0)\right) + l_x \kappa \left(P(0,n) - S(n)^{-1}\right) \\ &= \left(l_{x+n} - l_x \kappa\right) S(n)^{-1} + l_x \left(\kappa P(0,n) - \pi(0)\right) . \end{aligned}$$

Der erste Term ist gleich 0, wenn $\kappa = l_{x+n}/l_x$; der zweite Term ist gleich 0, wenn $\pi(0) = {}_n p_x P(0,n)$.

Die faire Prämie ist dann gegeben durch

$$\pi(0) = {}_n p_x P(0,n) .$$

Interpretation: Der Preis eines $P(0,n)$-Bonds multipliziert mit der n-jährigen Überlebenswahrscheinlichkeit.

In einem Portfolio mit l_x Verträgen sollte der Versicherer $l_x \cdot {}_n p_x = l_{x+n}$ $P(0,n)$-Bonds kaufen.

Duplikation von Todesfallversicherungsportfolien

Betrachte ein Portfolio von l_x temporären Todesfallversicherungsverträgen.

Duplikation von Todesfallversicherungsportfolien

Betrachte ein Portfolio von l_x temporären Todesfallversicherungsverträgen.

- Zum Zeitpunkt 0 beträgt die erwartete Anzahl der Toten im Jahr t $d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+1}$.
- Die Versicherungssumme 1 wird erst am Ende der Periode ausbezahlt.
- Der Versicherer kauft in 0 $l_x \kappa(t)$ Einheiten eines t-Bonds zum Preis $P(0, t)$.

Duplikation von Todesfallversicherungsportfolien

Betrachte ein Portfolio von l_x temporären Todesfallversicherungsverträgen.

- Zum Zeitpunkt 0 beträgt die erwartete Anzahl der Toten im Jahr t $d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+1}$.
- Die Versicherungssumme 1 wird erst am Ende der Periode ausbezahlt.
- Der Versicherer kauft in 0 $l_x \kappa(t)$ Einheiten eines t-Bonds zum Preis $P(0, t)$.

Der Verlust zum Zeitpunkt 0 beträgt

$$\begin{aligned}
\tilde{L} &= \left(\sum_{t=1}^{n} d_{x+t-1} S(t)^{-1} - l_x \pi(0) \right) + l_x \sum_{t=1}^{n} k(t) \left(P(0,t) - S(t)^{-1} \right) \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left(d_{x+t-1} - l_x \kappa(t) \right) S(t)^{-1} + l_x \left(\sum_{t=1}^{n} \kappa(t) P(0,t) - \pi(0) \right) .
\end{aligned}$$

Duplikation von Todesfallversicherungsportfolien

Der erste Term in der Verlustgleichung ist gleich 0, wenn

$$\kappa(t) = \frac{d_{x+t-1}}{l_x} = {}_{t-1}p_x \cdot {}_1q_{x+t-1} \ .$$

Der zweite Term ist gleich 0, wenn

$$\pi(0) = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1}p_x \cdot {}_1q_{x+t-1} P(0,t) \ .$$

Duplikation von Todesfallversicherungsportfolien

Der erste Term in der Verlustgleichung ist gleich 0, wenn

$$\kappa(t) = \frac{d_{x+t-1}}{l_x} = {}_{t-1}p_x \cdot {}_1q_{x+t-1} \ .$$

Der zweite Term ist gleich 0, wenn

$$\pi(0) = \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1}p_x \cdot {}_1q_{x+t-1} P(0,t) \ .$$

Falls die Versicherungssumme direkt nach dem Tod ausgezahlt werden soll, so könnte die Prämie wie folgt aussehen

$$\pi(0) = \int_0^n {}_tp_x \mu(x+t) P(0,t) \, \mathrm{d}t \ .$$

Rechnungsgrundlagen erster Ordnung (r^*, μ^*)

Aus dem zweiten Kapitel wissen wir

$$\pi \cdot a^*_{x\overline{n}|} = b^{\mathrm{a}}(0)_n E^*_x + b^{\mathrm{ad}} A^{1*}_{x\overline{n}|} \ ,$$

Rechnungsgrundlagen erster Ordnung (r^*, μ^*)

Aus dem zweiten Kapitel wissen wir

$$\pi \cdot a^*_{x\overline{n}|} = b^{\mathrm{a}}(0)\,{}_nE^*_x + b^{\mathrm{ad}} A^{1*}_{x\overline{n}|} \;,$$

wobei

$${}_{n-t}p^*_{x+t} \;=\; \exp\left(- \int_t^n \mu^*(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) ,$$

Rechnungsgrundlagen erster Ordnung (r^*, μ^*)

Aus dem zweiten Kapitel wissen wir

$$\pi \cdot a^*_{x\overline{n}|} = b^{\mathrm{a}}(0)\,{}_nE^*_x + b^{\mathrm{ad}} A^{1*}_{x\overline{n}|} \ ,$$

wobei

$$\begin{aligned} {}_{n-t}p^*_{x+t} &= \exp\left(- \int_t^n \mu^*(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) , \\ {}_{n-t}E^*_{x+t} &= \exp\left(- \int_t^n r^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) {}_{n-t}p^*_{x+t} \ , \end{aligned}$$

Rechnungsgrundlagen erster Ordnung (r^*, μ^*)

Aus dem zweiten Kapitel wissen wir

$$\pi \cdot a^*_{x\overline{n}|} = b^{\mathrm{a}}(0)\,{}_nE^*_x + b^{\mathrm{ad}} A^{1*}_{x\overline{n}|} \ ,$$

wobei

$$\begin{aligned}
{}_{n-t}p^*_{x+t} &= \exp\left(-\int_t^n \mu^*(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) , \\
{}_{n-t}E^*_{x+t} &= \exp\left(-\int_t^n r^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) {}_{n-t}p^*_{x+t} \ , \\
a^*_{x+t\,\overline{n-t}|} &= \int_t^n \exp\left(-\int_t^s r^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) {}_{s-t}p^*_{x+t}\,\mu^*(x+s)\,\mathrm{d}s \ ,
\end{aligned}$$

Rechnungsgrundlagen erster Ordnung (r^*, μ^*)

Aus dem zweiten Kapitel wissen wir

$$\pi \cdot a^*_{x\overline{n}|} = b^{\mathrm{a}}(0)\,{}_nE^*_x + b^{\mathrm{ad}} A^{1*}_{x\overline{n}|} \ ,$$

wobei

$$\begin{aligned}
{}_{n-t}p^*_{x+t} &= \exp\left(- \int_t^n \mu^*(x+\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) , \\
{}_{n-t}E^*_{x+t} &= \exp\left(- \int_t^n r^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) {}_{n-t}p^*_{x+t} \ , \\
a^*_{x+t\,\overline{n-t}|} &= \int_t^n \exp\left(- \int_t^s r^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) {}_{s-t}p^*_{x+t}\,\mu^*(x+s)\,\mathrm{d}s \ , \\
A^{1*}_{x+t\,\overline{n-t}|} &= \int_t^n \exp\left(- \int_t^s r^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) {}_{s-t}p^*_{x+t}\,\mu^*(x+s)\,\mathrm{d}s \ .
\end{aligned}$$

Rechnungsgrundlagen erster Ordnung und die technische Reserve

Die technische Reserve zum Zeitpunkt u der in t garantierten Zahlungen ist

$$V^*(t,u) = b^{\mathrm{a}}(t)\,{}_{n-u}E^*_{x+u} + b^{\mathrm{ad}} A^{1*}_{x+u\,\overline{n-u|}} - \pi a^*_{x+u\,\overline{n-u|}}\ .$$

Rechnungsgrundlagen erster Ordnung und die technische Reserve

Die technische Reserve zum Zeitpunkt u der in t garantierten Zahlungen ist

$$V^*(t,u) = b^{\mathrm{a}}(t)\,{}_{n-u}E^*_{x+u} + b^{\mathrm{ad}} A^{1*}_{x+u\,\overline{n-u}|} - \pi a^*_{x+u\,\overline{n-u}|} \ .$$

Für $u \geq t$ haben wir die folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u} V^*(t,u) = r^*(u) V^*(t,u) + \pi - \mu^*(x+u) R^*(t,u)$$

mit

$$V^*(t,t) = V^*(t) \ , \quad V^*(t,n) = b^{\mathrm{a}}(t) \ \text{ und } \ R^*(t,u) = b^{\mathrm{ad}} - V^*(t,u) \ .$$

Marktwert der garantierten Zahlungen

Wenden wir das Diversifikations- und Duplikationsargument auf die Zahlungen $b^{\mathrm{a}}(0)$ an, so erhalten wir den Marktwert der Überlebenszahlung

$$b^{\mathrm{a}}(0)P(t,n)_{n-t}p_{x+t} \; .$$

Marktwert der garantierten Zahlungen

Wenden wir das Diversifikations- und Duplikationsargument auf die Zahlungen $b^{\mathrm{a}}(0)$ an, so erhalten wir den Marktwert der Überlebenszahlung

$$b^{\mathrm{a}}(0)P(t,n)_{n-t}p_{x+t}\ .$$

Für den Marktwert der Todesfallzahlung erhalten wir

$$b^{\mathrm{ad}}\int_t^n P(t,s)_{s-t}p_{x+t}\mu(x+s)\,\mathrm{d}s\ .$$

Marktwert der garantierten Zahlungen

Wenden wir das Diversifikations- und Duplikationsargument auf die Zahlungen $b^{\mathrm{a}}(0)$ an, so erhalten wir den Marktwert der Überlebenszahlung

$$b^{\mathrm{a}}(0) P(t,n) {}_{n-t}p_{x+t} \ .$$

Für den Marktwert der Todesfallzahlung erhalten wir

$$b^{\mathrm{ad}} \int_t^n P(t,s) {}_{s-t}p_{x+t} \mu(x+s) \,\mathrm{d}s \ .$$

Der Marktwert der zukünftigen Prämien ist gegeben durch

$$\pi \int_t^n P(t,s) {}_{s-t}p_{x+t} \,\mathrm{d}s \ .$$

Marktwert der garantierten Zahlungen

Wenden wir das Diversifikations- und Duplikationsargument auf die Zahlungen $b^{\mathrm{a}}(0)$ an, so erhalten wir den Marktwert der Überlebenszahlung

$$b^{\mathrm{a}}(0)P(t,n)_{n-t}p_{x+t} \ .$$

Für den Marktwert der Todesfallzahlung erhalten wir

$$b^{\mathrm{ad}} \int_t^n P(t,s)_{s-t}p_{x+t}\mu(x+s) \,\mathrm{d}s \ .$$

Der Marktwert der zukünftigen Prämien ist gegeben durch

$$\pi \int_t^n P(t,s)_{s-t}p_{x+t} \,\mathrm{d}s \ .$$

Kombinieren wir die drei Faktoren so erhalten wir den Marktwert in t für die in 0 garantierten Zahlungen:

$$V^{\mathrm{g}}(0,t) = b^{\mathrm{a}}(0)P(t,n)_{n-t}p_{x+t} + \int_t^n P(t,s)_{s-t}p_{x+t}\big(\mu(x+s)b^{\mathrm{ad}} - \pi\big) \,\mathrm{d}s \ .$$

Zinsstrukturkurven

Definition 2

Der konforme Kassazins (continuously compounded spot rate) zum Zeitpunkt t für den Referenzzeitraum $[t, T]$ ist definiert durch

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log\left(P(t, T)\right) .$$

Zinsstrukturkurven

Definition 2

Der konforme Kassazins (continuously compounded spot rate) zum Zeitpunkt t für den Referenzzeitraum $[t, T]$ ist definiert durch

$$R(t, T) = -\frac{1}{T - t} \log \big(P(t, T) \big) \ .$$

Es folgt sofort

$$P(t, T) = \exp \big(- R(t, T)(T - t) \big) \ .$$

Zinsstrukturkurven

Definition 2

Der konforme Kassazins (continuously compounded spot rate) zum Zeitpunkt t für den Referenzzeitraum $[t, T]$ ist definiert durch

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log\big(P(t, T)\big) .$$

Es folgt sofort

$$P(t, T) = \exp\big(-R(t, T)(T-t)\big) .$$

Definition 3

Die Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt t ist gegeben durch die Abbildung

$$h \mapsto R(t, t+h) .$$

Terminzins (Forwardrate)

Betrachte die Zeiten $0 \leq t \leq T' \leq T$. Wie findet man den Zins für die Investitionen, die in T' beginnen und in T enden?

Terminzins (Forwardrate)

Betrachte die Zeiten $0 \leq t \leq T' \leq T$. Wie findet man den Zins für die Investitionen, die in T' beginnen und in T enden?

Definition 4

Der effektive Terminzins zum Zeitpunkt t für den Referenzzeitraum $[T', T]$ ist definiert durch $f(t, T', T) = -\frac{\log\big(P(t,T)\big) - \log\big(P(t,T')\big)}{T - T'}$.

Terminzins (Forwardrate)

Betrachte die Zeiten $0 \leq t \leq T' \leq T$. Wie findet man den Zins für die Investitionen, die in T' beginnen und in T enden?

Definition 4

Der effektive Terminzins zum Zeitpunkt t für den Referenzzeitraum $[T', T]$ ist definiert durch $f(t, T', T) = -\frac{\log\big(P(t,T)\big) - \log\big(P(t,T')\big)}{T-T'}$.

Interpretation:

- verkaufe in t einen T'-Bond und erhalte $P(t, T')$;
- in t verwende $P(t, T')$ um $\frac{P(t,T')}{P(t,T)}$ Einheiten eines T-Bonds zu kaufen;
- in T' zahle 1 aus;
- in T erhalte $\frac{P(t,T')}{P(t,T)}$ zurück.

Terminzins (Forwardrate)

Betrachte die Zeiten $0 \leq t \leq T' \leq T$. Wie findet man den Zins für die Investitionen, die in T' beginnen und in T enden?

Definition 4

Der effektive Terminzins zum Zeitpunkt t für den Referenzzeitraum $[T', T]$ ist definiert durch $f(t, T', T) = -\frac{\log\big(P(t,T)\big) - \log\big(P(t,T')\big)}{T - T'}$.

Interpretation:

- verkaufe in t einen T'-Bond und erhalte $P(t, T')$;
- in t verwende $P(t, T')$ um $\frac{P(t,T')}{P(t,T)}$ Einheiten eines T-Bonds zu kaufen;
- in T' zahle 1 aus;
- in T erhalte $\frac{P(t,T')}{P(t,T)}$ zurück.

$f(t, T', T)$ kann also als konstante Verzinsung von T' bis T interpretiert werden.

Manchmal ist es besser mit dem sofortigen Terminzins (instantaneous forward rate) zu arbeiten.

Definition 5

Ist die Abbildung $T \mapsto P(t, T)$ stetig diff.bar, so definieren wir den sofortigen Terminzins durch

$$f(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} \log \left(P(t, T) \right) .$$

Die Short Rate (auch Momentanzins) zum Zeitpunkt t ist $r(t) = f(t, t)$.

Manchmal ist es besser mit dem sofortigen Terminzins (instantaneous forward rate) zu arbeiten.

Definition 5

Ist die Abbildung $T \mapsto P(t,T)$ stetig diff.bar, so definieren wir den sofortigen Terminzins durch

$$f(t,T) = \frac{\partial}{\partial T} \log\left(P(t,T)\right) .$$

Die Short Rate (auch Momentanzins) zum Zeitpunkt t ist $r(t) = f(t,t)$.

Aus der obigen Definition folgt sofort

$$\int_t^T f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\log\left(P(t,T)\right) + \log\left(\underbrace{P(t,t)}_{=1}\right)$$

Daraus ergibt sich

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) .$$

Merke: Im Allgemeinen kann man nicht schließen, dass
$P(t, T) = \exp\big(-\int_t^T f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\big)$.

Merke: Im Allgemeinen kann man nicht schließen, dass
$P(t, T) = \exp\big(-\int_t^T f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\big)$.

Zurück in unsere ideale Welt!

Merke: Im Allgemeinen kann man nicht schließen, dass $P(t, T) = \exp\big(-\int_t^T f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\big)$.

Zurück in unsere ideale Welt!

Es gibt mehrere Möglichkeiten Modelle für einen Bondmarkt zu beschreiben:

- Bestimme alle $P(t, T)$ für $0 \leq t \leq T \leq T^*$, wo T^* den Zeithorizont bezeichnet.
- Bestimme alle $f(t, T)$ für $0 \leq t \leq T \leq T^*$ und leite daraus alle $P(t, T)$ und $r(t)$ ab.
- Bestimme alle $r(t)$ für $0 \leq t \leq T \leq T^*$.

1. Setze $T' = t$, dann haben wir

$$f(t,t,T) = R(t,T) \ ,$$

d.h. der Terminzins zum Zeitpunkt t für den Referenzzeitraum $[t, T]$ stimmt mit dem Kassazins für $[t, T]$ überein.

2. Wir sehen auch

$$\frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau = R(t,T) \ .$$

Der Kassazins in $[t, T]$ kann also als Mittelwert der sofortigen Terminzinsen interpretiert werden.

Als Alternative zu den Zinsen von eben kann man auch einfache Zinsen betrachten.

Definition 6

Der einfache Kassazins (simple spot rate) für $[t, T]$ ist gegeben durch

$$L(t, T) = -\frac{P(t, T) - 1}{(T - t)P(t, T)} ;$$

der einfache Terminzins (simple forward rate) für $[T', T]$ zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$L(t, T', T) = -\frac{P(t, T) - P(t, T')}{(T - T')P(t, T)} .$$

Als Alternative zu den Zinsen von eben kann man auch einfache Zinsen betrachten.

Definition 6

Der einfache Kassazins (simple spot rate) für $[t, T]$ ist gegeben durch

$$L(t, T) = -\frac{P(t, T) - 1}{(T - t)P(t, T)} \ ;$$

der einfache Terminzins (simple forward rate) für $[T', T]$ zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$L(t, T', T) = -\frac{P(t, T) - P(t, T')}{(T - T')P(t, T)} \ .$$

Interpretation: $1 - P(t, T) = (T - t)L(t, T)P(t, T)$ ist der Gewinn im Zeitintervall $[t, T]$.

Der Marktwert in u der in t garantierten Zahlungen ist gegeben durch

$$V^{\mathrm{g}}(t,u) = b^{\mathrm{a}}(t)\exp\Big(-\int_u^n f(u,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,{}_{n-u}p_{x+u} + \int_u^n \exp\Big(-\int_u^s f(u,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,{}_{s-u}p_{x+u}\big(\mu(x+s)b^{\mathrm{ad}} - \pi\big)\,\mathrm{d}s\,.$$

Der Marktwert in u der in t garantierten Zahlungen ist gegeben durch

$$V^{\mathrm{g}}(t,u) = b^{\mathrm{a}}(t) \exp\Big(-\int_u^n f(u,\tau)\,\mathrm{d}\tau \Big)\, {}_{n-u}p_{x+u} + \int_u^n \exp\Big(-\int_u^s f(u,\tau)\,\mathrm{d}\tau \Big)\, {}_{s-u}p_{x+u} \big(\mu(x+s) b^{\mathrm{ad}} - \pi\big)\,\mathrm{d}s\,.$$

Dies ist aber eine sehr komplizierte Funktion von u!

Der Marktwert in u der in t garantierten Zahlungen ist gegeben durch

$$V^{\mathrm{g}}(t,u) = b^{\mathrm{a}}(t)\exp\Big(-\int_u^n f(u,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,{}_{n-u}p_{x+u} + \int_u^n \exp\Big(-\int_u^s f(u,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,{}_{s-u}p_{x+u}\big(\mu(x+s)b^{\mathrm{ad}} - \pi\big)\,\mathrm{d}s\,.$$

Dies ist aber eine sehr komplizierte Funktion von u!

Deshalb betrachten wir eine einfachere Hilfsfunktion

$$V^{\mathrm{g,o}}(t,u) = b^{\mathrm{a}}(t)\exp\Big(-\int_u^n f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,{}_{n-u}p_{x+u} + \int_u^n \exp\Big(-\int_u^s f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\,{}_{s-u}p_{x+u}\big(\mu(x+s)b^{\mathrm{ad}} - \pi\big)\,\mathrm{d}s\,.$$

Die Hilfsfunktion $V^{\mathrm{g,o}}$

Die Funktion $V^{\mathrm{g,o}}$ genügt der folgenden DGL

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} V^{\mathrm{g,o}}(t,u) &= f(t,u) V^{\mathrm{g,o}}(t,u) + \pi - \mu(x+u) R^{\mathrm{g,o}}(t,u) , \\
V^{\mathrm{g,o}}(t,t) &= V^{\mathrm{g}}(t) , \\
V^{\mathrm{g,o}}(t,n) &= b^{\mathrm{a}}(t) ,
\end{aligned}
$$

wobei $R^{\mathrm{g,o}}(t,u) = b^{\mathrm{ad}} - V^{\mathrm{g,o}}(t,u)$.

Diese Differentialgleichung gibt uns eine alternative Methode $V^{\mathrm{g,o}}$ zu bestimmen.

Das individuelle Bonuspotential

Die Terminzinsen können auch bei der Berechnung des individuellen Bonuspotentials V^{ib} eingesetzt werden.

Die einfachste Situation ist $V(t) \geq V^{*}(t) \geq V^{\mathrm{g}}(t)$, wobei $V(t)$ die totale Vertragsreserve bezeichnet. Dann ist V^{ib} gegeben durch

$$V^{\mathrm{ib}}(t) = V^{*}(t) - V^{\mathrm{g}}(t) \; .$$

Das individuelle Bonuspotential

Die Terminzinsen können auch bei der Berechnung des individuellen Bonuspotentials V^{ib} eingesetzt werden.

Die einfachste Situation ist $V(t) \geq V^*(t) \geq V^{\mathrm{g}}(t)$, wobei $V(t)$ die totale Vertragsreserve bezeichnet. Dann ist V^{ib} gegeben durch

$$V^{\mathrm{ib}}(t) = V^*(t) - V^{\mathrm{g}}(t)\ .$$

Durch Anwendung der Differentialgleichungen für $V^*(t)$ und $V^{\mathrm{g}}(t)$ zusammen mit $V^*(t,n) - V^{\mathrm{g,o}}(t,n) = b^{\mathrm{a}}(t) - b^{\mathrm{a}}(t) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{ib}}(t) &= \int_t^n \exp\Big(- \int_t^s \big(f(t,\tau) + \mu(x+\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\Big) c(t,s)\,\mathrm{d}s\ , \\ c(t,s) &= \big(f(t,s) - r^*(s)\big)V^*(t,s) + \big(\mu^*(x+s) - \mu(x+s)\big)R^*(t,s)\ . \end{aligned}$$

Das individuelle Bonuspotential

Die Terminzinsen können auch bei der Berechnung des individuellen Bonuspotentials V^{ib} eingesetzt werden.

Die einfachste Situation ist $V(t) \geq V^*(t) \geq V^{\mathrm{g}}(t)$, wobei $V(t)$ die totale Vertragsreserve bezeichnet. Dann ist V^{ib} gegeben durch

$$V^{\mathrm{ib}}(t) = V^*(t) - V^{\mathrm{g}}(t)\ .$$

Durch Anwendung der Differentialgleichungen für $V^*(t)$ und $V^{\mathrm{g}}(t)$ zusammen mit $V^*(t,n) - V^{\mathrm{g,o}}(t,n) = b^{\mathrm{a}}(t) - b^{\mathrm{a}}(t) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{ib}}(t) &= \int_t^n \exp\Big(- \int_t^s \big(f(t,\tau) + \mu(x+\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau\Big) c(t,s)\,\mathrm{d}s\ , \\ c(t,s) &= \big(f(t,s) - r^*(s)\big) V^*(t,s) + \big(\mu^*(x+s) - \mu(x+s)\big) R^*(t,s)\ . \end{aligned}$$

Rechnungsgrundlagen erster Ordnung und die technische Reserve

Die technische Reserve tum Zeitpunkt u, der in t garantierten Zahlungen ist

$$V^*(t,u) = b^{\mathrm{a}}(t)\,{}_{n-u}E^*_{x+u} + b^{\mathrm{ad}} A^{1*}_{x+u\,\overline{n-u}|} - \pi a^*_{x+u\,\overline{n-u}|}\ .$$

Für $u \geq t$ haben wir die folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u} V^*(t,u) = r^*(u) V^*(t,u) + \pi - \mu^*(x+u) R^*(t,u)$$

mit

$$V^*(t,t) = V^*(t)\ , \quad V^*(t,n) = b^{\mathrm{a}}(t) \ \text{ und } \ R^*(t,u) = b^{\mathrm{ad}} - V^*(t,u)\ .$$

Das individuelle Bonuspotential

Die Terminzinsen können auch bei der Berechnung des individuellen Bonuspotentials V^{ib} eingesetzt werden.

Die einfachste Situation ist $V(t) \geq V^*(t) \geq V^{\mathrm{g}}(t)$, wobei $V(t)$ die totale Vertragsreserve bezeichnet. Dann ist V^{ib} gegeben durch

$$V^{\mathrm{ib}}(t) = V^*(t) - V^{\mathrm{g}}(t) \; .$$

Durch Anwendung der Differentialgleichungen für $V^*(t)$ und $V^{\mathrm{g}}(t)$ zusammen mit $V^*(t,n) - V^{\mathrm{g,o}}(t,n) = b^{\mathrm{a}}(t) - b^{\mathrm{a}}(t) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{ib}}(t) &= \int_t^n \exp\Big(- \int_t^s \big(f(t,\tau) + \mu(x+\tau)\big) \, \mathrm{d}\tau \Big) c(t,s) \, \mathrm{d}s \; , \\ c(t,s) &= \big(f(t,s) - r^*(s)\big) V^*(t,s) + \big(\mu^*(x+s) - \mu(x+s)\big) R^*(t,s) \; . \end{aligned}$$

Das individuelle Bonuspotential

Die Terminzinsen können auch bei der Berechnung des individuellen Bonuspotentials V^{ib} eingesetzt werden.

Die einfachste Situation ist $V(t) \geq V^*(t) \geq V^{\mathrm{g}}(t)$, wobei $V(t)$ die totale Vertragsreserve bezeichnet. Dann ist V^{ib} gegeben durch

$$V^{\mathrm{ib}}(t) = V^*(t) - V^{\mathrm{g}}(t) \; .$$

Durch Anwendung der Differentialgleichungen für $V^*(t)$ und $V^{\mathrm{g}}(t)$ zusammen mit $V^*(t,n) - V^{\mathrm{g,o}}(t,n) = b^{\mathrm{a}}(t) - b^{\mathrm{a}}(t) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V^{\mathrm{ib}}(t) &= \int_t^n \exp\Big(- \int_t^s \left(f(t,\tau) + \mu(x+\tau)\right) \mathrm{d}\tau \Big) c(t,s) \, \mathrm{d}s \; , \\ c(t,s) &= \left(f(t,s) - r^*(s)\right) V^*(t,s) + \left(\mu^*(x+s) - \mu(x+s)\right) R^*(t,s) \; . \end{aligned}$$

Die Hilfsfunktion $V^{\mathrm{g,o}}$

Die Funktion $V^{\mathrm{g,o}}$ genügt der folgenden DGL

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} V^{\mathrm{g,o}}(t,u) &= f(t,u) V^{\mathrm{g,o}}(t,u) + \pi - \mu(x+u) R^{\mathrm{g,o}}(t,u) \,, \\
V^{\mathrm{g,o}}(t,t) &= V^{\mathrm{g}}(t) \,, \\
V^{\mathrm{g,o}}(t,n) &= b^{\mathrm{a}}(t) \,,
\end{aligned}
$$

wobei $R^{\mathrm{g,o}}(t,u) = b^{\mathrm{ad}} - V^{\mathrm{g,o}}(t,u)$.

Diese Differentialgleichung gibt uns eine alternative Methode $V^{\mathrm{g,o}}$ zu bestimmen.

Allgemeine Anleihe

Die meisten Wertpapiere, die an den Märkten gehandelt werden, haben eine kompliziertere Struktur als die Nullkuponanleihe.

Allgemeine Anleihe

Die meisten Wertpapiere, die an den Märkten gehandelt werden, haben eine kompliziertere Struktur als die Nullkuponanleihe.

Betrachte eine Anleihe, die zum Zeitpunkt τ emittiert wurde. Zu den Zeitpunkten $\tau_1 < \cdots < \tau_n$ werden die Beträge $c_1, ..., c_n$ ausgezahlt. Der Wert einer solchen Anleihe zum Zeitpunkt t (nach den möglichen Zahlungen) ist

$$P(t) = \sum_{i,\ \tau_i > t} P(t, \tau_i) c_i \ .$$

Dabei bezeichnet $P(t, \tau_i)$ den Preis zum Zeitpunkt t eines Zerobonds mit Laufzeit τ_i.

Allgemeine Anleihe

Die meisten Wertpapiere, die an den Märkten gehandelt werden, haben eine kompliziertere Struktur als die Nullkuponanleihe.

Betrachte eine Anleihe, die zum Zeitpunkt τ emittiert wurde. Zu den Zeitpunkten $\tau_1 < \cdots < \tau_n$ werden die Beträge $c_1, \ldots, c_n$ ausgezahlt. Der Wert einer solchen Anleihe zum Zeitpunkt t (nach den möglichen Zahlungen) ist

$$P(t) = \sum_{i,\ \tau_i > t} P(t, \tau_i) c_i \ .$$

Dabei bezeichnet $P(t, \tau_i)$ den Preis zum Zeitpunkt t eines Zerobonds mit Laufzeit τ_i.

Beispiel (Rentenbrief)

Betrachte $c_k = c$ für $k = 1, \ldots, n$. Dies liefert den Rentenbrief.

References

Møller, T and Steffensen, M. (2008). Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance. Cambrige University Press, New York.