22 Charakteristische Funktionen und Verteilungskonvergenz

Charakteristische Funktionen (Fourier-Transformierte) liefern ein starkes analytisches Hilfsmittel zur Untersuchung von W-Verteilungen und deren (schwacher) Konvergenz.

Definition 22.1. *Sei* X *eine reelle ZV. auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit Verteilung* P_X *(bzw. VF.* F_X *). Dann heißt* $\varphi = \varphi_X : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$ *mit*

$$\varphi_X(t) := E\, e^{itX} = \int e^{itx}\, P_X(dx)\,, \qquad t \in \mathbb{R}^1,$$

die charakteristische Funktion von X *(bzw.* P_X *bzw.* F_X *).*

Hierbei kann der Begriff des μ-Integrals wie folgt auf komplexwertige Integranden erweitert werden:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f = u + i\,v$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet.

$$f \text{ heißt } (\mathcal{A}\text{-}) \text{ messbar} \iff u, v \text{ sind } (\mathcal{A}\text{-}) \text{ messbar} \quad ;$$

$$f \text{ heißt } (\mu\text{-}) \text{ integrierbar} \iff u, v \text{ sind } (\mu\text{-}) \text{ integrierbar} \quad ;$$

Falls f μ-integrierbar ist, setzt man: $\int f\, d\mu := \int u\, d\mu + i \int v\, d\mu\,.$

Bekannte Eigenschaften des μ-Integrals, wie z.B. die Linearität, übertragen sich sofort. Insbesondere gilt:

(1) $\int \operatorname{Re} f\, d\mu = \operatorname{Re} \int f\, d\mu\,, \quad \int \operatorname{Im} f\, d\mu = \operatorname{Im} \int f\, d\mu\,;$

(2) $\int \overline{f}\, d\mu = \overline{\int f\, d\mu}\,,$ wobei $\overline{z} := \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z\,;$

(3) $\left| \int f\, d\mu \right| \le \int |f|\, d\mu\,.$

Andere Aussagen übertragen sich ebenfalls sofort, z.B.:

$$\mathcal{L}^r(\mu) := \left\{ f: \Omega \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int |f|^r\, d\mu < \infty \right\} \qquad (r \ge 1\,, \text{ fest})$$

bildet einen vollständigen, normierten Vektorraum mit der Norm

$$f \longmapsto \| f \|_r := \left(\int |f|^r\, d\mu \right)^{1/r}.$$

Bekannte Grenzwertsätze bleiben erhalten, z.B.

Satz 22.1. (*Lebesgue*) *Seien* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $\{f_n\}$ *eine Folge* ($\mathcal{A}$-) *messbarer, komplexwertiger Funktionen mit*

(i) $|f_n| \le g \quad \forall\, n = 1, 2, \dots,$ *wobei* $g \in \mathcal{L}^r(\mu)$ $\quad (1 \le r < \infty$, *fest*);

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu$-*f.ü.* $\quad (n \to \infty)$.

$\Longrightarrow$ a) $\quad f \in \mathcal{L}^r(\mu)$ $\quad$ *<u>und</u>* $\quad \|f_n - f\|_r \to 0 \quad (n \to \infty)$;

b) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$, $\quad$ *falls* $\quad r = 1$.

Bemerkung 22.1. Wegen $|e^{itx}| = |\cos(tx) + i\,\sin(tx)| = 1$, existiert φ_X auf ganz $\mathbb{R}^1$ und es gilt: $|\varphi_X(t)| \le 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1$.

Beispiel 22.1.

a) $P_X = B(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1$;

b) $P_X = \pi_\lambda$, $\lambda > 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_X(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1$;

c) $P_X = Exp(\lambda)$, $\lambda > 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1$;

d) $P_X = N(0,1) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_X(t) = e^{-t^2/2} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1$;

e) <u>Cauchy-Verteilung</u> $C(a)$, $a > 0$: $\quad P_X = f\,\lambda^1$ mit

$$f(x) = \frac{a}{\pi}\,\frac{1}{a^2 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}^1) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_X(t) = e^{-a|t|} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1;$$

f) <u>Laplace- (Doppelexponential-) Verteilung</u> $D(\lambda)$, $\lambda > 0$: $\quad P_X = f\,\lambda^1$ mit

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda|x|} \quad (x \in \mathbb{R}^1) \quad \Longrightarrow \quad \varphi_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1.$$

[Nachweis von a) - c) durch direkte Summation bzw. Integration; d) - f) vgl. später.]

Einige Eigenschaften charakteristischer Funktionen liefert der

Satz 22.2. *Für die charakteristische Funktion* $\varphi = \varphi_X$ *einer reellen ZV.* X *gilt:*

a) $\varphi(0) = 1, \quad |\varphi(t)| \le 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1;$

b) φ *ist gleichmäßig stetig auf* $\mathbb{R}^1$;

c) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1;$

d) $\varphi_{a+bX}(t) = e^{ita}\, \varphi_X(bt) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1; \quad a, b \in \mathbb{R}^1,$ *fest;*

e) *Falls* $E\,|X|^n < \infty \quad (\exists\, n \in \mathbb{N})$, *so ist* φ *n-mal differenzierbar mit*

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt}\varphi(t) = i^n\, E(X^n\, e^{itX}) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1;$$

speziell: $\varphi^{(n)}(0) = i^n\, E\, X^n$;

f) *Falls* $E\,|X|^n < \infty \quad (\exists\, n \in \mathbb{N})$, *so gilt die folgende Taylorentwicklung:*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\, E\, X^k + r_n(t), \quad \textit{wobei}$$

$$|r_n(t)| \le \min\left\{ \frac{3\,|t|^n}{n!}\, E\,|X|^n,\ \frac{2\,|t|^{n+1}}{(n+1)!}\, E\,|X|^{n+1} \right\};$$

g) *Taylorreihe:* $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}\, E\, X^k, \quad$ *falls* $\lim_{n\to\infty} \frac{|t|^n}{n!}\, E\,|X|^n = 0;$

h) *Falls* $\varphi^{(2k)}(0)$ *existiert* $(\exists\, k \in \mathbb{N})$, *so gilt:* $E\, X^{2k} < \infty$;

j) *Setze* $\widetilde{\varphi}(z) := E\, e^{zX}, \quad z \in \mathbb{C}^1$, *falls* e^{zX} *P-integrierbar ist*
[*also* $\widetilde{\varphi}(it) = \varphi(t),\ t \in \mathbb{R}^1$]. *Gilt* $E\, e^{t_0 |X|} < \infty \quad (\exists\, t_0 > 0)$,
so ist $\widetilde{\varphi}$ *holomorph im Streifen* $\{ z \in \mathbb{C}^1 : |\mathrm{Re}\, z| < t_0 \}$.
Insbesondere gilt:

$$\widetilde{\varphi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\, E\, X^k, \quad |z| < t_0, \quad \textit{bzw.}$$

$$M(t) = E\, e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\, E\, X^k, \quad |t| < t_0, \quad t \ \textit{reell}.$$

Beispiel 22.1 d) (Fortsetzung) $\quad P_X = N(0,1) \quad \Longrightarrow \quad M_X(t) \;=\; e^{t^2/2}\,, \quad t \in \mathbb{R}^1\,.$

Mit Hilfe des Satzes von Lebesgue erhält man: $\quad M_X(t) \;=\; \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n\,!}\, E\,X^n\,, \quad t \in \mathbb{R}^1\,;$

$$\Longrightarrow \qquad E\,X^n \;=\; \begin{cases} 0 & , \quad n = 1,3,\ldots \;; \\ \dfrac{n\,!}{(n/2)!\;2^{n/2}} & , \quad n = 0,2,\ldots \;; \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi_X(t) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n\,!}\, E\,X^n \;=\; e^{(it)^2/2} \;=\; e^{-t^2/2}\,, \quad t \in \mathbb{R}^1\,;$$

[alternativer Nachweis über Satz 22.2 j)] .

Charakteristische Funktionen besitzen die folgende „ Faltungseigenschaft “ :

Satz 22.3. *Für unabhängige, reelle ZV.* $X_1, \ldots, X_n$ *auf* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *gilt:*

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(t) \;=\; \varphi_{X_1}(t) \cdots \varphi_{X_n}(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}^1\,.$$

Charakteristische Funktionen legen die zugehörige Verteilung eindeutig fest :

Satz 22.4.

a) *Umkehrformel: Ist* φ *die charakteristische Funktion einer reellen ZV. mit Verteilung* P_X *, so gilt für* $a < b$ *mit* $P(X = a) = P(X = b) = 0$:

$$P_X\big((a,b]\big) \;=\; \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}\, \varphi(t)\, dt\,;$$

b) *Eindeutigkeitssatz: Seien* X, Y *reelle ZV. mit Verteilungen* P_X, P_Y *und charakteristischen Funktionen* φ_X, φ_Y *. Dann gilt:*

$$P_X \;=\; P_Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_X(t) \;=\; \varphi_Y(t) \quad \forall\; t \in \mathbb{R}^1\,.$$

Bemerkung 22.2.

a) In der Umkehrformel sind a, b Stetigkeitsstellen der VF. F_X (bzw. von P_X). Daher kann $(a, b]$ auch ersetzt werden durch (a, b) bzw. $[a, b)$ bzw. $[a, b]$.

b) Falls $\int |\varphi(t)|\, dt < \infty$, so kann die rechte Seite der Umkehrformel ersetzt werden durch

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)\, dt\,.$$

Bemerkung 22.3. Es gibt Beispiele von Verteilungen P_X, P_Y, deren zugehörige charakteristische Funktionen φ_X, φ_Y auf einem <u>endlichen</u> Intervall $[-t_0, t_0]$ übereinstimmen, wobei t_0 beliebig groß sein kann, <u>aber</u> für die dennoch $P_X \neq P_Y$ gilt.

Beispiel 22.2.

a) Eine reelle ZV. X ist genau dann <u>symmetrisch verteilt</u> (bzgl. 0, d.h. $P_X = P_{-X}$), wenn φ_X reellwertig ist.

b) X und Y seien unabhängige reelle ZV. Dann gilt:

$$\begin{array}{llllllllll}
1) & P_X = B(m,p) & , & P_Y = B(n,p) & \Longrightarrow & P_{X+Y} = B(m+n,p) & ; \\
2) & P_X = \pi_\lambda & , & P_Y = \pi_\mu & \Longrightarrow & P_{X+Y} = \pi_{\lambda+\mu} & ; \\
3) & P_X = N(a,\sigma^2) & , & P_Y = N(b,\tau^2) & \Longrightarrow & P_{X+Y} = N(a+b,\sigma^2+\tau^2) & ; \\
4) & P_X = C(a) & , & P_Y = C(b) & \Longrightarrow & P_{X+Y} = C(a+b) & .
\end{array}$$

Korollar 22.1. *Sei φ charakteristische Funktion einer reellen ZV. X mit*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, dt \;<\; \infty\,,$$

so besitzt P_X eine <u>gleichmäßig stetige λ^1-Dichte</u> f, nämlich

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}^1\,.$$

Beispiel 22.1 e, f) (Fortsetzung) $P_X \;=\; D(\lambda) \quad\Longrightarrow\quad \varphi_X(t) \;=\; \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}\,, \quad t \in \mathbb{R}^1$

$$\Longrightarrow \qquad \int |\varphi_X(t)|\, dt < \infty \quad \overset{\text{Kor. 22.1}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|} \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2}\, dt$$

$$\underset{-t \leftrightarrow x}{\overset{\lambda \leftrightarrow a}{\Longrightarrow}} \qquad \int \frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2} e^{itx} \lambda^1(dx) \;=\; e^{-a|t|}\,, \qquad t \in \mathbb{R}^1\,.$$

Satz 22.5. (*Stetigkeitssatz von P. Lévy*) *Seien* $\{Z_n\}_{n=1,2,\dots}$, Z *reelle ZV. mit charakteristischen Funktionen* $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$, φ. *Dann gilt:*

$$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \quad (n \to \infty) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_n(t) \longrightarrow \varphi(t) \quad (n \to \infty) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1 .$$

Bemerkung 22.4. Der Beweis des Stetigkeitssatzes zeigt, dass die Bedingung

(C1) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1$

auch ersetzt werden kann durch

(C2) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = g(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1$, wobei $g:\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$ stetig ist bei $t = 0$,

bzw. durch

(C3) $\{P_{Z_n}\}$ ist straff und $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = g(t) \in \mathbb{C} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^1$.

Für Anwendungen des Stetigkeitssatzes sind die folgenden Lemmata nützlich:

Lemma 22.1. *Sei* $\{z_n\}_{n=1,2,\dots} \subset \mathbb{C}$ *mit* $z_n \to z \in \mathbb{C}$ $(n \to \infty)$. *Dann folgt:*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{z_n}{n}\Big)^n = e^{z} .$$

Lemma 22.2. *Sei* X *eine reelle ZV. mit charakteristischer Funktion* φ *und* k*-tem Moment* $E\,|\,X\,|^k < \infty$ $(\exists\ k \in \mathbb{N})$. *Dann existiert eine Funktion* $\psi = \psi_k:\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$ *derart, dass gilt:*

(i) ψ *ist stetig*, $\psi(0) = 0$;

(ii) $$\varphi(t) = \sum_{l=0}^{k} \frac{(it)^l}{l\,!}\, E\,X^l + \psi(t)\,\frac{t^k}{k\,!}, \qquad t \in \mathbb{R}^1;$$

[*„qualitative Form des Restglieds“*].

Beispiel 22.3.

a) (Schwaches Gesetz der großen Zahlen) Sei $\{X_k\}_{k=1,2,\dots}$ eine i.i.d. Folge reeller, (P-) integrierbarer ZV. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $a := E\,X_1$. Dann gilt:

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} a \quad (n \to \infty) \qquad [\text{also auch } \overline{X}_n \xrightarrow{P} a \quad (n \to \infty)] .$$

b) (Binomialapproximation der Poissonverteilung) Sei $\{Z_n\}_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge reeller ZV. mit $P_{Z_n} = B(n, p_n)$, wobei $0 \leq p_n \leq 1$ und $n\,p_n \to \lambda > 0 \quad (n \to \infty)$. Dann gilt :

$$Z_n \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} Z \quad (n \to \infty), \qquad \text{wobei } P_Z = \pi_\lambda .$$

c) (Zentraler Grenzwertsatz im i.i.d. Fall) Sei $\{X_k\}_{k=1,2,\ldots}$ eine i.i.d. Folge reeller, quadratintegrierbarer ZV. auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $a := E\,X_1$, $0 < \sigma^2 := Var(X_1) < \infty$. Dann gilt :

$$Z_n := \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - na}{\sqrt{n\sigma^2}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - a}{\sigma} \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} Z \quad (n \to \infty), \quad \text{wobei } P_Z = N(0,1).$$

Man beachte aber, dass gilt :

d) Sei $\{X_k\}_{k=1,2,\ldots}$ eine i.i.d. Folge von $C(a)$-verteilten ZV. $(a > 0)$. Dann folgt :

$$P_{\overline{X}_n} = P_{X_1}, \qquad \text{also auch } \overline{X}_n \stackrel{\mathcal{D}}{\longrightarrow} X_1 \quad (n \to \infty).$$

D.h. , sowohl für das schwache Gesetz der großen Zahlen als auch für den zentralen Grenzwertsatz sind die jeweiligen Integrierbarkeitsvoraussetzungen auch notwendig . Sie gewährleisten z.B. in den Beispielen 22.3 a) und c) , dass die einzelnen Summanden bei der Summenbildung keinen zu großen Einfluss haben, denn es gilt

in 22.3 a) : $\quad P\Big(\Big|\frac{X_k}{n}\Big| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{n\,\varepsilon}\,E\,|\,X_1\,| = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty);$

in 22.3 c) : $\quad P\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\Big|\frac{X_k - a}{\sigma}\Big| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{n\,\varepsilon^2}\,Var\Big(\frac{X_1 - a}{\sigma}\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$

Auf diese (so genannte) „ asymptotische Vernachlässigbarkeit “ ist insbesondere dann zu achten, wenn man sich noch von der identischen Verteilung der einzelnen Summanden lösen will.